

中興經營管理叢書

線 型 規 劃

—理論與應用—

(增訂版)

LINEAR PROGRAMMING
(THEORY AND APPLICATIONS)

葉 若 春 博 士 編 著

中 興 管 理 顧 問 公 司
發 行

中興經營管理叢書

線 型 規 劃

—理論與應用—

(增訂版)

LINEAR PROGRAMMING
(THEORY AND APPLICATIONS)

葉 若 春 博 士 編 著

中 興 管 理 顧 問 公 司
發 行

版權所有
翻印必究

中華民國五十八年十月初版
中華民國五十九年九月再版
中華民國六十四年八月增訂三版
中華民國六十九年一月增訂八版

中興經營管理叢書

線 型 規 劃

精裝本實價新台幣二百元整

編著者 葉 若 春

發行者 中興管理顧問公司
台北市民生東路六十六號
新力大樓五樓
電話：5616356 • 5616357

印刷者 郵政劃撥儲金戶第 100952 號
大嘉印刷事業有限公司
台北市松江路二九三號三〇九室
電話：5119576 • 5619012

行政院新聞局出版事業登記證：局版台業字第 0040 號

自序

線型規劃在短短二十餘年間，不論理論與應用上，均發展神速，在軍事、農業、交通、運輸方面皆可應用，尤以工商企業界為最。線型規劃係在線型不等式限制條件下，求解線型目標函數，限制條件可代表吾人有限之資源，目標函數則表示吾人預定之目標，故線型規劃，可供經理人員作為執行決策之參考。

自 1947 年 George B. Dantzig 等人員，為美國空軍總部解決軍事計劃時，而獲得線型規劃之範式及求解之單純法 (Simplex Method) 後，美國空軍特設 SCOOP 專案 (Scientific Computation of Optimum Programs)，研究線型規劃在軍事上之應用。在初期，線型規劃主要應用於企業界相互經濟關係之 Leontief 氏輸入輸出模式 (Input-output Model) 及競局理論 (Game Theory) 中。惟在單純法前，如 Hitchcock 氏 (1941) 及 Koopmans 氏 (1947) 已分別獨立解出運輸問題。自線型規劃問題於 1952 年初，由電子計算機獲得求解後，應用範圍迅即展開，且大型線型規劃問題，均可於短促時間內獲解，足為各界所樂用。

線型規劃問題通常可分為理論、計算與應用三方面敘述之，本書內容即按此編排，第一章介紹規劃之形式與簡單實例，第二章說明圖解法，並用以探悉線型規劃解答之各項性質，第三章複習所需基本數學，第四章第五章分別敘述各類解答之性質及理論分析，以建立理論基礎。第六章說明表列之求解——單純法，第七章介紹兩種單純法之變異——修正單純法與對偶單純法。第八章說明線型規劃之原始 (Primal) 與對偶 (Dual) 問題，第九章介紹最佳解敏度分析 (Sensitivity Analysis) 及模數線型規劃 (Parametric Linear Programming)。因運輸問題與指派問題，均為線型規劃之特殊情形，故分別說明於第十及第十一章中。第十二、十三章介紹變數上限問題 (Upper-

bound Problem)，整數線型規劃 (Integer Linear Programming) 及分群原理 (Decomposition Principle)，均係線型規劃擴充之技術，最後於第十四章介紹線型規劃之應用問題。且於每章末後，附以習題，藉供讀者練習。

美國大學部工業工程系，已將線型規劃列為必修課程，而今國內方面，中正理工學院工業工程系自本學年起已修訂為必修，中原理工學院亦早已列為選修。本書之編著，藉供大學部工業工程系或商學院研究所“線型規劃”課程教科書之用，如每週講授三小時，可於一學期授畢。倘時間不足，可先按第一至第六章、第八章、第十、十一、十四章，講授線型規劃之重點，其次再按第七、九、十二及十三章次序講授。讀者如對矩陣以及凸集等均已熟習，則第三章可省略不授。本書亦可供各專業訓練班之教材，訓練班可分為初級、高級兩班，初級以一至六章，第十、十一章及十四章部份為主，而高級班以七、八、九、十二、十三及十四等章繼續講授，但亦可按本書章節，合併一次授畢。

本書第三章，特列所需基本數學之介紹，僅需具有大代數或線性代數基礎者，即可自行參閱，亦無困難，故本書亦可提供各界經理及技術人員之參考，俾使線型規劃之技術，應用於各類實際問題中。

本書之出版，承蒙中國生產力及貿易中心高總經理禎瑾賜序，中山科學研究院計劃處劉處長元發之指導及全處同仁之鼓勵，又蒙大嘉打字印刷公司之製版印裝，謹此一併深誌感忱。

筆者學識淺陋，錯誤難免，敬祈專家先進暨讀者賜予指正，不勝感幸。

章若愚 謹識

中華民國五八年十月三日

目 次

高 序
自 序

第一章 緒 論	1
1-1 線型規劃問題	1
1-2 線型規劃簡單實例	1
1-3 線型規劃之性質及其形式	3
1-4 應用實例簡介	6
1-5 線型規劃之簡史	16
習題一	16
第二章 圖解法	19
2-1 二變數之圖解法	19
2-2 線型規劃問題答案之性質	23
2-3 三變數之圖解法	27
習題二	29
第三章 所需基本數學之介紹	31
3-1 矩陣	31
3-2 矩陣之加減與乘法之運算	33
3-3 矩陣之結合律，交換律及分配律	37
3-4 矩陣之分割	38
3-5 行列式	39
3-6 線性獨立 (Linear Independence)	41

3-7	矩陣之除法——反矩陣 (Inverse of Matrix)	43
3-8	聯立方程式與矩陣代數	47
3-9	求反矩陣之別法	50
3-10	特殊情況下求反矩陣	52
3-11	矩陣之階 (Rank)	52
3-12	向量與向量空間 (Vectors & Vector Space)	53
3-13	基 (Basis)	55
3-14	凸集 (Convex Sets) 與其端點 (Extreme Point)	57
3-15	凸性結合 (Convex Combination)	61
	習題三	63
第四章	解之性質及分析	68
4-1	線型規劃問題之一般形式	68
4-2	線型規劃問題解之性質與分類	69
4-3	適合條件解 (Feasible Solution) 組成凸集	70
4-4	端點解與最佳解 (Optimal Solution)	71
4-5	端點解之獲得與基向條件解 (Basic Feasible Solution)	73
	習題四	80
第五章	求解之理論分析	81
5-1	求解步驟之分析	81
5-2	第一決策規則 (Decision Rule I)	82
5-3	解之無限界值 (Case of Unbounded Solution)	88
5-4	解之退化情形 (Case of Degenerate Solution)	91
5-5	循環情形 (Cycling)	92
5-6	微量擾亂術 (Perturbation Techniques)	93
5-7	第二決策規則 (Decision Rule II)	95
5-8	變換規則 (Transformation Rule)	99

習題五	102
第六章 表列求解—單純法	104
6-1 單純法 (Simplex Method) 之表列 (Tableau)	104
6-2 表列之變換	109
6-3 以惰變數 (Slack Variables) 求開始基向條件解	112
6-4 以人工變數 (Artificial Variables) 求開始基向條件解	114
6-5 矛盾與多餘之情形	124
6-6 雙階法 (Two - Phase Method)	125
6-7 循環情形舉例	129
6-8 線型規劃問題之多解 (Alternative Solutions)	135
6-9 最大與最小問題之互換	136
6-10 變數之下限 (Lower Bound of Variables)	136
6-11 變數無正負值限制之情形	137
6-12 單純法之求解步驟	137
習題六	138
第七章 修正單純法與對偶單純法	143
7-1 引言	143
7-2 修正單純法 (Revised Simplex Method)	144
7-3 修正單純法之第一標準形式	153
7-4 修正單純法之第二標準形式	154
7-5 對偶單純法 (Dual Simplex Method)	159
7-6 對偶單純法求解步驟	172
7-7 修正單純法，對偶單純法與單純法之比較	173
習題七	173
第八章 原始問題與對偶問題	176
8-1 原始 (Primal) 問題與對偶 (Dual) 問題之產生	176
8-2 對偶定理 (Duality Theorem)	177

8-3	對稱對偶問題 (Symmetric Dual Problem)	183
8-4	原始問題與對偶問題之相互關係	184
8-5	非對稱對偶問題 (Unsymmetric Dual Problem)	188
8-6	對偶問題之相關含義	193
	習題八	194
第九章 最佳解敏度分析及模數線型規劃		197
9-1	引言	197
9-2	價值係數 c_i 變更之分析	198
9-3	常數 b_i 變更之分析	202
9-4	常係數 a_{ij} 變更之分析	204
9-5	變數增減之分析	209
9-6	限制條件增減之分析	210
9-7	模數線型規劃問題 (Parametric Linear Programming)	212
	習題九	220
第十章 運輸問題與互運問題		223
10-1	運輸問題 (Transportation Problem) 與 互運問題 (Transshipment Problem)	223
10-2	運輸問題之通式	223
10-3	運輸問題之性質	226
10-4	運輸問題之西北角規則 (Northwest Corner Rule)	228
10-5	運輸問題最佳解之獲得——長繞法 (Long Method)	232
10-6	運輸問題最佳解之獲得——捷徑法 (Short Method)	237
10-7	運輸問題之開始基向條件解	240
10-8	不平衡運輸問題及最大問題時之運輸問題	245
10-9	運輸問題求解之步驟	247
10-10	互運問題 (Transshipment Problem)	248

習題十	252
第十一章 指派問題	254
11-1 指派問題 (Assignment Problem)	254
11-2 以運輸問題求解指派問題	255
11-3 指派問題之求解	256
11-4 指派問題之變相及其對偶問題	262
習題十一	263
第十二章 變數上限問題及上限運輸問題	264
12-1 引言	264
12-2 變數上限問題 (Upper-Bound Problem)	264
12-3 變數上限問題之分析	266
12-4 變數上限問題之表列	273
12-5 變數上限問題求解之步驟	275
12-6 上限運輸問題 (Capacitated Transportation Problem)	281
習題十二	285
第十三章 整數線型規劃與分群原理	287
13-1 整數線型規劃 (Integer Linear Programming)	287
13-2 Land 與 Doig 氏之整數解	296
13-3 混合整數線型規劃問題之解	296
13-4 分群原理 (The Decomposition Principle)	299
13-5 分段線型近似解 (Piece-Wise Linear Approximation)	307
習題十三	309
第十四章 線型規劃之應用	311

14-1	引言.....	311
14-2	多項產品問題 (Product-Mix Problem).....	312
14-3	食譜問題 (Diet Problem)	316
14-4	材料切割問題 (Trim Problem).....	317
14-5	混合問題 (Blending Problem)	318
14-6	合併製造與運輸成本問題.....	321
14-7	機器分配問題 (Machine Loading Problem).....	322
14-8	航線班次問題 (The Problem of Routing Aircraft).....	325
14-9	航線時程安排問題 (Airline Flight Schedule)...	327
14-10	自製或價購問題 (Make or Buy Problem)	328
14-11	生產排程問題 (Production Scheduling).....	329
14-12	生產計劃之平穩問題 (Production Smoothing).....	335
14-13	庫房問題 (Warehousing Problem)	337
14-14	固定成本問題 (Fixed-Charge Problem).....	343
14-15	多維數運輸問題 (Multidimensional Transportation Problem).....	345
14-16	企業界相互關係問題 (Interindustry Problem)...	345
14-17	要徑法 (CPM)與計劃評審術 (PERT) 中之應用...	349
14-18	競局理論 (Theory of Game) 中之應用.....	350
14-19	結論.....	355
	習題十四.....	356
	附錄一：線型規劃之計算機程式	357
	附錄二：整數線型規劃之計算機程式	370
	本書主要參考書.....	391
	中英文索引.....	392
	英中文索引.....	400

第一章 緒 論

§ 1-1 線型規劃(Linear Programming)問題

吾人執行一項工作時，均先樹立目標，經衡量現有資源即人力、物力、財力後，訂定可行辦法，稱之為實施計劃，惟計劃之良窳，實賴於優良之決策。例如某公司可生產數種產品，惟如何運用現有資源以爭取最大利潤之目標，實賴於優良之決策——決定生產何種產品，然後始能訂定生產計劃。誠然，憑經驗判斷而定之決策，有時即為最優者，惟鮮能萬事均達盡善盡美之境。

線型規劃問題係利用數學方法求解前項優良決策工具之一，且其應用範圍較任何其他方法為廣，又因其解法——單純法(Simplex Method)有其一定之規則可資遵循，即使不解其原理，任何人均可循規而求出答案，自電子計算機問世後，線型規劃問題更可由計算機解出，故工業界均樂於應用，不無因也。

線型規劃，顧名思義係解決線型方面之問題，亦即變數為一次式者，例如 $3x_1 + 2x_2 - 5x_3$ 為線型，而 $x_1x_2 + 2x_3 + 4x_4$ 及 $x_1^2 + 3x_2$ 等式均為二次式或其他三次或以上者均屬非線型。

以數學公式對線型之定義則可列出如下：

$$(1) f(kX) = kf(X)$$

$$(2) f(X_1 + X_2) = f(X_1) + f(X_2)$$

合於上二式之函數稱之謂線型，否則均屬非線型，例如

$$f(X) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{雖合於(1)式，然不合於(2)式，仍屬非線型。}$$

§ 1-2 線型規劃簡單例

某傢俱公司可生產四種辦公桌，均需經過木工工廠及油漆工廠始

2 線型規劃

能完成，各辦公桌經各工廠所需人工小時如下表所列：

辦 公 桌 工 廠	A	B	C	D
木 工 工 廠	4	9	7	10
油 漆 工 廠	1	1	3	40

又設木工工廠及油漆工廠目前之可用人工小時數分別為 6000 及 4000 人工小時，倘辦公桌 A, B, C, D 之利潤各為 12, 20, 18 及 40 元，假定該公司不擬擴展人力，在原料能充份供應下及出產產品均可銷售情況下，試告應生產辦公桌之種類及數量，始可獲得最大利潤之目標？

設各類辦公桌之生產數量分別為 x_A, x_B, x_C, x_D ,

吾人之目標為求總利潤最大，故應求 $12x_A + 20x_B + 18x_C + 40x_D$ 之總和為最大，以數式表之則為

$$\text{Max. } f(x) = 12x_A + 20x_B + 18x_C + 40x_D$$

由此式可知各 x 之數愈增則其利潤愈大惟 x_A, x_B, x_C, x_D 均不可能任意增加，因各工廠之可用人工小時不得超過 6000 及 4000 人工小時，故在前式之目標下，吾人尚須對其變數 x 加以限制，其限制條件應為

$$(1) \quad 4x_A + 9x_B + 7x_C + 10x_D \leq 6000$$

$$(2) \quad x_A + x_B + 3x_C + 40x_D \leq 4000$$

又因各類辦公桌之答案不能為負數，故尚須限制

$$x_A, x_B, x_C \text{ 及 } x_D \text{ 均須 } \geq 0$$

綜結前述，本題若以線型規劃問題之形式表之則為

$$\begin{aligned} \text{Max. } f(x) &= 12x_A + 20x_B + 18x_C + 40x_D \\ \text{Subject to: } 4x_A + 9x_B + 7x_C + 10x_D &\leq 6000 \\ x_A + x_B + 3x_C + 40x_D &\leq 4000 \\ x_A, x_B, x_C, x_D &\geq 0 \end{aligned}$$

式中 Subject to 表示各變數 x 受下列各條件之限制。

倘原料不能充份供應，設各辦公桌所需原料分別為 4, 5, 8, 15 單位，而該公司每月所能獲取之原料設為 30000 單位，則吾人又可列出另一限制條件為：

$$4x_A + 5x_B + 8x_C + 15x_D \leq 30000$$

將此限制條件合併前述式子內即可。

又若辦公桌 D 依銷售預測每月僅可能銷售 50 張，則需加入另一限制條件 $x_D \leq 50$ 即可。

本題之答案，在此不予列出，待後即可知其解法。

§ 1-3 線型規劃之性質及其形式

由以上之簡單實例，可知線型規劃有其下列之性質：

- (1) 目標之確定：例如上節之求取最大利潤是，或有時求取其最小值，此在線型規劃中稱之曰**目標函數**(Objective Function) 而此函數必須為線型，即上節中之

$$\text{Max. } f(x) = 12x_A + 20x_B + 18x_C + 40x_D$$

一般之通式，目標函數可書為

$$\text{Max. or Min. } f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

其中 x 為變數而 c 則為已知之係數，讀者當可了解 c 不能為變數，否則目標函數將屬非線型，通常 c 稱之曰**價值係數**(Price Coefficients) 且其中 c 之值可正可負。

4 線型規劃

欲證明 $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ 為線型甚易，因

$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ ，則

$$\begin{aligned} f(kx) &= c_1(kx_1) + c_2(kx_2) + \cdots + c_n(kx_n) \\ &= k(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n) = kf(x) \end{aligned}$$

又令 x_A 代表 $x_{11}, \cdots, x_{1n}$ 之值， x_B 代表 $x_{21}, \cdots, x_{2n}$ 之值，則

$$f(x_A) = c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n} \quad \text{及}$$

$$f(x_B) = c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n}$$

$$\begin{aligned} \text{得 } f(x_A + x_B) &= c_1(x_{11} + x_{21}) + c_2(x_{12} + x_{22}) + \cdots + c_n(x_{1n} + x_{2n}) \\ &= (c_1x_{11} + c_2x_{12} + \cdots + c_nx_{1n}) + (c_1x_{21} + c_2x_{22} + \cdots + c_nx_{2n}) \\ &= f(x_A) + f(x_B) \end{aligned}$$

由上可知目標函數之通式確屬線型

- (2) 一組線型之限制條件：例如上節中之 $4x_A + 9x_B + 7x_C + 10x_D \leq 6000$ 及 $x_A + x_B + 3x_C + 40x_D \leq 4000$ 是，其一般通式則為 m 個線型之限制條件如下式：

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

其中 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{m1}, \cdots, a_{mn}$ 稱之曰常係數 (Constant Coefficient)，又 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 即簡稱之曰常數 (Constant)，常係數與常數均可正可負，而 m 個線型之限制條件統稱之為結構限制條件 (Structural Constraints)。

當然所有常係數與常數均須為已知，而且讀者亦可自證其 m 個限

制條件均屬線型，又 m 個限制條件之每一方程式中，均須表示其獨特之性質，例如

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ 4x_1 + 6x_2 &\leq 12. \end{aligned}$$

兩限制條件，則可歸納成一個方程式，即一個限制條件即足。

- (3) 變數爲正：例如上節中所有 x_A, x_B, x_C ，及 x_D 均須爲正或零，稱之曰**非負數限制條件**(Non-negative Constraints)，而其通式則爲

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

由上所述，吾人可將線型規劃問題，列出其通式如下：

$$\text{Max. or Min } f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\text{Subject to : } a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

上述之通式，倘在結構限制條件中方程式兩邊俱乘 -1 ，則 $\leq$ 可變成 $\geq$ ，又如在不等式中，加上或減去一正值變數，則可將不等式改爲等式，故可知上述形式即已代表線型規劃之一般通式。

在此通式中，吾人又須注意者，即目標函數或結構限制條件，不論變數如何變大或減小，仍屬線型，亦即含有成正比 (Proportionality) 及所有項目可相互累加 (Additivity) 之假定。

由上述之通式，初步之想法，可任意湊出合於結構限制及非負數限制條件下之一組 n 個變數之值，倘能確定僅能獲得一組之值，則不

6 線型規劃

論目標函數為極大或極小，此組值即為所求之答案，倘能湊出數組合於限制條件之值，則吾人可將此數組值分別代入目標函數中，比較後以求得其解，惟通常合於限制條件之組值為無窮多，故此種方法通常為不可行。

從另一方面觀察，可能限制條件之方程式相互矛盾，故可知線型規劃問題亦可能無解。或合於限制條件之某變數或數變數之值達於無窮大，則目標函數亦隨之無窮大或為無窮小，當視其對應價值係數分別為正或負而定。

又從上述通式中，吾人可察知當常係數及常數俱為正數，倘目標函數為求極小值時，則顯而易見所有變數俱為零，雖問題有解，對吾人却失去其實際意義。

通常吾人解線型規劃問題時，即係設法在無窮多組之答案下，取出一組值，適為吾人所欲尋覓目標函數之極大或極小值，亦即在許多可行之實施方案中，在人力、財力、物力種種限制條件下，獲得吾人最優之決策，以達成目標。

在實際問題中，列出線型規劃問題前，吾人必須確定所有價值係數，常係數及常數之值，有時，此種數值極易獲得，惟有時蒐集此項數值，却頗費時力。

§ 1-4 應用實例簡介

例一．擬生產三種不同合金的線圈，線圈每 400 呎重 4 噸，試問在機器能量與未來銷售量之限制下，如何決定各種合金之生產量，以求得最大的利潤。其生產流程圖如下：

