

电 路 分 析

(上 册)

清 华 大 学 电 力 系

1979.2.

第一章 网络拓扑

§ 1	网络拓扑概念	1
§ 2	关联矩阵	2
§ 3	回路矩阵	7
§ 4	支路的性质	12
§ 5	电路问题的求解	14
§ 6	树	18
§ 7	割集	20
*§ 8	构造回路矩阵B的一种方案	24
§ 9	等效网络概念	26
§ 10	网络添加转支路时的计算	28
§ 11	电阻网络的输入电阻及转移电阻的 拓扑解法	38
	习 题	47

第二章 富立叶变换

§ 1	何量的内积及分解	49
§ 2	富氏级数	51
§ 3	富氏级数的指数形式	54
§ 4	富氏变换	57
§ 5	单位冲激函数及阶跃函数的富氏变换	59
§ 6	富氏变换的一些性质	63
§ 7	富氏变换的实下及虚下及其关系	67
§ 8	应用富氏变换解线性电路过渡过程 介绍	68
§ 9	卷积。卷积定理	70
§ 10	能量谱	73
§ 11	周期函数的富氏变换	74
§ 12	采样值的富氏变换	75
§ 13	信号通过理想低滤波器	77
§ 14	离散富氏变换	78
§ 15	快速富氏变换	83
	习 题	89

第三章 拉氏变换

§ 1	过渡过程的起始条件	92
§ 2	由富氏变换导出单边拉氏变换	93
§ 3	常用函数的拉氏变换	94
§ 4	导数和积分的拉氏变换	95
§ 5	初值定理、终值定理及时间平移定理	98
§ 6	拉氏变换的反变换	99
§ 7	用拉氏变换解电路的过渡过程	102
§ 8	均匀长线方程	103
§ 9	终端开路无损长线接到直流电源	104
§ 10	无穷长无损耗电缆接到直流电源	106
*§ 11	进一步讨论传递函数实部与虚部的性质	111
§ 12	RC 网络函数的极点和零点	115
	习 题	126

第一章 网络拓扑

§1 网络拓扑概念

电路中有些规律，只与电路的拓扑结构有关，而和元件的具体性质无关。这种规律的典型例子是基尔霍夫定律。研究电路拓扑，需要图论的一些基本概念。

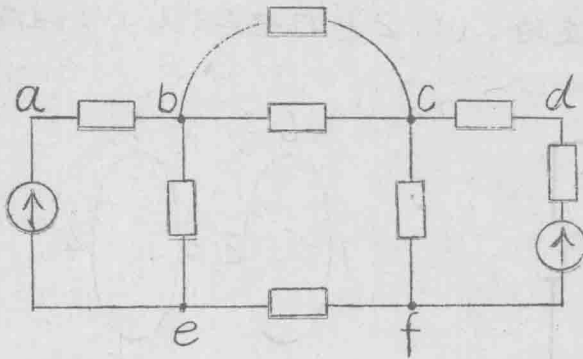


图 1(a)

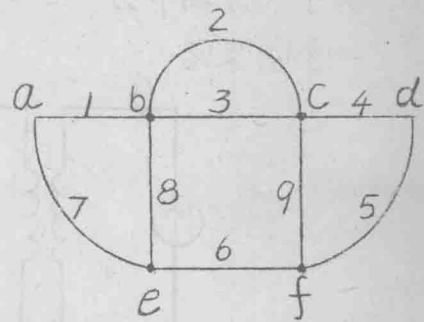


图 1(b)

设有图 1(a) 所示电路，它由若干个电路元件组成。如果忽视这些元件的具体性质，用一根线段代替每一个元件（凡二端元件都这样代替），就得到图 1(b) 的“图”，或称作“线图”。该图有六个结点（记作 $a, b, \dots$ ），七条支路（ $1, 2, \dots$ ）。任一条支路，一定终止于两个结点上，例如支路 3 与 b, c 结点连接。称支路 3 与结点 b （或 c ）相关联，也可以说成结点 b 与支路 3 相关联。在图中，任选两结点如 d, e ，从 d 出发，经支路 4 达结点 c ，经支路 3 达结点 b ，再经 8 即达 e 。这样，由三条不同支路（4, 3, 8），及四个不同点（ d, c, b, e ）组成的“子图”，便构成由结点 d 到结点 e 的一条“边路”。当然，支路（5, 6）也是由 d 到 e 的边路（如直连），首尾两点重合，则形成回路。回路是我们熟知的一个概念。由此可见，在回路这种子图中，任一结点和两条支路相关联（图 2）。

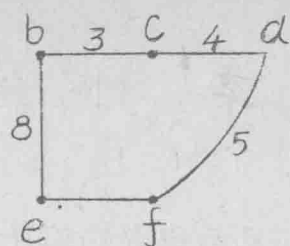


图 2

图3示一带互感的电路，与之对应的图画在图4中。该图有两个“分离下分”：一由支路(1, 2)与结点(a, b)组成另一个由支路

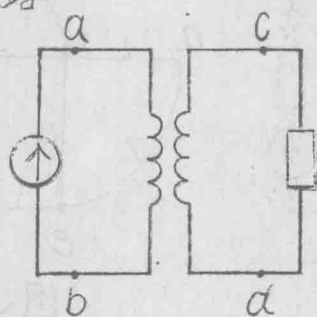


图 3

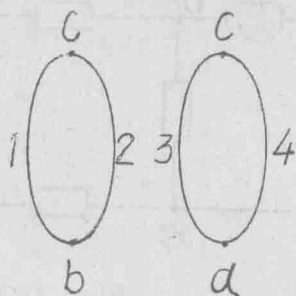


图 4

(3, 4)及结点c、d)组成。在不同下分的二结点之间没有边路，称这种图是不连接或不连通的。从电路角度看，从两分离下分中各取一结点，把它们作电的连接，对各处电流、电压并无影响。例如将b、d二结点连接后，那么上图也成为连通的了。我们以后只处理连通的图。

如在支路上标上箭头，则称为有向图。通常认为箭头所指方向即是支路电流、电压的正方向。

§2 关联矩阵

图的最基本的关系用所谓关联矩阵表示。

以图5为例，该图的支路数为 b ($b=7$)，结点数为 n ($n=4$)。于是可以作一个 $(n \times b)$ 的关联矩阵 A_a 。 A_a 的元

素全部由 0, +1, -1 组成。设将 A_a 的元素记作 a_{ij} , a_{ij} 的定义如下:

当支路 j 与结点 i 不关联时, $a_{ij} = 0$;

当支路 j 与结点 i 相关且离开 i 时, $a_{ij} = 1$;

当支路 j 与结点 i 相关且指向 i 时, $a_{ij} = -1$ 。

所以图 5 的关联矩阵如下:

$$A_a = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 & -1 & \\ -1 & 1 & 1 & & & & 1 \\ & & -1 & -1 & & 1 & -1 \\ & -1 & & 1 & -1 & & \end{pmatrix} \end{matrix}$$

在 A_a 中, 和结点 a 对应的第一行是 $(1, 0, 0, 0, 1, -1, 0)$, 这代表支路 1, 5 离开结点 a , 支路 6 指向结点 a , 支路 2, 3, 4, 7 与 a 不关联。

在结点 a 应用基尔霍夫第一定律, 得:

$$i_1 + i_5 - i_6 = 0$$

$$\therefore (1, 0, 0, 0, 1, -1, 0) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{pmatrix} = 0$$

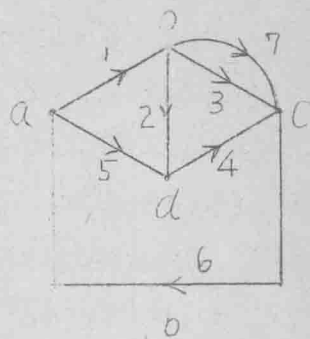


图 5

对全电路应用基尔霍夫第一定律得到：

$$AaI=0 \quad (1)$$

由电路理论知道，上述方程中只有任意三个是独立方程，第四个是不独立的。这反映在矩阵 Aa 里也有反映。由于任一支路必和两个结点相关联，而且每个有向支路一定指向一结点，离开另一结点。所以 Aa 矩阵中的每一列中，仅有两个不为 0 的元素，一个是 +1，一个是 -1。如果把 Aa 的所有行向量相加，结果一定是 0 (向量)。从而可以去掉 Aa 中的任一行，例如去掉 d 行。称去掉 d 行以后的矩阵为降阶关联矩阵 A ，以后也简称关联矩阵。

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 & -1 & \\ -1 & 1 & 1 & & & & 1 \\ & & -1 & -1 & & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (2)$$

矩阵 A 是 3×7 的，一般地说是 $(n-1) \times b$ 的。因此

$$AI=0 \quad (3)$$

便代表了独立的基尔霍夫第一定律的诸方程，所以矩阵 A 的秩是 $(n-1)$ ，在本例中， A 的秩为 3，去掉的结点 d，以后称作“地”或“地”。

作 A 的转置，得

$$A' = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

~ 4 ~

在 A' 中的每一行里，有一个 $+1$ 及一个 -1 ，如果少了一个，那它一定是处在去掉 d 列中的相应位置上。设指定结点电位为 $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c$ ，这样基尔霍夫第二定律自动满足，并且令 $\varphi_d=0$ ，则支路电压 $U_1, U_2, \dots$ 等可求出，例如：

$$U_1 = \varphi_a - \varphi_b = (1, -1, 0) \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{pmatrix}$$

$$U_4 = \varphi_d - \varphi_c = -\varphi_c = (0, 0, -1) \begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{pmatrix}$$

式中的 $(1, -1, 0)$ 及 $(0, 0, -1)$ 恰好是 A' 中的第一行和第四行。这不是偶然的，因为任何支路电压都等于与该支路关联两结点的电位差。所以得：

$$U = A'\varphi \quad (4)$$

式中 U 是支路电压向量， φ 是结点电位向量。

由此还可以导出特勒根定理。作数量积 $U'I$ ：

$$U'I = (U_1, U_2, \dots, U_b) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_b \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^b U_k I_k$$

$$U'I = (A'\varphi)'I = \varphi'(AI) = 0$$

$$\sum_{k=1}^b U_k I_k = 0 \quad (5)$$

式(5)即是特勒根定理。它说明支路电流，电压乘积之和恒为零。在直流电路里，这便是功率守恒定律的一种形式。这个定理也是只与电路拓扑结构有关而与元件性质无关的一种规律性。

上面指出，关联矩阵 A 的秩是 3，当然这~~并不~~意味 A 或 A' 中所有三阶行列式都是 0，试计称 A' 中第 1，第 3，第 6 行组成的行列式值：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

由于

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{bmatrix}$$

据式 (6)，可见 U_1, U_3, U_6 三个支路电压不是互相独立的。从图 5 看出，1, 3, 6 三条支路构成一个回路，根据基尔霍夫第二定律，三个支路电压的代数和为零，这三个支路电压的确不是一组独立电压，所以上述行列式之值为 0。由此可见，任取三个支路，如果它们组成的子图里至少有一个回路，则与之对应的三阶行列式必为零。在 A_a 矩阵里，任何四阶行列式之值都是零，这对应于这样一个事实：在图 5 的线图中，任意四条支路构成的子图里，至少包含一个回路。所以 A_a 的秩小于 4。

反之，如果取三条支路，它们不构成回路，则与之对应的行列式必不为零，因为不构成回路的诸支路电压是一组独立电压。此外，不为零的行列式值，成者是 +1，或者是 -1，例如图 5 中支路 1、2、3 不构成回路， A_a 中与之对应的行列式便是：

$$\begin{vmatrix} (1) & (2) & (3) \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (7)$$

~ 6 ~

前已说明，每一列中至多有2个不为零的元素，一是1，一是-1，但三列中至少有一列只含一个1或-1，否则行列式为0。式(7)中第2列便是这样的一列。按这列展开得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

剩下的二阶行列式中也有上述性质，所以展开后得：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) = -1$$

其最后结果必然是一串(+1)与(-1)的乘积，所以行列式之值不是1，就是-1。

还可以证明，关联矩阵A的任意阶的行列式，其值只能是1，-1或0，证明思路同上。

设该行列式每列有一+1及-1，显然，该行列式为0。如某一行全是0，则行列式也为零。如行列式不是0，必然某一行只有一个1。按这列展开，重复这个推理，便得到行列式之值必然是+1，-1或0的结论。

§3 回路矩阵

上节介绍了关联矩阵，这节介绍回路矩阵。仍以图5为例，并将其重转画在图6中。如图，支路(1, 2, 5)构成回路，称作回路 l_1 ，并选回路方向为a, b, d, a。记 l_1 为

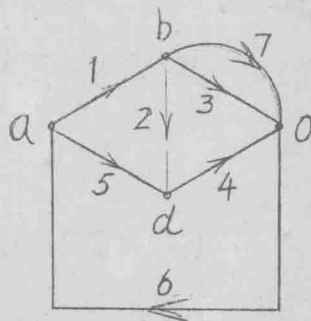


图 6

$$l_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

l_1 中元素 a_{ij} 定义如下:

支路 j 属于 l_1 且支路方向与回路方向一致时,

$$a_{ij} = 1$$

支路 j 属于 l_1 , 但支路方向与回路相反时,

$$a_{ij} = -1$$

支路 j 不属于 l_1 时,

$$a_{ij} = 0$$

同样, 支路 $(2, 3, 4)$ 、 $(2, 7, 4)$ 、 $(4, 5, 6)$ 、 $(1, 3, 6)$ 等都是回路, 分别称作 l_2 、 l_3 等。这样可以作出矩阵 Ba

$$Ba = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \\ l_5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & -1 & & \\ & -1 & 1 & 1 & & & \\ & -1 & & -1 & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & & 1 & & & 1 & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

据基尔霍夫第二定律知, 沿回路 l_1 的电压的代数和为零,

即:
$$U_1 + U_2 - U_5 = 0$$

式
$$(1, 1, 0, 0, -1, 0, 0) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_7 \end{pmatrix} = 0$$

对于 $l_2, l_3, \dots$ 等也可以列出类似方程。

因此得

$$B \alpha U = 0$$

从电路理论得知，这电路仅有四个独立回路，所以 $l_1, \dots, l_5$ 中，至少有一个是不独立的。由图6看出，在 l_1, l_2, l_4, l_5 这四个回路里，只有三个是独立的。例如去掉 l_5 ，便得到回路矩阵 B

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & & & -1 & & \\ & -1 & 1 & -1 & & & \\ & -1 & & -1 & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 & \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (8)$$

$$B U = 0 \quad (9)$$

B 是 4×7 的，一般讲来是 $(b-n+1) \times b$ 的，由于 B 的各行是线性无关的，所以 B 的秩等于 4。

挑选独立回路有多种方案，所以构造 B 矩阵的方案也很多，但 B 的秩却总是 $(n-b+1)$ 。

同一图中的关联矩阵 A 和回路矩阵 B 之间有下列关系：

$$A B' = 0 \quad (10)$$

以上图为例，选 A 中对应结点 (a) 的那一行与 B' 中对应 l_1 的那一列相乘，有

$$(1, 0, 0, 0, 1, -1, -1, 0) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 - 1 = 0$$

这是一个必然的结论，理由如下。因为在任一回路例如 l_1 中，与结点 a 关联的仅有两条支路（据第 1 节回路定义），即支路 1 与 5。则所设回路方向与所设支路方向的相对关系，无非下述两种（图 7），即支路方向一致或者有一个相反。
 都沿回路方向

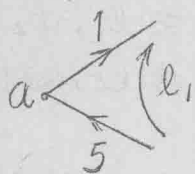


图 7(a)

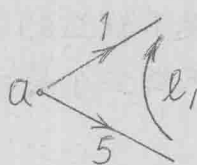


图 7(b)

例如在第一种情况下 <图 7(a)>，关联矩阵 A 中对应结点 a 的那一行（只写出与支路 1, 5 有关的元素）是：

$$\begin{matrix} 1 & 5 \\ a(1, & -1) \end{matrix}$$

而回路矩阵 B 中与 l_1 对应的一行为

$$\begin{matrix} 1 & 5 \\ l_1(1, & 1) \end{matrix}$$

即：当回路方向与支路方向皆一致（ l_1 中的元素都是 +1）时，必有一个支路方向指向 a ，另一个的方向离开 a （即 a 中元素是 1 与 -1）。

$$(1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

另一种情况，不难类似地推论出来。这样就证明了式 (10) 的正确性。

现在在每一个所选独立回路指定一回路电流（图 8），其方向与回路方向相同。

以支路电流 I_2 为例，因有三个回路电流 I_1, I_2, I_3 经支路 2，故有：

~10~

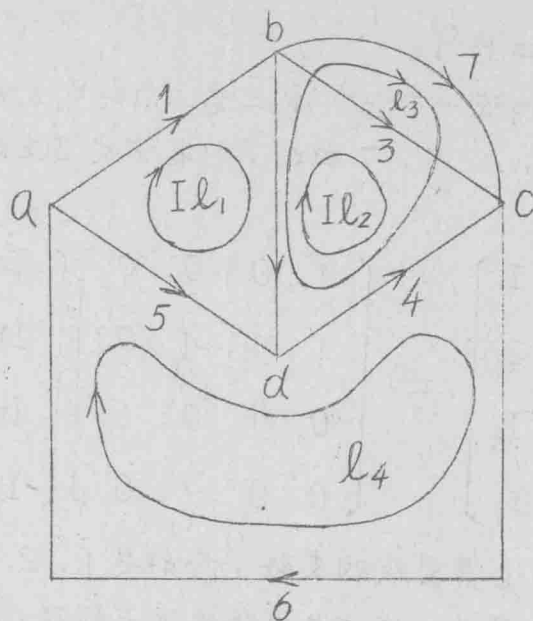


图 8

$$I_2 = I_{l_1} - I_{l_2} - I_{l_3}$$

考察矩阵 B 的第 2 列 <式(8)> :

$$\begin{matrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} (2) \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

该列中的元素，由回路是否包含支路 2 决定，也就是说由回路电流是否经支路 2 决定。至于取 +1 或 -1，则决定于回路（即回路电流）方向与支路 2（即支路电流 I_2 ）方向是否一致。由此得出结论：

$$I_2 = (1, -1, -1, 0) \begin{pmatrix} I_{l_1} \\ I_{l_2} \\ I_{l_3} \\ I_{l_4} \end{pmatrix}$$

一般地说：

$$I = B' I_e \quad (11)$$

至此，可以讨论一下 B' 中任意四阶行列式是否为零的条件。
设在 B' 中取 1、2、3、7 四行，则它决定了支路 1、2、3、7 中的支路电流：

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{e1} \\ I_{e2} \\ I_{e3} \\ I_{e4} \end{bmatrix} \quad (12)$$

从图 8 看出，与 b 点关联的支路，恰好是 1、2、3、7 四支路。据基尔霍夫第一定律，这四个支路电流是线性相关的。所以式 (12) 中的四个方程，或式中四阶矩阵的行列式值为零。的确，因第四行全是零元素，是不独立方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

一般地讲， B' 中 ^(式) (B_a) 任意阶的行列式，如果由对应于一组包含不独立电流在内的诸列（或行）组成，则该行列式为 0，只有与互相是不独立电流对应的行（或列）组成的行列式，其值才不为零。

§4 支路的性质

以上仅结合图的本身的特点说明了与电路元件性质无关的基尔霍夫定律。求解具体电路，还必须计及电路元件本身的特点。

对于支路 k 的二端元件 (图 9), 一般地可以写出:

$$U_k = E_k + R_k (\dot{I}_k + J_k)$$

即 $U_k = (E_k + R_k J_k) + R_k \dot{I}_k$

或 $\dot{I}_k = -(J_k + G_k E_k) + G_k U_k$

$$G_k = 1/R_k$$

式中, E_k, J_k 为电压源和电流源。在这里, 不把电压源和电流源单独看成一个支路, 而是把它们和电阻 R_k 当成一个整体。对于所有支路, 可列出下式:

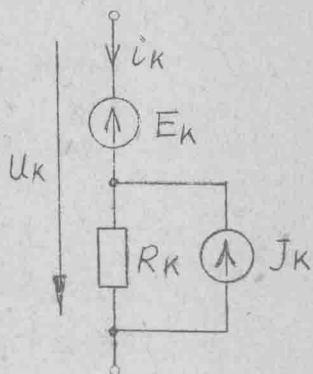


图 9

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_k \\ \vdots \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R_k & \\ & & & & \ddots \\ 0 & & & & & R_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \vdots \\ \dot{I}_k \\ \vdots \\ \dot{I}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & R_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ \vdots \\ I_k \\ \vdots \\ I_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 \\ \vdots \\ E_k \\ \vdots \\ E_b \end{bmatrix}$$

或记作

$$U = RI + (E + RJ) \quad (13)$$

类似有 $I = GU - (J + GE) \quad (14)$

如果存在受控电源, 例如晶体管等效电路 (图 10) 可列出:

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_p \\ \dot{I}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ \beta G_p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_p \\ U_g \end{bmatrix}$$

这时, G 矩阵便不是对角线矩阵, 它的形式如下:

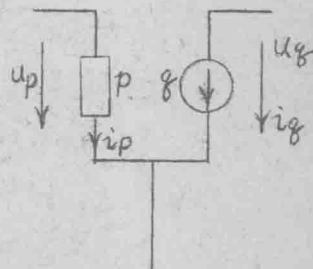


图 10

