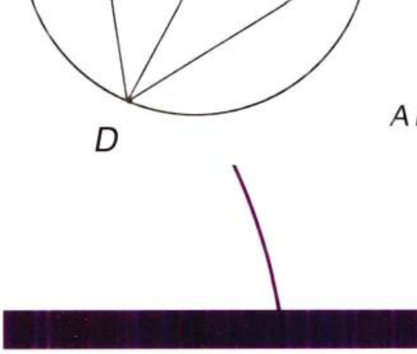
QIDONGZHONGXUEAOSAIXUNLIANJIAOCHENG

启东中学奥赛训练教程

初中数学



$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$

丛书主编　王　生
本册主编　曹瑞彬

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

启东中学

QIDONGZHONGXUEAOSAIXUNLIANJIAOCHENG

奥赛 训练教程

初 中 数 学

主　编　曹瑞彬
副主编　张　杰
作　者　张　杰　庞　备　郁卫星
沙春辉　陈惠忠　黄海东

南京师范大学出版社
NANJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

启东中学奥赛训练教程. 初中数学 / 曹瑞彬主编
. —4版. —南京：南京师范大学出版社，2013.4
ISBN 978-7-5651-1221-8

Ⅰ.①启… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 006858 号

书　　名	启东中学奥赛训练教程(初中数学)
主　　编	曹瑞彬
副 主 编	张　杰
责任编辑	孙　涛
出版发行	南京师范大学出版社
地　　址	江苏省南京市宁海路 122 号(邮编:210097)
电　　话	(025)83598919(传真)　83598412(营销部)　83598297(邮购部)
网　　址	http://www.njnup.com
电子信箱	nspzbb@163.com
印　　刷	启东市人民印刷有限公司
开　　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张	22.25
字　　数	541 千
版　　次	2013 年 4 月第 4 版　2013 年 4 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5651-1221-8
定　　价	45.00 元

曹瑞彬　男，1962 年 11 月出生，1983 年毕业于南京师范学院数学系，中学数学高级教师，江苏省数学特级教师，数学奥林匹克高级教练，南通市数学学科基地业务负责人，启东中学奥赛中心副主任，全国教育系统模范教师，全国中小学优秀班主任。长期从事数学教学研究工作及数学奥林匹克竞赛辅导工作，近年来培养了一大批数学尖子，其中有 100 多人获得全国数学联赛一等奖，10 多位同学入选国家冬令营，7 位同学进入国家集训队，其中陈建鑫同学获第 42 届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌。任班主任所送的 2003 届高三(1)班有 20 位同学考入清华、北大，还有 20 位同学考入复旦、交大。主编了《奥林匹克教材》、《向 45 分钟要效益》、《大学自主招生真题汇编与训练 · 数学》等数十本教辅用书，在《中学数学》、《教育研究》等杂志上发表了十多篇论文。

出版说明

江苏省启东中学是一所面向启东市(县级市)招生的四星级高中,也是中国百强中学之一,近年来取得的累累硕果引起教育界乃至全社会的关注。

1995年"世界第一才女"毛蔚同学夺得了第26届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,成为该项赛事开赛以来第一位获得金牌的女生;1996年蔡凯华同学在第37届国际中学生数学奥林匹克竞赛中夺得银牌,周璐同学获第28届国际中学生化学奥林匹克竞赛银牌;1998年陈宇翱同学在第29届国际中学生物理奥林匹克竞赛中荣获金牌;2001年施陈博同学夺得第32届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,陈建鑫同学夺得第42届国际中学生数学奥林匹克竞赛金牌;2002年樊向军同学获第33届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2003年倪犇博同学获第35届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌;2004年李真同学获第35届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2006年朱力同学获第37届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌;2007年钱秉玺同学获第38届国际中学生物理奥林匹克竞赛金牌,并被授予"全国优秀共青团员"称号;2012年李天然同学获第44届国际中学生化学奥林匹克竞赛金牌。

一所长江北岸、黄海之滨的农村中学,连续多年在不同学科的竞赛中摘金夺银,学校高考成绩也是令人惊讶的出色,被誉为"奥赛金牌的摇篮,清华北大的生源基地"。

"启东中学现象"自然也成为出版界瞩目的焦点,与"黄冈"一样,"启东"很快成为教辅出版的热门题材。南京师范大学出版社较早注意到了启东中学教育、教学方面取得的卓然成绩,应该说,建社以来的多套双效图书中都有启东中学教学成果的反映,如《向45分钟要效益》、《特级教师优化设计》、《奥林匹克竞赛指导》、《一课一练》等。把启东中学奥赛作为一个系列出版发行,是我社依托名校名师、实施"名品"战略迈开的又一新步伐。

迈开这一步,是我社与启东中学多年合作的结果,倚天时地利人和的优势,水到而渠成。

迈开这一步,是广大读者对南京师范大学出版社的热切期盼。读者对南京师范大学出版社"理念教辅"、"名品教辅"的关心与厚爱以及他们的需求,已成为我们的第一动力。

初中、高中各科《启东中学奥赛训练教程》以相应教材内容为基础,根据竞赛大纲并结合启东中学学生使用的新教材和各科竞赛辅导经验而编写,将竞赛与升学结合起来,尤其重视基础知识的学习和基本思维方法的培养,由浅入深,循序渐进。《启东中学奥赛精题详解》则将《启东中学奥赛训练教程》中的包括原创题目在内的对应习题给出详尽的解答,方便配套使用。

本丛书主编为启东中学校长王生博士,各分册的主编均是启东中学金牌教练,参加编写的老师长期从事一线教学和竞赛辅导工作,有丰富的经验和成功的方法。

我们期待广大读者能从这套书中感受启东中学的努力,领略启东中学的风采,解读启东中学的奥秘,欣赏启东中学的智慧,分享启东中学的成功!

南京师范大学出版社

目 录

第一章 数与式

第二章 方程与不等式

第三章 函数及其图象

第四章 直线形

第一章　数与式

第一节　整数的有关性质

知识提要

一、数的整除性

1. 定义：设 a,b 是整数，$b\neq 0$，如果有整数 p，使得 $a=bp$，那么称 a 能被 b 整除，或称 b 整除 a，记作 $b|a$. 如果 a 不是 b 的倍数，则称整数 b 不整除 a，或称 a 不被 b 整除，记作 $b\nmid a$.

2. 整除的常用性质：

(1)若 $a|b,b|c$，则 $a|c$.

(2)k 是任意整数，若 $b|a$，则 $b|ka$.

(3)若 $a|b,a|c$，则 $a|(b\pm c)$.

(4)若 $m|ab,(m,a)=1$，则 $m|b$.

(5)若 $a|m,b|m$，则$[a,b]|m$.

(6)若 $b|a,c|a$，且$(b,c)=1$，则 $bc|a$.

3. 整数的整除的常用判定方法：

(1)若整数 M 的个位数是偶数，则 $2|M$.

(2)若整数 M 的个位数是 0 或 5，则 $5|M$.

(3)若整数 M 的各位数字之和是 3(或 9)的倍数，则 $3|M$(或 $9|M$).

(4)若整数 M 的末两位数是 4(或 25)的倍数，则 $4|M$(或 $25|M$).

(5)若整数 M 的末三位数是 8(或 125)的倍数，则 $8|M$(或 $125|M$).

(6)若整数 M 的奇位数字的和与偶位数字的和的差是 11 的倍数，则 $11|M$.

(7)能被 7，11，13 整除的数的特征是：奇位千进位的总和与偶位千进位的总和的差(或者反过来)能被 7，11，13 整除.

二、最大公约数和最小公倍数

1. 定义：整数 a 和 b 公有的约数，叫做 a 和 b 的公约数，公约数中的最大者 d 叫做最大公约数，记作 $d=(a,b)$，若 a,b 的最大公约数为 1，即$(a,b)=1$，则把 a 和 b 叫做互质(素)的数；设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 m 均为正整数，且 $a_1|m,a_2|m,\cdots,a_n|m$，则称 m 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的公倍数，公倍数中的最小者 m 叫做最小公倍数，记作$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=m$.

2. 性质：

(1)若 $b|a$，则$(a,b)=b,[a,b]=a$.

(2)若$(a,b)=1$，则$(a,bc)=(a,c)$.

(3)$(a,b)\cdot[a,b]=ab$.

三、奇数和偶数

1. 定义：能被 2 整除的整数叫做偶数；不能被 2 整除的整数叫做奇数. 偶数通常用 $2n$ 来表示，奇数通常用 $2n+1$ 或 $2n-1$ 来表示，其中 n 为整数.

2. 性质：

(1)任一整数或为偶数或为奇数，二者必居其一.

(2)奇数≠偶数.

(3)两偶数相加(减)的结果为偶数，两奇数相加(减)的结果为偶数，奇数与偶数相加(减)的结果为奇数.

(4)若干个整数之和为奇数，则其中至少有一个是奇数；若干个整数之积为奇数，则每个整数都是奇数.

四、质(素)数和合数

1. 定义：设整数 $a\neq0$，$a\neq\pm1$，若 a 只有正约数 1 与本身，则这个整数 a 叫做质(素)数，否则 a 叫做合数.

2. 性质：

(1)如果正整数 $a>1$，那么 a 的大于 1 的最小因数一定是质数.

(2)正整数 $a>1$，则 a 必有质因数.

(3)如果正整数 a 是合数，那么必有质因数 $p\leqslant\sqrt{a}$.

(4)1 既不是质数也不是合数，2 是所有质数中最小的且是唯一的一个偶质数(对正整数而言).

五、完全平方数

1. 定义：如果 n 是一个整数，那么 n^2 就叫做完全平方数.

2. 性质：

(1)完全平方数的末位数字只能是 0，1，4，5，6，9，而不能是 2，3，7，8.

(2)偶数的平方必是 4 的倍数，奇数的平方被 8 除余 1.

(3)当平方数的末位数是奇数时，其十位数必是偶数；当平方数的末位数是 6 时，其十位数必是奇数.

解题指导

例 1 求一个四位数，它的前两位数字及后两位数字相同，而该数本身等于一个整数的平方.

解 设所求的四位数为 $x=\overline{aabb}$，则

$x=1000a+100a+10b+b=11(100a+b)(0<a\leqslant9,0\leqslant b\leqslant9)$.

可见平方数 x 被 11 整除，从而 x 被 11^2 整除，

因此，数 $100a+b=99a+(a+b)$ 被 11 整除，于是 $a+b$ 能被 11 整除.

但 $0<a+b\leqslant18$，所以 $a+b=11$.

所以 $x=11^2(9a+1)$.

所以 $9a+1$ 是某个自然数的平方. 这里 $a=1,2,\cdots,9$.

逐一验证，仅当 $a=7$ 时，$9a+1$ 是平方数.

所以 $b=4$.

故所求的四位数应为 7744.

注 整数的十进位数码表示法是解决上述问题的关键,它有助于将已知条件转化为简单的等式,从而使问题得到顺利解决.

例 2 两整数 a、b,a 除以 7 余 2,b 除以 7 余 5,当 $a^2>3b$ 时,求 a^2-3b 的差除以 7 的余数.

分析 利用带余除法的一般表达式,代入式子 a^2-3b 中,经过变形就可得到所求的余数.

解 设 $a=7m+2$,$b=7n+5$,

当 $a^2>3b$ 时,$a^2-3b>0$.

$$\begin{aligned}\therefore a^2-3b&=(7m+2)^2-3(7n+5)\\&=49m^2+28m+4-21n-15\\&=7(7m^2+4m-3n-2)+3.\end{aligned}$$

得 a^2-3b 除以 7 余 3.

注 变形 a^2-3b 的目标,就是将它写成带余除法的一般式 $b=aq+r$,而我们关心的只是式中的 r 值.

例 3 23 个不同的正整数的和为 4845,问这 23 个数的最大公约数可能达到的最大值是多少? 写出你的结论,并说明理由.

解 设这 23 个不同的正整数为 $a_1,a_2,\cdots,a_{23}$ $(a_1<a_2<\cdots<a_{23})$,d 为它们最大公约数,则 $a_1=db_1,a_2=db_2,\cdots,a_{23}=db_{23}$.

所以 $4845=a_1+a_2+\cdots+a_{23}=d(b_1+b_2+\cdots+b_{23})$.

$b_1,b_2,\cdots,b_{23}$ 也是互不相等的正整数,且 $b_1+b_2+\cdots+b_{23}\geqslant 1+2+\cdots+23=276$.

所以 $4845\geqslant 276d$. 所以 $d\leqslant\dfrac{4845}{276}=17\dfrac{51}{92}$.

又因为 $4845=19\times17\times15$,

所以这 23 个不同的正整数的最大公约数的最大可能值是 17.

下面再证存在两两不等的 23 个正整数,它们的最大公约数恰好为 17.

不妨取 $a_1=17,a_2=2\times17,\cdots,a_{22}=22\times17,a_{23}=32\times17$,

则 $a_1+a_2+\cdots+a_{23}=17\times(1+2+\cdots+22)+17\times32=4845$,

而 $(a_1,a_2,\cdots,a_{23})=17$,

故这 23 个正整数的最大公约数的最大值恰好为 17.

注 此题型在以前各地竞赛试题中经常出现,考生往往能找出最大公约数的最大值,但缺少证明或验证的关键步骤.

例 4 设 a、b、c 是三个互不相等的正整数. 求证:在 a^3b-ab^3,b^3c-bc^3,c^3a-ca^3 中至少有一个数能被 10 整除.

证明 $a^3b-ab^3=ab(a^2-b^2)=ab(a+b)(a-b)$.

$b^3c-bc^3=bc(b^2-c^2)=bc(b+c)(b-c)$.

$c^3a-ca^3=ca(c^2-a^2)=ca(c+a)(c-a)$.

对 a,b,c 的奇偶性情况讨论可知，不论 a,b,c 的奇偶性如何，a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 均为偶数，即均能被 2 整除. 若 a,b,c 三数中有一个是 5 的倍数，则结论显然成立.

若 a,b,c 都不能被 5 整除，则 a^2,b^2,c^2 的个位数只能是 1,4,6,9.

所以在 a^2-b^2，b^2-c^2，c^2-a^2 的个位数中，必有 0 或 ±5.

即 a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 三数中至少有一个数能被 5 整除.

又因为 $(2,5)=1$，

所以在 a^3b-ab^3，b^3c-bc^3，c^3a-ca^3 中必至少有一个能被 10 整除.

注 整除问题是中学数学竞赛中的常见题型，解题应灵活运用整数的整除特征或根据需要将整数分类讨论.

例 5 已知一个七位自然数 $\overline{62xy427}$ 是 99 的倍数，试求 $950x+24y+17$ 的值.

解 因为 $99\mid\overline{62xy427}$，$(9,11)=1$，

所以 $9\mid\overline{62xy427}$，$11\mid\overline{62xy427}$.

所以 $6+2+x+y+4+2+7=21+x+y=18+(x+y+3)$ 是 9 的倍数.

所以 $9\mid(x+y+3)$，设 $x+y+3=9m$（m 为自然数），

因为 $0\leqslant x\leqslant9$，$0\leqslant y\leqslant9$，所以 $0\leqslant x+y\leqslant18$.

所以 $x+y=6$ 或 $x+y=15$.

又因为 $11\mid[(6+x+4+7)-(2+y+2)]$，即 $11\mid(x-y+13)$.

设 $13+x-y=11k$（k 为整数）.

因为 $-9\leqslant x-y\leqslant9$，

所以 $4\leqslant13+x-y\leqslant22$.

所以 $x-y=-2$ 或 $x-y=9$.

因为 $x+y$ 与 $x-y$ 奇偶性相同，

所以 $\begin{cases}x+y=6,\\x-y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+y=15,\\x-y=9.\end{cases}$（不合题意，舍去）

所以 $\begin{cases}x=2,\\y=4.\end{cases}$

所以 $950x+24y+17=2013$.

注 根据整数的性质结合不定方程或方程组进行分类讨论，是处理整数问题的行之有效的方法之一.

例 6 求所有的质数 p，使 $4p^2+1$ 和 $6p^2+1$ 都是质数.

解 (1) 当 $p=5k+1$ 时（k 为正整数，下同），

$4p^2+1=4(5k+1)^2+1=5(20k^2+8k+1)$，所以 $5\mid(4p^2+1)$.

当 $p=5k+4$ 时，同理知 $5\mid(4p^2+1)$.

(2)当 $p=5k+2$ 时，

$$6p^2+1=6(5k+2)^2+1=6(25k^2+20k+4)+1$$
$$=5(30k^2+24k+5).$$

所以 $5\mid(6p^2+1)$.

当 $p=5k+3$ 时，同理知 $5\mid(6p^2+1)$.

(3)当 $p=5k$ 时，只有 $k=1$，$p=5$ 为质数，

这时 $4p^2+1=101$ 为质数，$6p^2+1=151$ 也为质数.

综上所述，得 $p=5$.

注 根据分类思想，我们可以利用整数相除时出现的余数的情况，进行分类讨论，这是解决本题的关键.

例 7 今有物，不知其数，三三数之，剩二；五五数之，剩三；七七数之，剩二，问物几何？

分析 本问题是有一个数，被 3 除余 2，被 5 除余 3，被 7 除余 2，求此数. 利用带余除法表达式表示这个数，然后求出各除数 3、5、7 的最小公倍数 105，再令 105 与最小的自然数 0 相乘即可求出满足条件的最小整数.

解 设这物为 x，根据题意，得 $x=3a+2$，$x=5b+3$，$x=7c+2$.

$\because 3\times5\times7=105$，且 3、5、7 互质，所以最小公倍数为 105.

上三式变形为
$$\begin{cases}35x=105a+70, & ①\\ 21x=105b+63, & ②\\ 15x=105c+30. & ③\end{cases}$$

由②＋③－①，得 $x=105(b+c-a)+23$.

取 $b+c-a=0$，则 $x=23$.

注 这是我国古代一个典型的余数问题. 这类问题通常是先求出各除数的最小公倍数，然后写出要求数的表达式. 当出现加上一个常数，就可取与最小公倍数相乘的最小自然数 0；当出现一个负常数，可取这个乘数为 1、2…，直至常数为正数为止，$x=23$ 只不过是满足本例条件的最小正整数而已.

例 8 已知 a 是自然数，试说明 $5(a^2+3)$ 不是完全平方数.

分析 由完全平方数的个位数字只可能是 0、1、4、5、6、9，只要说明 a^2+3 的个位数字，不可能是 0 或 5 即可.

解 $\because a$ 是自然数，a^2 的个位数字只能是 0、1、4、5、6、9.

$\therefore a^2+3$ 的个位数字只能是 2、3、4、7、8、9.

也就是说，a^2+3 的个位数字，不可能是 0 或 5，a^2+3 中不含因数 5.

即可得知 $5(a^2+3)$ 不是完全平方数.

注 用个位数字来判断一个数是否为完全平方数，是判断完全平方数的基本方法.

例 9 求一个三位数 $\overline{abc}$（其中 a,b,c 都是正整数），使得由 a,b,c 组成的另外五个三位数之和恰好等于 3167.

解 由已知可得六个由 a,b,c 组成的三位数，除$\overline{abc}$外，还有$\overline{acb}$，$\overline{bac}$，$\overline{bca}$，$\overline{cab}$，$\overline{cba}$.
所以$\overline{acb}+\overline{bac}+\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{cba}=3167$.
所以$\overline{abc}+3167=222(a+b+c)$.
而从 100 到 999 的全部三位数，将它们依次加上 3167，得 $3167+100$，$3167+101$，$3167+102$，…，$3167+999$，其中，和为 222 的倍数有
$3167+163=222\times15$，$3167+385=222\times16$，
$3167+607=222\times17$，$3167+829=222\times18$.
显然，只有 385 符合要求，即 $3167+385=222\times(3+8+5)$.
故所求的三位数是 385.
注 列出关于 a,b,c 的不定方程，利用整数的性质求解.

例10 设 p,q 均为自然数，且$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{18}+\frac{1}{19}$. 求证：$29\mid p$.

证明 设 $a=10\times11\times\cdots\times19$.

$$\begin{aligned}\frac{p}{q}&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{19}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{18}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{19}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{9}\right)\\&=\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{19}\\&=\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{18}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{15}\right)\\&=29\left(\frac{1}{10\times19}+\frac{1}{11\times18}+\cdots+\frac{1}{14\times15}\right).\end{aligned}$$

所以 $ap=29q\cdot b$，其中 $b=a\left(\frac{1}{10\times19}+\frac{1}{11\times18}+\cdots+\frac{1}{14\times15}\right)$是整数.
因为 $29\mid a\cdot p$，且 $29\nmid a$，29 为质数，所以 $29\mid p$.

解题训练

一、选择题

1. 下列四个数中，只有一个是完全平方数，它是(　　).

A. 513231　　B. 121826　　C. 122530　　D. 625681

2. 设 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_9$ 均为正整数，且 $x_1<x_2<\cdots<x_9$，$x_1+x_2+\cdots+x_9=220$，则当 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5$ 的值最大时，x_9-x_1 的最小值是(　　).

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

3. 一个六位数$\overline{a1988b}$能被 12 整除，这样的六位数共有(　　).

A. 9 个　　B. 12 个　　C. 15 个　　D. 20 个

4. 已知两个质数 p、q，且 $p+q=21$，则$\frac{2q+1}{p}$的值为(　　).

A. $\frac{5}{19}$或$\frac{39}{2}$　　B. $\frac{9}{17}$或$\frac{17}{9}$　　C. $\frac{17}{13}$或$\frac{13}{17}$　　D. $\frac{23}{10}$或$\frac{21}{11}$

5. 若 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 为互不相等的正奇数，且满足 $(2005-x_1)(2005-x_2)(2005-x_3)(2005-x_4)(2005-x_5)=24^2$，那么，$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2$ 的末位数字是(　　).

A. 1　　　　B. 3　　　　C. 5　　　　D. 7

6. 设 $x*y=(x+1)(y+1)$，x^{*2} 定义为 $x*x$，则多项式 $3*(x^{*2})-2*x+1$，当 $x=2$ 时的值为(　　).

A. 19　　　　B. 27　　　　C. 32　　　　D. 38

二、填空题

7. 三位数 $\overline{abc}=a^2+1+(\overline{bc})^2$，则 $\overline{abc}=$______.

8. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{51}$ 都是正整数，$x_1<x_2<\cdots<x_{51}$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_{51}=1995$，当 x_{26} 在它的可以取得的值中达到最大时，x_{51} 可以取得的最大值是______.

9. 一堆火柴有 2010 根，甲、乙二人轮流取火柴(甲先取)，每次只允许取出 2^k 根火柴($k=0,1,2,\cdots$)，谁取到最后一根火柴谁胜，则______一定能取胜.

10. 能使 2^n+256 是完全平方数的正整数 n 的值为______.

11. 已知 p，$p+2$，$p+6$，$p+8$ 和 $p+14$ 都是质数，则这样的质数 p 共有______个.

12. 如果对于不小于 8 的自然数 n，当 $3n+1$ 是一个完全平方数时，$n+1$ 都能表示成 k 个完全平方数的和，那么 k 的最小值为______.

三、解答题

13. 已知 x,y 为整数，且 $5\mid(x+9y)$，求证：$5\mid(8x+7y)$.

14. 求不大于 60，且只有 10 个约数的正整数.

15. 已知定理"若三个大于 3 的质数 a,b,c 满足关系式 $2a+5b=c$，则 $a+b+c$ 是整数 n 的倍数". 试问：上述定理中的整数 n 的最大可能值是多少？并证明你的结论.

16. 证明：形如 $3n+2$ 的数不是完全平方数，其中 n 为正整数.

17. a_n 表示 7^n 的末两位数，求 $a_1+a_2+\cdots+a_{1990}$ 的值.

18. 一只青蛙在平面直角坐标系上从点$(1,1)$开始，可以按照如下两种方式跳跃：①能从任意一点(a,b)，跳到点$(2a,b)$或$(a,2b)$；②对于点(a,b)，如果 $a>b$，则能从(a,b)跳到$(a-b,b)$；如果 $a<b$，则能从(a,b)跳到$(a,b-a)$.

例如，按照上述跳跃方式，这只青蛙能够到达点$(3,1)$，跳跃的一种路径为：$(1,1)\to(2,1)\to(4,1)\to(3,1)$.

请你思考：这只青蛙按照规定的两种方式跳跃，能到达下列各点吗？如果能，请分别给出从点$(1,1)$出发到指定点的路径；如果不能，请说明理由.

(1)$(3,5)$；　(2)$(12,60)$；　(3)$(200,5)$；　(4)$(200,6)$.

19. 设 n 是正整数，$d_1<d_2<d_3<d_4$ 是 n 的 4 个连续最小的正整数的约数，若 $n=d_1^2+d_2^2+d_3^2+d_4^2$，求 n 的值.

20. 设 p 是大于 3 的质数，求证：$11p^2+1$ 是 12 的倍数.

第二节　实　数

知识提要

一、有理数

1. 定义：能够表示成分数$\dfrac{q}{p}$的形式（p,q 均为整数，且 $p\neq0$）的数.

2. 性质：

(1)顺序性，即对任意两个有理数 m,n，在 $m<n$,$m=n$,$m>n$ 三种关系中，有且只有一种关系成立.

(2)封闭性，即任意两个有理数的和、差、积、商(除数不能为零)仍为有理数.

(3)稠密性，即任意两个有理数之间仍存在着一个有理数.

(4)有理数也可以写成有限小数或无限循环小数的形式，形式上可与分数互化.

二、实数的概念及分类

1. 无限不循环小数叫做无理数. 有理数与无理数统称为实数.

2. $$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left\{\begin{array}{l}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{array}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\\text{无理数}\end{cases}$$

三、相反数

数 a 的相反数为 $-a$，0 的相反数为 0.

若 a,b 互为相反数，则 $a+b=0$，反之亦成立.

四、倒数

数 $a(a\neq0)$的倒数为$\dfrac{1}{a}$，0 没有倒数.

若 a,b 互为倒数，则 $ab=1$，反之亦成立.

(相反数、倒数都是指两数之间的关系)

五、绝对值

1. $$|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\0 & (a=0),\\-a & (a<0).\end{cases}$$

2. 性质：

(1)$|a|\geqslant0$.

(2)$|a|\geqslant a$，$|a|\geqslant -a$.

(3)若$|a|=|b|$，则 a,b 相等或互为相反数.

(4) $|a^2|=|a|^2=a^2$.

(5) $|ab|=|a||b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$ $(b\neq 0)$.

(6) $\big||x|-|y|\big|\leqslant|x+y|\leqslant|x|+|y|$,

$\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$.

六、实数 x 的整数部分 $[x]$ 和小数部分 $\{x\}$

1. 定义：设 x 为实数，$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，称为 x 的整数部分；$\{x\}=x-[x]$ 称为 x 的小数部分.

2. 性质：

(1) $[x]$ 是一个整数，$\{x\}$ 是 0 或正的纯小数.

(2) 对任何实数 x，有 $x=[x]+\{x\}$.

(3) 对任何实数 x，有 $x-1<[x]\leqslant x<[x]+1$.

(4) 若 n 为整数，则 $[x+n]=[x]+n$，$\{x+n\}=\{x\}$.

(5) x，y 为任意实数，若 $x=y$，则 $[x]=[y]$；若 $x<y$，则 $[x]\leqslant[y]$；若 $[x]<[y]$，则 $x<y$.

(6) x，y 为任意实数，$[x]+[y]\leqslant[x+y]$，$\{x\}+\{y\}\geqslant\{x+y\}$.

(7) $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，则 $[xy]\geqslant[x][y]$.

解题指导

例 1 求证：任何有理数的平方都不等于 2.

证明 假设有理数为 $\dfrac{q}{p}$（p，q 是互质的整数，$p\neq 0$）满足 $\left(\dfrac{q}{p}\right)^2=2$，

则有 $q^2=2p^2$，

所以 q^2 是 2 的倍数，所以 q 为偶数.

设 $q=2k$，则 $4k^2=2p^2$.

所以 p 也为偶数. 这与 p，q 互质矛盾.

所以假设不成立. 所以任何有理数的平方不等于 2.

注 任何有理数都可用分数形式 $\dfrac{q}{p}$（p，q 为互质的整数，$p\neq 0$）来表示，也可化为有限小数或无限循环小数来表示，因此在判断或证明中应充分利用这两种表示法.

例 2 计算 $\dfrac{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}}{\dfrac{1}{101^2-1^2}+\dfrac{1}{102^2-2^2}+\cdots+\dfrac{1}{150^2-50^2}}$.

解 原式 $=\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{100}\right)-2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{100}\right)}{\dfrac{1}{100\times 102}+\dfrac{1}{100\times 104}+\cdots+\dfrac{1}{100\times 200}}$

$$=\frac{(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100})-(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{50})}{\frac{1}{200}(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100})}$$

$$=\frac{\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100}}{\frac{1}{200}(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\cdots+\frac{1}{100})}$$

$$=200.$$

注 数值计算是中学数学的一个重要内容，同时也是中学竞赛中的常见题型，竞赛中出现的计算问题，一般不应硬算，而应当仔细观察算式的特点，找出规律，灵活运用有关法则，巧妙地计算出结果.

例 3 求证：$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)\text{个}1}\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}2}5}$是有理数.

证明 $\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)\text{个}1}\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}2}5=\underbrace{11\cdots1}_{(n-1)\text{个}1}\times10^{n+1}+\underbrace{22\cdots2}_{n\text{个}2}\times10+5$

$$=\frac{1}{9}(10^{n-1}-1)\times10^{n+1}+2\times\frac{1}{9}(10^{n}-1)\times10+5$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}-10^{n+1}+2\times10^{n+1}-20+45)$$

$$=\frac{1}{9}(10^{2n}+10\times10^{n}+25)$$

$$=\frac{1}{9}(10^{n}+5)^{2}.$$

所以，原式$=\sqrt{\frac{1}{9}(10^{n}+5)^{2}}=\frac{1}{3}(10^{n}+5)$是有理数.

注 要证所给数能表达成$\frac{q}{p}$（p,q 为互质的整数，$p\neq0$）的形式，其关键是证明被开方数是完全平方式.

例 4 证明循环小数 $2.61545454\cdots=2.61\dot{5}\dot{4}$是有理数.

分析 要说明一个数是有理数，其关键要看它能否写成两个整数比的形式.

证明 设 $x=2.61\dot{5}\dot{4}$， ①

两边同乘以 100 得

$100x=261.\dot{5}\dot{4}=261.54\dot{5}\dot{4}$. ②

②－①得

$99x=261.54-2.61=258.93$，

所以 $x=\frac{25893}{9900}$.

既然 x 能写成两个整数比的形式，从而也就证明了 $2.61\dot{5}\dot{4}$是有理数.