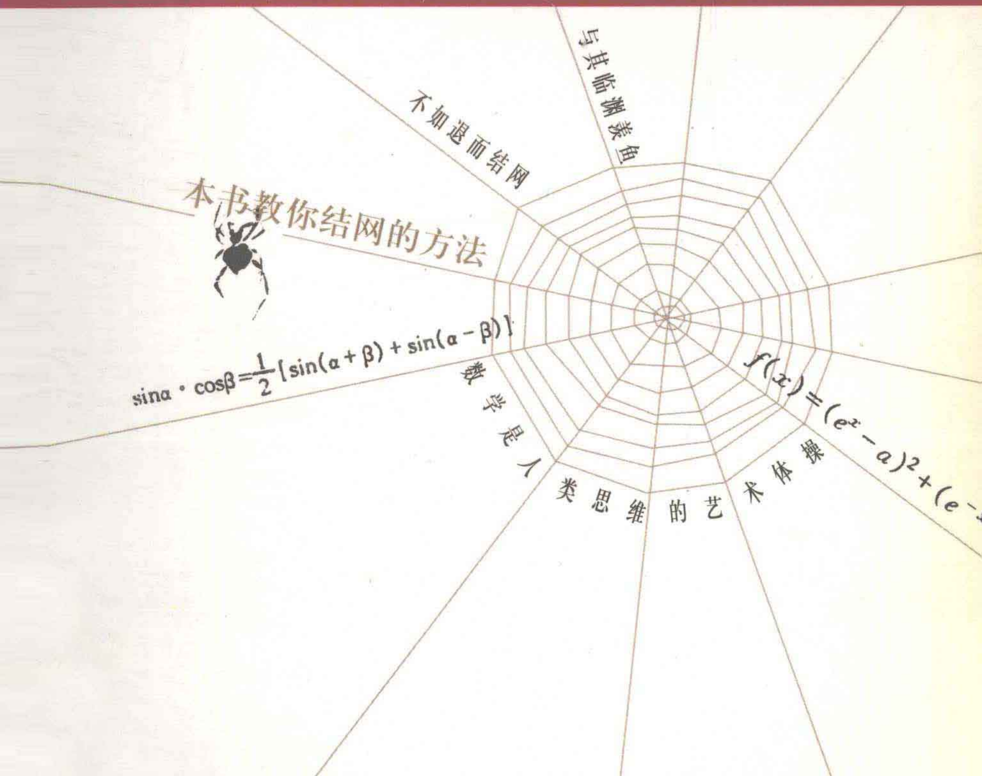
2 数学思维方法

柏均和高中数学指导

柏均和 著



學苑出版社

数学思维方法

柏均和高中数学指导

第二册

柏均和　著

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思维方法:柏均和高中数学指导(第二册)/柏均和著.
-北京:学苑出版社,2000.3
ISBN 7-5077-0307-X

Ⅰ.数… Ⅱ.柏… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 07521 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号 100036
高碑店市印刷厂印刷 新华书店经销
850×1168 32 开本 8.375 印张 210 千字
2000 年 3 月北京第 1 版 2000 年 3 月北京第 1 次印刷
印数:5000 册
定价:9.00 元

序　言

该书是高中学生学习数学的一部有特色的实用参考书。

该书对高中数学知识进行了颇有新意的梳理，揭示了知识要素之间的内在的、系统的联系，使学生站在一个逻辑体系上去认识、理解和记忆数学知识。

该书对高中数学中的重点、难点进行了深入的剖析，不就题论题，而是教其知，授其法，以法述知，揭示规律，由例及类，举一反三，这对于促使高中学生建立数学思想，提高学生的数学能力，培养学生的数学素养具有重要的作用。

该书还对学生的学习策略，结合高中数学各章的具体内容进行了深入的论述，这对于帮助高中学生建立正确的学习方法很有启发。

该书还配备了经过精选的练习题，这些习题主要是经过重点学校学生反复实练后的主客观复习题，同时还对二十多年我国高考题进行了按章的分类介绍，这对于学生深刻认识高中数学考点的要求，提高学习数学的实效性，具有特殊作用。

该书不是以某一版本的数学教材为准，而是兼顾了现行的数学通用教材和一些实验教材。既适合于学生参加高考的毕业复习，更适合日常教学参考。因为作者认为，掌握知识比应考更重要。而真正掌握了知识，应考也就成了知识的运用而已。因此，将该书选为学习数学的重要参考书，使学生在学习过程中，不仅知其然，更知其所以然，对磨练学生智力、提高学生能力均有很大帮助。

在本书编写过程中，作者将自己四十年中学数学教学的经验，特别是在近二十年来，运用该书成果，指导学生参加数学高考取得优异成绩和突出效果上所积累的经验，均无保留地介绍了出来。在当前全面实施素质教育的过程中，在对数学高考内容进行改革

的过程中，数学做为高中的一个基础学科，任务十分艰巨，而该书的实践与探索均有一定的参考价值。

在本书编辑过程中，天津第一中学的优秀青年老师王悦、何智理、袁爽等同志参加了书中热点训练题的选编和做答，并对高考题进行了抄写，特别是王悦绘制了该书的全部图形，并以原稿为本，进行了认真的校对。对此，本书作者表示衷心的感谢。

目　录

§1　数列、极限、数学归纳法

一　要点梳理

1　数列

〈1〉数列

⑴定义：按照一定的顺序排列着的一列数叫数列，简记$\{a_n\}$．

可以用函数的观点认识数列，其定义域为自然数集或它的有限子集，当自变量从小到大依次取自然数时，相应的函数值按顺序排列即为数列，其图象是一群孤立的点．

⑵表示法：列举法、解析法、图象法．

注意：ⅰ　通项公式是认识和表示许多数列的重要形式．其意义是，数列的第n项常称为数列的通项，将通项a_n与项数n之间的函数关系用一公式表示，该公式叫通项公式．

ⅱ　并非所有的数列都能写出其通项公式．

⑶分类：

按定义域：有穷数列、无穷数列；

按值域：有界数列、无界数列；

按单调性：递增数列、递减数列，另有摆动数列．

⑷公式：$a_1=s_1, a_n=s_n-s_{n-1}(n\geqslant 2, n\in \mathbf{N})$．

〈2〉等差数列

⑴定义：从第2项起，每一项与其前一项的差都是同一个常数的数列．

⑵公式：$(n\in \mathbf{N})$

ⅰ　$a_{n+1}-a_n=d$，

ⅱ　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+a_{n+2})$，

ⅲ　$a_n = a_1 + (n-1)d = d\cdot n + (a_1 - d)$,

ⅳ　$s_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n(a_1 + \frac{n-1}{2}d)$

$= c_n^1 a_1 + c_n^2 d = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n$.

⑶规律:

ⅰ　一般地,差等数列的通项公式是自变量为 n 的一次函数式,图象是一条射线上的一群孤立的点,射线的斜率为公差 d.

ⅱ　一般地,等差数列的前 n 项和公式是自变量为 n 的二次函数式,其图象是一条抛物线上的一群孤立的点,通式为

$s_n = an^2 + bn$,这里 $a = \frac{d}{2}$, $b = a_1 - \frac{d}{2}$.

ⅲ　任意两项:$a_n = a_m + (n-m)d$,

ⅳ　有限个等差数列的线性组合仍是等差数列,即若$\{a_n\}$、$\{b_n\}$均为 AP,若 $c_n = ma_n + pb_n + q$(m,p,q 为常量),则$\{c_n\}$也成 AP,

ⅴ　距首末两项等远项之和等,若 $l+m=n+k$,$(l,m,n,k\in N)$,则 $a_l + a_m = a_n + a_k$.

ⅵ　五个量 a_1、a_n、n、d、s_n 中每知其三可求余二.

〈3〉等比数列

⑴定义:从第 2 项起,每一项与其前一项的比都是同一个常数的数列.

注意:ⅰ　等比数列的任何一项均不为零,定义中的常数比也不为零.

ⅱ　满足 $a_{n+1} = qa_n$ 或 $a_{n+1}^2 = a_n\cdot a_{n+2}$的数列$\{a_n\}$不一定是等比数列,例如数列 1,0,0,0,⋯.

⑵公式:$(n\in N)$.

ⅰ　$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q(n\geqslant 2)$,

ⅱ　$a_n = a_1 q^{n-1}$,

ⅲ　$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1 - a_n q}{1-q}(q\neq 1)$,

$s_n = na_1(q=1)$.

⑶规律:

ⅰ　任意两项:$a_n = a_m q^{n-m}(m,n\in N)$.

ⅱ　两数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$均为 GP,则$\{a_n^p\cdot b_n^q\}$或$\{\frac{a_n^p}{b_n^q}\}$也成 GP,$(p,q\in Q$

且均使上述数列有意义).

iii 距首末两项等远项之积等,若 $l+m=n+k(l,m,n,k\in N)$,则 $a_l\cdot a_m=a_n\cdot a_k$.

iv 如$\{a_n\}$是 R^+ 的 GP,则$\{\log_a a_n\}$成 AP.

v 如$\{a_n\}$是 AP,则$\{m^{a_n}\}$成 GP,$(m>0,m\neq1)$.

vi 非零常数组成的数列,既成 AP,也成 GP.

vii 两等比数列相加或相减不一定是等比数列.

viii 五个量 a_1、a_n、n、q、s_n 中每知其三可求余二.

2 极限

〈1〉数列的极限

(1)定义:一般地,对于一个无穷数列

$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,即$\{a_n\}$,

如果存在这样一个常数 A,

无论预先指定多么小的正数 ε,

都能在数列中找到某一项 a_N,

使得这一项后边的所有项与 A 的差的绝对值都小于ε,

即当 $n>N$ 时,总有$|a_n-A|<\varepsilon$,

这时把常数 A 叫数列$\{a_n\}$的极限,

简记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

注意:i 数列$\{a_n\}$的无限性,数列$\{a_n\}$必须是一个无穷数列,$a_1,a_2,a_3\cdots a_n$ 后还应有$\cdots$,

ii “如果存在这样的一个常数 $A,\cdots$,则 A 是$\{a_n\}$的极限”,这里必须具备存在极限的条件,才有极限,并不是每一个无穷数列都有极限,

iii 数列$\{a_n\}$有极限 A 的条件:

正数 ε 有任意性、无限性、相对确定性;

a_N 有对应性、纯粹性、适当灵活性. 例如$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{2^n})=1$,取定 $\varepsilon=0.001$,存在自然数 $N=9$,当 $n>N=9$ 时,不等式$|(1-\frac{1}{2^n})-1|<0.001$ 恒成立,但取比 9 大的任意一个自然数都能起到 N

的作用，例如取 $N=20$，当 $n>N=20$ 时，不等式 $\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|<0.001$ 也恒成立，定义中强调 N 的存在性，而不在于 N 的大小，一般地，ε 越小，相应 N 越大．

ⅳ　任何常数数列的极限是 A，设数列

$$A,A,A,\cdots,A,\cdots$$

对任意小的 $\varepsilon>0$，任取自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|=|A-A|=0<\varepsilon$ 恒成立，即常数列 $\{a_n=A\}$ 的极限是 A．

(2)证解无穷数列 $\{a_n\}$ 的极限是 A 的步骤：

ⅰ　写出 $\{a_n\}$ 的通项公式，

ⅱ　设任意小的 $\varepsilon>0$，

ⅲ　证明总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立．

①解 $|a_n-A|<\varepsilon$，求 n．

②其 n 解是自然数集的无限子集；

③上数集中任何一个自然数都可取为 N，通常取较小者，为某数的整数部分．

ⅳ　根据数列极限的定义得出结论．

〈2〉数列极限的运算法则

(1)法则

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，那么

ⅰ　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=A\pm B$(其和可推广)，

ⅱ　$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=A\cdot B$(可推广)，

ⅲ　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$，

ⅳ　如 c 为常数，$\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}c\cdot\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C\cdot A$．

注意：

ⅰ　运用数列极限的运算法则求数列的极限必须具备两个条件，一是各局部极限的存在性，二是实质的无限性与形式上有限性的统一，

ⅱ　不能以实数运算法则去理解数列极限运算法则的公式，错认为 lim 与 a_n 间是相乘关系．

(2)无穷递缩等比数列

ⅰ　定义：一个无穷等比数列，如其公比的绝对值小于 1(广义递缩)，那这样的数列叫无穷递缩等比数列．

注意:

(i)公比$|q|<1$,实为$(-1,0)\cup(0,1)$,$\because q\neq 0$,

(ii)当$|q|<1$时,$\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$.

ii 各项的和:无穷递缩等比数列前 n 项的和,当 n 无限增大时的极限,叫这数列各项的和,以 s 表示,$s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

注意:应理解以下区分 .

设无穷递缩等比数列

$a_1,a_1q,a_1q^2,\cdots,a_1q^{n-1},\cdots |q|<1$ 且 $q\neq 0$,

则 $a_n=a_1q^{n-1}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_1q^{n-1}=\lim_{n\to\infty} a_1\cdot\lim_{n\to\infty} q^{n-1}$$

$$=a_1\cdot 0=0,$$

则 $s_n=\sum\limits_{n=1}^{n} a_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$,

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n)$$

$$=\frac{a_1}{1-q}.$$

则 $s=\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

这里数列$\{a_n\}$的前 n 项的和 s_n,也构成一个数列$\{s_n\}$,即 $s_1,s_2,s_3,\cdots,s_n,\cdots$,

这数列的通项 s_n 的极限是 s.

(3)循环小数化分数:这是无穷递缩等比数列的应用之一,其法则为:

i 纯循环小数化分数

分母——由若干个 9 组成,其 9 的个数为一个循环节的位数,

分子——一个循环节的数字 .

ii 混循环小数化分数

分母——由若干个 9 其后由若干个零组成,其 9 的个数为一个循环节的位数,其零的个数为不循环的位数 .

分子——小数点后到第一个循环节完结的数字减去不循环数字所得的差 .

3　数学归纳法

〈1〉证明方法小结

⑴演绎法——是一般到特殊的推理方法，只要推理不发生错误，则从已知出发所做的新判断是正确的．

例　证明方程 $x^2+x+1=0$ 无实数根．

证明：∵对方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，

当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程无实数根．

∵方程 $x^2+x+1=0$ 的 $a\neq0,\Delta=-3<0$，

∴方程 $x^2+x+1=0$ 无实数根．

⑵完全归纳法——考察了某类事物的所有的每个对象，而得出一般结论，叫完全归纳法，该结论显然可靠．

⑶不完全归纳法——只是考察了某事件的部分对象，就得出一般结论，叫不完全归纳法，这结论不一定可靠．

例　某一数列的通项公式为 $a_n=(n^2-5n+5)^2$ 这里 $a_1=1,a_2=1,a_3=1,a_4=1$，

由此得出结论对任何 $n\in N$，均有

$a_n=(n^2-5n+5)^2=1$，就错了！

事实上，当 $n=5$ 时，$a_5=25\neq1$．

⑷数学归纳法

〈2〉数学归纳法

⑴适用范围：对于由归纳法得到的某些与自然数有关的数学命题，常采用数学归纳法证之，又常与不完全归纳法、猜想结论联合使用．

⑵思想方法：

ⅰ　先验证 n 取第一个值时，命题成立，——传递的基础．

ⅱ　假设 $n=k$ 时命题成立，证明 $n=k+1$ 时，命题也成立——传递的依据．

这样，如验证 $n=1$ 时，命题成立，由传递的依据，可知 $n=2$ 时，命题也成立．如 $n=2$ 时，命题成立，则由传递的依据，可知 $n=3$ 时，命题亦成立，由于有了传递的基础与传递的依据，可知当 $n=4,5,6,\cdots$，均成立．这样的证明方法就是数学归纳法．

二　难点剖析

1　关于等差数列与等比数列基本公式的应用例析与注意事项

〈1〉等差数列计算公式综合使用的规律

等差数列中共有五个基本量，即

a_1、q、n、a_n、s_n，

有以下三个基本公式，分别编号如下：

a_1、d、n、a_n、s_n，

有以下三个基本公式，分别编号如下：

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad ①$$

$$s_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \qquad ②$$

$$s_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \qquad ③$$

每个计算公式中均有四个量，

这五个基本量中，任知其三而求余二，则共有以下十种不同情况

已知			求		公式选择	
a_1	a_n	s_n	n	d	②	①
a_1	a_n	n	s_n	d	②	①
a_1	a_n	d	n	s_n	①	②
a_1	s_n	n	a_n	d	③	①
a_1	s_n	d	a_n	n	③	①
a_1	n	d	a_n	s_n	①	②
a_n	s_n	n	a_1	d	③	①
a_n	s_n	d	a_1	n	联	立
a_n	n	d	a_1	s_n	①	②
s_n	n	d	a_1	a_n	③	①

从以上分析可以看出，十种情况有九种情况，可使已知的三个量集中出现在一个基本公式中，即解一元方程算出第四量，再选择适当公式将第五个

量计算出来．但有一种情况即已知 a_n、s_n、d，求 a_1、n 时，对上述三个基本公式，均只已知两个量，因此必须解二元联立方程组将所求的未知量解出，掌握了这个规律，可以增强公式选择的主动性．

〈2〉等比数列计算公式综合使用的规律

等比数列中共有五个基本量，即

$a_n = a_1 q^{n-1}$　　①

$s_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$　　②

$s_n = \dfrac{a_1 - a_n q}{1-q}$　　③

每个计算公式中均有四个量，

这五个基本量中，任知其三而求余二，则 $c_5^3 = c_5^2 = 10$，共有以下十种不同情况

已知			求		公式选择	
a_1	q	n	a_n	s_n	①	②
a_1	q	a_n	n	s_n	①	③
a_1	q	s_n	n	a_n	③	①
a_1	n	a_n	q	s_n	①	②
a_1	n	s_n	q	a_n	②	①
a_1	a_n	s_n	q	n	③	①
q	n	a_n	a_1	s_n	①	②
q	n	s_n	a_1	a_n	②	①
q	a_n	s_n	a_1	n	③	①
n	a_n	s_n	a_1	q	联	立

由以上分析同样可看出，十种情况中有九种情况，可使已知的三个量集中出现在一个基本公式中，即解一元方程求出第四量，再选择适当公式将第五个量计算出来，且唯有一种情况，即已知 n、a_n、s_n，求 a_1、q 时，对上述三个基本公式，均只已知两个量，则必须解二元联立方程组将所求的未知量解出

〈3〉关于等比中项问题

如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a、G、b 成等比数列，那么 G 叫 a 与 b 的等比中项，则 $\dfrac{G}{a} = \dfrac{b}{G}$，即 $G^2 = ab$，因此 $G = \pm\sqrt{ab}$．

但将此公式应用到一个等比数列中,其正负号的选择就要注意了.

例如某等比数列的首项为1,公比为±2,合写在一起,其前十项分别为

1,±2,4,±8,16,±32,64,±128,256,±512,

如计算中间的一项,

对1与4,应为±2,

对1与16,应为+4,

对1与64,应为±8,

对1与256,应为16.

显然,一个等比数列从第2项起,每一项(有穷等比数列的末项除外)是它的前一项与后一项的等比中项.

如利用 $G=\pm\sqrt{ab}$ 计算一个等比数列中某两项的中间项,凡间隔为插偶数个项的,应有正负号,凡间隔为插入奇数个项的,应选正号或负号,且与首末项同号.

〈4〉等比数列前 n 项和公式的推导深化

设一等比数列的首项为 a_1,公比为 q,前 n 项和为 s_n,则此等比数列为

$a_1, a_1q, a_1q^2, \cdots, a_1q^{n-1}, \cdots,$

(1)由等比数列定义得

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q,$$

$$\therefore \frac{a_2+a_3+\cdots+a_n}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}=q\text{(等比定理)}$$

$$\therefore \frac{s_n-a_1}{s_{n-1}}=q,$$

$$\therefore s_n-a_1=qs_{n-1}\text{,即 } s_n-a_1=q(s_n-a_n),$$

$$\therefore s_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1).$$

(2)由 $s_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1},$

$$=a_1+q(a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}),$$

$$=a_1+qs_{n-1}=a_1+q(s_n-a_n)$$

$$\therefore s_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq 1).$$

(3)由 $s_{n+1}=s_n+a_{n+1}=s_n+a_1q^n$

$$=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n$$

$$=a_1+q(a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-1})$$
$$=a_1+qs_n,$$

$$\therefore s_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1).$$

(4)由公式 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$,上式中令 $a=1,b=q$,则得

$$1-q^n=(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}),$$

$$\therefore 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q},$$

$$\because s_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}$$
$$=a_1(1+q+q^2+\cdots+q^{n-1})$$
$$=a_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1).$$

熟悉上述推导,可以提高变形能力,深入了解等比数列的内在规律 .

〈5〉关于设的技巧

已知三个数成等差数列,常设为

$a-d,a,a+d$;

已知四个数成等差数列,常设为

$a-3d,a-d,a+d,a+3d$.

上面设法在已知其和时,显出优越性 .

已知三个数成等比数列,常设为

$\frac{a}{q},a,aq$.

已知四个数成等比数列,常设为

aq^{-3},aq^{-1},aq,aq^3.

上面设法在已知其积时,显出优越性 .

〈6〉应用例析

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中,如 $a_1+a_8+a_{10}+a_{17}=4+8i$, $s_{34}=45+80i$,求 $a_{35}+a_{36}+a_{37}+\cdots+a_{51}$.

解: $\because\{a_n\}$ 成等差数列,

$\therefore s_n,s_{2n}-s_n,s_{3n}-s_{2n}$ 也成等差数列 .

$\therefore s_n+(s_{3n}-s_{2n})=2(s_{2n}-s_n)$,

$\because a_1+a_8+a_{10}+a_{17}=4+8i$,