21世纪高等学校规划教材

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

张峰荣 主编

李明芳 全贤唐 范东梅 副主编

中国电力出版社

http://jc.cepp.com.cn

21世纪高等学校规划教材

GAILVLUN YU SHULI TONGJI

概率论与数理统计

主　编　张峰荣
副主编　李明芳　全贤唐　范东梅
编　写　良　燕　张　洪　田秋野
主　审　刘　红

中国电力出版社
http://jc.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书是根据远程教育、函授教育等各类成人教育及高职高专教育概率论与数理统计课程教学基本要求编写的。在内容安排上循序渐进，由浅入深，通俗易懂，注重学生水平的可接受性，便于自学。全书共七章，内容包括随机事件与概率、随机变量及分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定律、样本及其分布、参数估计、假设检验。每节配有适量习题，书末附有习题答案，供读者参考；每章设有知识总结和解题方法总结，以指导学生较好地掌握本章的知识点，巩固所学知识；每章的自测题，可供学生检查学习效果。

本书主要适用于远程教育、函授教育等各类成人教育及高职高专院校各个专业的学生，也可以作为普通高等教育经济类和文科类的教材或参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 张峰荣主编. —北京：中国电力出版社，2010.8
21 世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-5123-0620-2

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 123208 号

中国电力出版社出版、发行
（北京三里河路 6 号 100044 http://jc.cepp.com.cn）
航远印刷有限公司印刷
各地新华书店经售
*
2010 年 8 月第一版 2010 年 8 月北京第一次印刷
787 毫米×1092 毫米 16 开本 9.25 印张 216 千字
定价 15.00 元

前　言

数学作为工程类、经济类重要的基础理论课，受到人们的广泛关注，而教材，在教学实践中，直接关系到教学质量，在引导教学教法、理论联系实际、指导实践等方面具有重要作用。为了培养出具有一定科学素质和职业技能的优秀人才，需要提供适合其发展的教材。本教材按照成人教育概率论与数理统计课程教学基本要求提出的“联系实际，深化概念，加强计算，注重应用，适度论证，重视创新，提高素质”为指导思想，紧密衔接初等数学，从特殊到一般，从具体到抽象；注重基本概念、基本定理；从实际例子出发，深入浅出。本教材具有以下特点：

（1）由于远程、函授、业余大学等成人教育的学生的数学基础相差比较大，所以注重高等数学与初等数学的紧密衔接。这样使教材具有系统的伸缩性和可选性，以适应不同层次教学的实际需要。

（2）由于课堂教学的学时数对于远程、函授等成人教育的学生相对较少，所以教材内容与课后的训练以方便学生的自修为主要原则之一，目的是发挥学生作为学习主体的积极作用。这样，每章后面配有小结，归纳了学习内容，给出解题技巧，使学生的学习具有系统性，发挥其创造力；每章设有自测题，可供学生自己检查学习效果。

（3）为了提高学生的创造力，在书后习题的编写上体现出多样性。一是题型的多样性：题型涉及单项选择题、填空题、计算题、应用题、证明题等；二是内容的灵活性：习题中有强化基础知识的内容，也有强化掌握一般知识的内容，及训练技巧和综合解决问题能力的内容。

（4）数学是为培养技能型人才服务的，这样教材的内容要体现工作实践的应用性，所以教材中选择了较多的应用问题；理论验证性的推导内容，在不影响后继课和实际需要的情况下，适量进行了缩减。带“*”号部分的内容可根据不同专业选择使用。

本教材由北京科技大学张峰荣担任主编，由李明芳、全贤唐、范东梅任副主编，北京科技大学的良燕、北京联合大学的张洪，北京城市学院的田秋野参加了本书的编写工作。全书由首都医科大学刘红担任审稿人。

由于编者水平有限，书中一定有一些不足之处，希望大家批评指正。

编　者

2010 年 8 月

目　录

第1章　随机事件与概率

自然界与人类社会发生的现象是各种各样的。有一类现象，在一定条件下一定发生或必然不发生。例如，在标准大气压下，水在100℃沸腾；在30℃的房间里，冰会融化等，这类现象称为确定性现象。另外一类现象，在一定条件下可能发生，也可能不发生。例如，一个盒子里面有10个外形完全相同的球，5个白色的，5个黑色的，摇匀后任取一个，可能是白色的，也可能是黑色的；在路边看见对面过来的汽车的车牌尾号可能是单号，也可能是双号等。这类现象称为随机现象。

在随机现象中，虽然无法由给定的条件准确预报结果，但是，经过人们长期的观察和研究发现，并不是无规律可循，而是呈现出某种规律性。也就是结果的不能预知，只是对一次或少数几次试验而言的，但在相同条件下进行大量重复试验时，试验的结果就会呈现出某种规律性。例如，上面例子中取球的问题，随着进行试验次数的增加，取到白球的可能性越来越接近$\frac{1}{2}$。这种大量重复性试验中，试验结果呈现的规律性，称为统计规律性。概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门学科。

概率论与数理统计在自然科学、工程技术和社会科学的众多领域中有着广泛地应用，随着计算机的普及，概率论与数理统计成为经济、管理、金融、保险、生物、医学等理论与研究的重要工具。

1.1　随机事件与样本空间

一、随机事件的基本概念

为了研究随机现象，就要对客观事物进行观察，观察的过程称为试验。概率论中所讨论的试验具有下列特点：

（1）在相同的条件下试验可以重复进行。

（2）每次试验的结果具有多种可能性，但是在试验之前可以知道试验的所有可能结果。

（3）在每次试验之前不能预知该次试验将出现哪个可能结果。

具有上述特点的试验称为随机试验。

在一定条件下进行试验的每一个可能结果称为随机事件（简称事件），一般用大写字母A,B,C等表示。例如，在投掷一颗骰子试验中，其中出现“点数为1”、“点数为2”、“点数不大于3”等都是随机事件。

特别地，在一次试验中一定会出现的结果和必然不出现的结果也称为事件。在一次试验中一定会出现的结果称为必然事件，记为Ω；在一次试验中必然不出现的结果称为不可能事件，记为Φ。例如，投掷一颗骰子试验中，其中出现“点数为不大于7”是一个必然事件；“点数小于1”，“点数大于7”等都是不可能事件。

随机试验中可能发生的最简单的事件称为基本事件；由若干个基本事件组合而成的事件

称为复合事件。例如，在投掷一颗骰子试验中，其中出现“点数为 1”、“点数为 2”，都是基本事件；而“点数不大于 3”则是复合事件。

由一个试验的全部基本事件构成的集合称为基本事件组或样本空间，记为Ω；样本空间的每一个基本事件也称为样本点。例如，在投掷一颗骰子试验中，样本空间为

$$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

其中，1，2，3，4，5，6 都是样本点，分别表示点数为 1，点数为 2，…，点数为 6。

二、事件与集合的关系

事件与集合的关系如下：

（1）对于试验的每一个基本事件，用只包含一个元素的单点集表示。

例如，在投掷一颗骰子的试验中，事件“点数为 1”，记为集合$\{1\}$。

（2）由若干个基本事件组成的复合事件，用包含若干个相应元素的集合表示。

例如，在投掷一颗骰子的试验中，事件“点数为不大于 3”，记为集合$\{1,\ 2,\ 3\}$。

（3）所有基本事件构成的集合是必然事件，可对应集合中的全集，仍然用Ω表示。

例如，在投掷一颗骰子的试验中，必然事件是$\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$；在集合中当作全集处理。

（4）不可能事件对应集合中的空集，仍然表示为$\varnothing$。

称某事件发生当且仅当属于该集合的某个样本点在试验中出现。

这样事件之间的关系与运算就可以用集合论的关系来解释了；由于集合与事件之间存在这样的对应关系，所以事件之间的关系与运算也可以用集合论中的文氏图来表示。

三、事件的关系与运算

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即属于 A 的每一个样本点也都属于事件 B，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 含于事件 B，记为

$$A\subset B \text{ 或 } B\supset A$$

2. 事件的相等

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，事件 B 发生也必然导致事件 A 发生，称事件 A 与事件 B 相等，即事件 A 与事件 B 中的样本点完全相同，记为

$$A=B$$

3. 事件的和（并）

事件 A 和事件 B 至少有一个发生，称为事件 A 和事件 B 的和事件，它是由属于事件 A 和 B 的所有样本点构成的集合，记为

$$A+B \text{ 或 } A\cup B$$

n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生是一个事件，S 称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的和，记为

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

可列个事件 A_1，A_2，…，A_n 至少有一个发生是一个事件，称为可列个事件的和，记为

$$\sum_{i=1}^{\infty}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots \text{ 或 } \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$$

4. 事件的积（交）

事件 A 和事件 B 同时发生，称为事件 A 和事件 B 的积事件，它是由属于事件 A 和 B 的基本事件构成的集合，记为

$$AB \text{ 或 } A\cap B$$

n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生是一个事件，称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的积，记为

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1A_2\cdots A_n \text{ 或 } \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1A_2\cdots A_n$$

5. 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生，称为事件 A 与事件 B 的差事件，它是由属于事件 A 而不属于事件 B 的基本事件构成的集合，记为

$$A-B$$

6. 互不相容

事件 A 与事件 B 不能同时发生，称为事件 A 与事件 B 互不相容或互斥。

若事件 A 与事件 B 互不相容，则 $AB=\varnothing$；反之，如果 $AB=\varnothing$，则事件 A 与事件 B 互不相容。

n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，它们两两互不相容是指对 $i\neq j$，有 $A_iA_j=\varnothing(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

显然，基本事件之间是互不相容的。

7. 对立事件

事件 A 不发生称为事件 A 的对立事件或逆事件，它是由样本空间中不属于事件 A 的所有事件构成的集合，记为 $\overline{A}$。

显然，事件 A 与事件 $\overline{A}$ 为对立事件，满足

$$A+\overline{A}=\Omega,\quad A\overline{A}=\varnothing$$

8. 完备事件组

n 个事件 A_1，A_2，…，A_n，满足：

（1）$A_iA_j=\varnothing \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ i\neq j$。

（2）$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$。

称事件组 A_1，A_2，…，A_n 为完备事件组。

上述事件之间的关系与运算可以用图 1-1 表示。

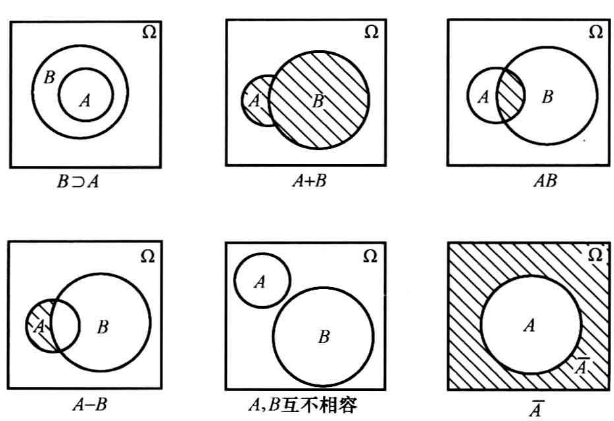

图 1-1

【例 1-1】 掷一颗骰子，观察出现的点数，A 表示事件“点数为奇数”，B 表示事件“点数小于 5”，C 表示事件“小于 5 的偶数点”，用集合的列举法表示下列事件：Ω，A，B，C，$A+B$，$A-B$，$B-A$，AB，AC，$C-A$，$\overline{A}+B$，$A+B+C$。

解 $\Omega=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ $\quad A=\{1,\ 3,\ 5\}$ $\quad B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

$C=\{2,\ 4\}$ $\quad A+B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ $\quad A-B=\{5\}$

$B-A=\{2,\ 4\}$ $\quad AB=\{1,\ 3\}$ $\quad AC=\varnothing$

$C-A=\{2,\ 4\}$ $\quad \overline{A}+B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$ $\quad A+B+C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

【例 1-2】 某人射击，用 A_i（$i=1,\ 2,\ 3$）表示第 i 次击中目标。用事件的运算式表示下列事件：

（1）三次都击中目标。

（2）三次中至少有一次击中目标。

（3）三次中恰好有两次击中目标。

（4）三次中最多有一次击中目标。

（5）第一次击中目标且第二次未中。

（6）第一次、第二次都击中目标且第三次未中。

解 （1）$A_1A_2A_3$。 （2）$A_1+A_2+A_3$。 （3）$A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$。

（4）$\overline{A_1A_2}+\overline{A_1A_3}+\overline{A_2A_3}$ 或 $\overline{A_1A_2}A_3+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2A_3}+A_1A_2A_3$。

（5）A_1-A_2 或 $A_1\overline{A_2}$。 （6）$A_1A_2\overline{A_3}$。

用事件的运算式表示同一个事件时，表示方法不一定唯一。

【例 1-3】 某人射击，用 A_i（$i=1, 2, 3$）表示第 i 次击中目标。用文字描述下列事件：

（1）$\overline{A_1A_2}A_3$。（2）$\overline{A_2}$。（3）A_3-A_1。（4）$\overline{A_1}A_2A_3$。（5）$\overline{A_1+A_2}$。（6）$\overline{A_1A_2}$。

解 （1）第一次、第二次未中，第三次击中目标。

（2）第二次未击中目标。

（3）第一次未中，第三次击中目标。

（4）第一次未中，第二次、第三次击中目标。

（5）第一次、第二次都未击中目标。

（6）前两次中至少有一次未击中目标。

习 题 1.1

1．单项选择题

（1）设 A、B、C 为 3 个事件，则 A、B、C 中至少有一个发生可以表示为（　　）。

A．ABC B．$A+B+C$ C．$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ D．$A(B+C)$

（2）从有 3 个红球和 2 个白球的袋子中任取 2 个球，记 A=“取到 2 个白球”，则 $\overline{A}$=（　　）。

A．取到 2 个红球 B．至少取到一个白球

C．没有取到白球 D．至少取到一个红球

（3）下列说法正确的是（　　）。

A．若事件 A、B 互不相容，则 A、B 为对立事件

B．事件 A、B 至少有一个发生的对立事件是 A、B 都不发生

C．若事件 A、B 互不相容，事件 B、C 互不相容，则事件 A、C 互不相容

D．事件 A 发生，而 B 不发生可表示为 $A+\overline{B}$

2．填空题

（1）事件 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，事件 $B=\{1,\ 2,\ 6,\ 7\}$，则事件 $A-B=$ ______，事件 $AB=$ ______。

（2）以 A 表示"甲厂家盈利且乙厂家亏损"，其对立事件 $\overline{A}$ 表示________。

3．写出下列事件的样本空间：

（1）某射手射击 10 次，记录命中的枪数。

（2）某射手射击，命中为止，记录射击的枪数。

（3）一批电子元件抽取一只，测量它的使用寿命，其使用寿命不超过 1000h。

4．设样本空间 $\Omega=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，事件 $A=\left\{x\left|\frac{1}{2}<x\leqslant 1\right.\right\}$，事件 $B=\left\{x\left|\frac{1}{4}\leqslant x<\frac{3}{2}\right.\right\}$，写出下列事件：

（1）$\overline{A}B$。（2）$\overline{A}+B$。（3）$\overline{AB}$。

5．某箱内有 10 枝红玫瑰，10 枝白玫瑰，任取 10 枝，说明下列各对事件的关系：

（1）10 枝全是红玫瑰与只有一枝白玫瑰。

（2）10 枝全是红玫瑰与全是白玫瑰。

（3）10 枝全是红玫瑰与至少有一枝白玫瑰。

（4）10 枝全是红玫瑰与红玫瑰数大于 3。

6．同时投掷 2 颗骰子，x、y 分别表示第一、第二颗骰子出现的点数，设事件 $A=$"两颗骰子出现点数之和为奇数"，$B=$"点数之差为 0"，$C=$"点数之积不超过 20"，用样本点的集合表示事件 $B-A$、BC、$B+\overline{C}$。

7．某人投篮 5 次，设 $A_i=\{$第 i 次投中目标$\}$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$，$B=$"5 次中投中次数大于 2"，用文字叙述下列事件：

（1）$A=\sum_{i=1}^{5}A_i$。（2）$\overline{A}$。（3）$\overline{B}$。

8．在数学系的学生中任选一名学生，设事件 $A=$"被选的学生是女生"，$B=$"被选的是一年级的学生"，$C=$"被选的学生是三好学生"，则

（1）叙述 $AB\overline{C}$ 的含义。

（2）在什么条件下，$ABC=C$？

（3）在什么条件下，$C\subset B$？

（4）在什么条件下，$\overline{A}=B$？

1.2　概　　率

概率论研究的是随机现象量的规律性。除了必然事件和不可能事件以外，一般的随机事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，虽然我们不能预先知道它是否发生，但是它们有发生可能性大小之分。因此需要定量地描述这种可能性的大小。对一个事件，用一个适当的数，表示事件在一次试验中发生的可能性的大小，这个数就是事件的概率。概率是概率论中

最基本的概念之一。

一、概率的定义

1. 概率的统计定义

随机事件在一次试验中是否发生具有不确定性，但在大量重复试验中，随机事件发生的可能性大小是稳定的，具有统计规律性。随机事件的这一特性可以从它的频率变化规律反映出来。在 n 次重复试验中，随机事件 A 发生的次数 m（称为频数）与试验次数 n 之比 $\dfrac{m}{n}$ 称为事件 A 发生的频率。

大量统计资料表明，当试验次数 n 较小时，随机事件 A 发生的频率 $\dfrac{m}{n}$ 是一个不稳定的值，但是随着试验次数 n 的增加，事件 A 的频率越来越稳定于某个定值。

历史上，有些人做过成千上万次投掷硬币的试验。表 1-1 列出他们试验的记录。

表 1-1

试验者	投掷次数 n	正面出现的频数 m	正面出现的频率 m/n
德·摩尔根	2048	1061	0.518
蒲丰	4040	2048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6019	0.501 6
	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

这种在多次试验中，事件频率稳定性的统计规律，便是概率这一概念的经验基础，而所谓某事件发生可能性的大小，就是这个频率的稳定值。

定义 1.1 在不变的条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动，且一般情况下，n 越大，摆动的幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$。

数值 p 就是在一次试验中对事件 A 发生可能性大小的数量的描述。例如，用 0.5 来描述投掷一枚均匀的硬币出现“正面”的可能性。

频率是概率论的经验基础，但并不是说概率决定于试验。一个事件发生的概率完全决定于事件本身的结构，是先于试验而客观存在的。实际上，人们是采用一次大量试验的频率或一系列频率的平均值作为 $P(A)$的近似值的。概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的，但并不能用这个定义去计算 $P(A)$，因为我们不可能对每一个事件都做大量的重复试验，从而得到频率的稳定值。另外，从数学角度看，有些说法也不严密，不便于理论上进行研究。

2. 概率的古典定义

直接计算事件的概率有时是非常困难的，甚至是不可能的，仅在某些特殊情况下，才可能计算事件的概率。注意下面类型的试验：

（1）投掷一枚骰子，观察出现的点数，可能出现 1、2、3、4、5、6 点，并且每个结果出现的可能性相同。

（2）100 个同型号的鼠标，其中有 5 个废品，从中抽取 3 个，共有 C_{100}^{3} 种不同的可能抽取结果，并且任意 3 个鼠标被抽到的可能性相同。

以上两个试验，具有以下共同的特点：

1）每次试验只有有限个可能的试验结果，即组成试验的基本事件总数为有限的；

2）每次试验中，每个基本事件发生的可能性大小相同。

具有上述特点的试验称为古典概型试验，它的数学模型称为古典概型。

对于古典概型，可以用下面的方法直接计算事件的概率。

定义 1.2 若试验结果由 n 个基本事件 A_1，A_2，…，A_n 组成，这些事件的出现具有相等的可能性，而事件 A 由其中某 m 个基本事件组成，则事件 A 的概率是

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{中包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n}$$

这里，A_1，A_2，…，A_n 构成一个完备事件组。

从概率的定义出发，可以得到如下概率的性质：

（1）任何事件 A 的概率不小于零，不大于 1，即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

（2）必然事件Ω的概率等于 1，即 $P(\Omega)=1$。

（3）不可能事件$\varnothing$的概率等于 0，即 $P(\varnothing)=0$。

【例 1-4】 袋中装有 5 个白球，3 个黑球，从中任取 2 个球，计算：

（1）取到的 2 个球都是白球的概率。

（2）取到的 2 个球，1 个是白球，1 个是黑球的概率。

解 设事件 A、B 分别表示“取到的 2 个球都是白球”和“1 个是白球，1 个是黑球”。

组成试验的基本事件总数为 C_8^2，事件 A 所包含的基本事件数为 C_5^2，事件 B 所包含的基本事件数为 $C_5^1C_3^1$，则

（1）所求概率为

$$P(A)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5\times 4}{8\times 7}=\frac{5}{14}$$

（2）所求概率为

$$P(B)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{5\times 3}{\frac{8\times 7}{2}}=\frac{15}{28}$$

【例 1-5】 袋中装有 4 个白球，3 个黑球，无放回地连续取 2 个球，计算：

（1）第一次取到白球，第二次取到黑球的概率。

（2）第一次、第二次都取到黑球的概率。

解 设事件 A、B 分别表示“第一次取到白球，第二次取到黑球”和“第一次、第二次都取到黑球”，组成试验的基本事件总数为 7×6，事件 A 所包含的基本事件数为 4×3，事件 B 所包含的基本事件数为 3×2，则

（1）所求概率为

$$P(A)=\frac{4\times 3}{7\times 6}=\frac{2}{7}$$

（2）所求概率为

$$P(B)=\frac{3\times 2}{7\times 6}=\frac{1}{7}$$

【例 1-6】 两封信随机地投入 4 个有标号 1、2、3、4 的邮筒，试求：

（1）第二个邮筒恰好投入一封信的概率。

（2）第一个邮筒无信的概率。

解 设事件 A、B 分别表示“第二个邮筒恰好投入一封信”，“第一个邮筒无信”，组成试验的基本事件总数为 4^2，事件 A 所包含的基本事件数为 2×3，事件 B 所包含的基本事件数为 3^2，则

（1）所求概率为

$$P(A)=\frac{2\times3}{4^2}=\frac{3}{8}$$

（2）所求概率为

$$P(B)=\frac{3^2}{4^2}=\frac{9}{16}$$

二、概率的运算法则

1. *加法法则*

加法法则：两个互斥事件 A、B 之和的概率等于它们概率的和，即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

这个法则表达了概率的最基本特性：可加性。它是从大量的实践经验中概括出来的，成为我们研究概率论的基础与出发点。由加法法则可以得到以下几个重要结论：

（1）如果 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

这个性质称为概率的有限可加性。同样地，如果有可列个事件 A_1，A_2，…，A_n 两两互不相容，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

（2）n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 构成一个完备事件组，则它们概率之和等于 1，即

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1$$

特别地，两个对立事件和的概率等于 1，即

$$P\left(A+\overline{A}\right)=1$$

经常使用它的等价形式

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)$$

（3）如果 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

（4）对任意两个事件 A、B，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

这个公式也称为广义加法公式，它可以推广到任意有限个事件的和。例如

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

【例 1-7】 一个袋中装有大小相同的 7 个球，4 个是白球。从中一次抽取 3 个，试求：

（1）至少有一个白球的概率。

（2）至少有 2 个白球的概率。

解 设事件 A_i 表示抽到的 3 个球中有 i 个白球$(i=0,1,2,3)$，则

至少有一个白球的概率为

$$P(A_1+A_2+A_3)=1-P(A_0)=1-\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{34}{35}$$

至少有 2 个白球的概率为

$$P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{C_4^2C_3^1}{C_7^3}+\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{22}{35}$$

【例 1-8】 若 $P(A)=\frac{1}{2},P(B)=\frac{1}{3},P(AB)=\frac{1}{6}$，试求：

（1）$P\left(\overline{AB}\right)$。

（2）$P\left(\overline{A+B}\right)$。

解 （1）由性质 2，可得

$$P\left(\overline{AB}\right)=1-P(AB)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

（2）由性质 2 与性质 4 可得

$$P\left(\overline{A+B}\right)=1-P(A+B)=1-\left(P(A)+P(B)-P(AB)\right)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3}$$

2. 条件概率与乘法法则

定义 1.3 在事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的概率称为事件 A 在给定条件 B 下的条件概率，记为 $P\left(A|B\right)$。

这里只研究作为条件的事件 B 的概率 $P(B)\neq 0$ 的情况。

相应地，把 $P(A)$ 称为无条件概率。

【例 1-9】 某种同规格的仪器，甲厂产品占 70%，乙厂产品占 30%，甲厂产品的合格品率为 95%，乙厂产品的合格品率为 80%。若用事件 A 和 $\overline{A}$ 分别表示甲、乙两厂的产品，B 表示产品为合格品，写出题中有关事件的概率，并求 $P\left(\overline{B}|A\right)$，$P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)$。

解 由题意可知：

$$P(A)=70\%,\ P\left(\overline{A}\right)=30\%,\ P\left(B|A\right)=95\%,\ P\left(B|\overline{A}\right)=80\%$$

进一步可知：

$$P\left(\overline{B}|A\right)=5\%,\ P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)=20\%$$

由此可见，事件 $B|A$ 的对立事件并不是 $\overline{B}|\overline{A}$，而是 $\overline{B}|A$；同样地，$B|\overline{A}$ 的对立事件为 $\overline{B}|\overline{A}$。

由于条件概率也是概率，所以，无条件概率的运算性质与运算法则同样适用于条件概率。

【例 1-10】 某合唱团有 100 名同学参加，其中男生（用事件 A 表示）有 80 人，女生 20 人。来自北京的（以事件 B 表示）有 20 人，其中女生 8 人。

写出下列事件概率：$P(A)$；$P(B)$；$P(AB)$；$P\left(B|A\right)$；$P\left(A|B\right)$；$P\left(\overline{B}|\overline{A}\right)$。

解 $P(A)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$， $P(B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

$P(AB)=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$， $P(B|A)=\frac{12}{80}=\frac{3}{20}$

$P(A|B)=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$， $P(\overline{B}|\overline{A})=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

由例 1-10 可以看出

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\quad P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

上面的公式是大量实践中总结出来的普遍规律，是一个经验公式，于是有下面的乘法法则。

乘法法则：两个事件 A 与 B 积的概率等于事件 A（或 B）的概率（其概率不为零）乘以以事件 A（或 B）为条件下事件 B（或 A）的概率，即

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \qquad （若 P(A)\neq 0）$$

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \qquad （若 P(B)\neq 0）$$

关于 n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 的乘法法则为

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

【例 1-11】 袋中装有 4 个白球，3 个黑球，无放回地连续取 2 个球，计算：

（1）第一次取到白球，第二次取到黑球的概率。

（2）第一次、第二次都取到黑球的概率。

解 此题为本章的例 1-5，是由古典概率公式计算的，现在用乘法法则来解答。

设事件 $A_i\ (i=1,\ 2)$ 表示 i 次取到白球，则

（1）所求概率为

$$P(A_1\overline{A_2})=P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{2}{7}$$

（2）所求概率为

$$P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$$

【例 1-12】 10 个考签中有 4 个难签，3 人按甲、乙、丙的顺序参加抽签（不放回），试求：

（1）甲抽到难签的概率。

（2）甲、乙都抽到难签的概率。

（3）甲抽到而乙没有抽到难签的概率。

（4）甲、乙、丙都抽到难签的概率。

解 设事件 A、B、C 分别表示甲、乙、丙抽到难签，则

（1）所求概率为

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

（2）所求概率为

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{9}=\frac{2}{15}$$