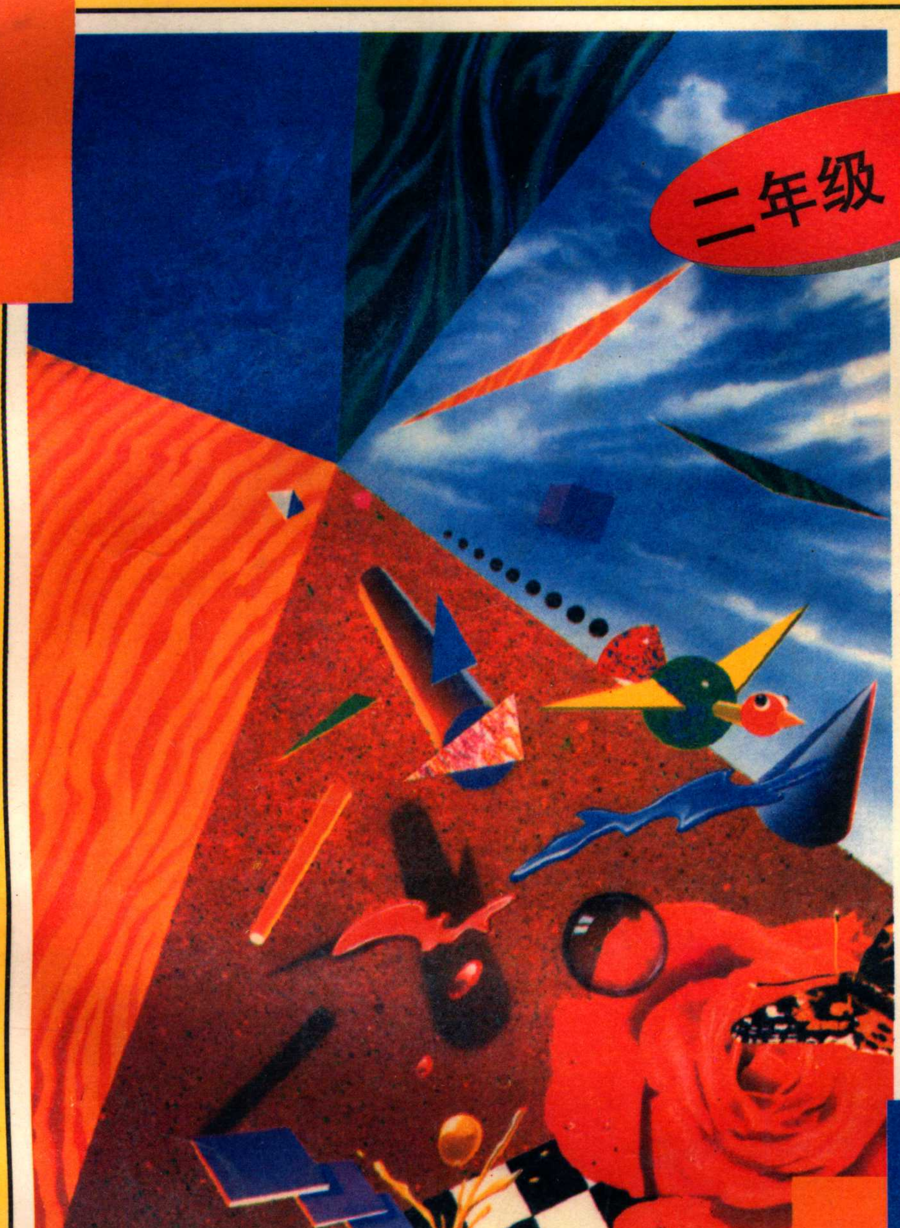
数学奥林匹克

初中练习册

二年级·下



北京数学奥林匹克学校　主编

北京师范大学出版社

530261 样

G634.6

G634.6
036
2

数学奥林匹克初中练习册

（二年级·下）

北京数学奥林匹克学校　主编

CS989589

北京师范大学出版社

世行贷款师范项目图书

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克初中练习册 二年级·下/北京数学奥林
　匹克学校主编。
一北京:北京师范大学出版社,1994
ISBN 7-303-03547-8

Ⅰ.数… Ⅱ.北… Ⅲ.数学课-中学-教学参考资料
Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 10988 号

北京师范大学出版社出版发行
(100875 北京新街口外大街 19 号)
北京昌平兴华印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:787×1092 1/16 印张:6.25 字数:150 千
1994 年 5 月北京第 1 版 1996 年 1 月北京第 2 次印刷
印数:20001—30000 册
定价:5.70 元

《数学奥林匹克初中练习册》

编辑委员会

顾问 裘宗沪(中国数学会普及工作委员会主任)
赵　桢(北京数学奥林匹克学校校长)

主编 北京数学奥林匹克学校

编委 (按姓氏笔划为序)
王永俊　刘金蕙　吴建平
陈　娴　唐大昌　陶晓永
袁素芬

作者 (按姓氏笔划为序)
王永俊　方仲伦　石景林
李青霞　何凤学　吴建平
陈　娴　金宝铮　郑　康
单志惠　赵晓峰　唐大昌
晁　洪　徐　流　陶晓永
袁素芬

策划 王永会

使用说明

北京数学奥林匹克学校(BMOS)成立于1985年，是全国第一家数学奥林匹克学校。它创立十年来在北京市教育局、北京市科协、北京数学会的关心支持和领导下，为丰富北京市中小学生的课外活动，促进教育教学改革，培养各类人才进行了积极的探索并取得了可喜的成绩。北京数学奥林匹克学校培养的中小学生在全国小学数学奥林匹克、全国初中数学联赛、全国高中数学联赛、中国数学奥林匹克(暨全国中学生数学冬令营)等全国性数学竞赛，以及北京市的各类数学竞赛中均取得了优异的成绩，并且有九人次入选国际数学奥林匹克(IMO)中国代表队，为国家争得了荣誉。

北京数学奥林匹克学校云集了一批来自科研单位、高等院校、教研部门以及中小学的骨干教师，他们经验丰富，积累了大量的资料并形成了有效的训练方法，这套《数学奥林匹克初中练习册》即是该校初中部的全体教练员根据中国数学会普及工作委员会制定的《初中数学竞赛大纲》以及初中部教学计划集体编写而成的。

本套《练习册》共包括六个分册，分别供初一年级上、下学期，初二年级上、下学期和初三年级上、下学期使用。初一上下册、初二上下册及初三上册每册包括15个训练课题和5套综合练习。训练课题尽量以课内教学顺序为基础，力争与课堂教学同步进行，综合练习的题目则围绕15个课题选配，教师在指导学生使用时，可根据具体情况适当调整。初三下册包括10个训练课题、5套综合练习以及5套模拟试题(即近五年全国初中联赛试题)，目的是为参加初中联赛的学生提供一个综合训练的机会。

由于时间仓促，练习册这种形式对我们来讲也是一种尝试，其中错误疏漏之处难免，希望广大的教师和同学们批评指正，以便我们修订时予以补救。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

练习一　整除……………………………………………………………………（1/71）
练习二　整数杂题………………………………………………………………（5/71）
练习三　不定方程………………………………………………………………（9/72）
练习四　二次方程组……………………………………………………………（13/74）
练习五　指数……………………………………………………………………（17/75）
练习六　无理数…………………………………………………………………（21/76）
练习七　配方与换元……………………………………………………………（25/77）
练习八　代数杂题………………………………………………………………（29/78）
练习九　几何中的平移与旋转…………………………………………………（33/80）
练习十　等积变换………………………………………………………………（37/80）
练习十一　四边形（Ⅰ）………………………………………………………（41/82）
练习十二　四边形（Ⅱ）………………………………………………………（45/84）
练习十三　勾股定理及其应用…………………………………………………（49/86）
练习十四　几何杂题……………………………………………………………（53/88）
练习十五　分类讨论初步………………………………………………………（57/89）
综合练习一………………………………………………………………………（61/90）
综合练习二………………………………………………………………………（63/91）
综合练习三………………………………………………………………………（65/92）
综合练习四………………………………………………………………………（67/92）
综合练习五………………………………………………………………………（69/93）
答案与提示………………………………………………………………………（71）

学校______ 班级______ 姓名______ 学号______ 成绩______

练习一 整 除

讨论整除问题大体有两条思路：为了证明 $m|A$，或者把 A 分解，使得 $A=B\cdot C\cdot D$，而 m 整除 B、C、D 中的某一个；或者把 A 分拆，使得 $A=B+C+D+E$，这时必须 B、C、D、E 都能被 m 整除. 后一条思路在证明 $m\nmid A$ 时更好用，当 $A=B+C+D$ 时，如果 B、C 是 m 的倍数，而 D 不是 m 的倍数，则 A 不是 m 的倍数.

1. 设$\overline{abcdefghi}$是一个九位自然数. 已知 $a+\overline{bc}+\overline{de}+\overline{fg}+\overline{hi}$能被 11 整除，求证 $11|\overline{abcdefghi}$.

2. 设 n 是自然数，求证 $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$能被 120 整除.

3. 设 m、n、p、q 都是整数，如果 $(m-p)\mid(mn+pq)$，那么 $(m-p)\mid(mq+np)$. 试证之.

4. 求证：

$1^{11}+2^{11}+3^{11}+4^{11}+5^{11}+6^{11}+7^{11}+8^{11}+9^{11}-3(1^{11}+6^{11}+8^{11})$ 能被 18 整除.

5. 设 x、y、z 都是整数，若 $11\mid(7x+2y-5z)$，求证 $11\mid(3x-7y+12z)$.

6. 设 n 是自然数，k 为正奇数. 记 $S_k=1^k+2^k+\cdots+n^k$ 求证：$n\mid 2\cdot S_k$，$(n+1)\mid 2S_k$.

7. 试证：当 n 是自然数时，$\frac{(3n)!}{6^n\cdot n!}$ 是整数，其中 $n!=1\times2\times3\times4\times\cdots\times(n-1)\times n$.

8. 设 n 是正偶数，证明 $(2^n-1)\nmid(3^n-1)$.

9. 设 n 是自然数，试证：$19 \nmid (21^{2n+1}+17^{2n+1}+15)$.

10. 设 n 是自然数，证明：$289 \nmid (4n^2+13-2n)$.

学校______ 班级______ 姓名______ 学号______ 成绩______

练习二　整数杂题

> 各级数学竞赛中涉及整数的问题往往是最丰富的部分之一．分类讨论、筛选枚举、余数整除，各种概念和方法总是综合使用．

一、填空题

1．所有被 4 除余 1 的两位数的和等于________．

2．已知五位数$\overline{a679b}$能被 72 整除．则 $a+b=$______．

3．使$\sqrt{2000\cdot k}$为整数的最小自然数 k 是________．

4．若自然数 $n=20\times30\times40\times50\times60\times70\times80\times90\times100\times110\times120\times130$，则不是 n 的因数的最小质数是________．

5．100 个自然数之和等于 101101，则这 100 个数的最大公约数的最大可能值是________．

6．已知自然数 m 与 3 的和是 5 的倍数，与 3 的差是 6 的倍数，那么 m 的最小值是________．

7．已知将一个三位数码重新排列所得的最大的三位数减去最小的三位数正好等于原数，那么这个三位数是________．

8．设 1987 可以在 b 进位制中写成三位数$\overline{xyz}$，且 $x+y+z=1+9+8+7$．则 $x+y+z+b=$________．

9．在 1，2，3，……，1991 这 1991 个自然数中，最多能取________个自然数，使所取的数中任意两个数的和能被 100 整除．

10．2^{1994}被 7 除的余数是________．

11．设 n 是从 1 到 1000 的自然数，共有________个自然数 n，能使得 2^n-n^2 被 7 整除．

二、解答题

1．在 1 到 200 这 200 个自然数中，既不是 3 的倍数，也不是 5 的倍数的数有多少个？

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

2. 1000 个整数排成一行，除了两头的两个数外，每个数的 8 倍恰好等于它两边两个数的和. 这行数最初的几个数是 0，1，8，63，……. 试说明这 1000 个数中的每一个都不能写成 $3^n \cdot 5^m$ 的形式，其中 n 和 m 都是自然数.

3. 18 个连续三位数中必有一个能被其各位数字之和整除.

4. 若 $2n=1$ 是质数,试证:$1^2,2^2,\cdots,n^2$ 分别被 $2n+1$ 除得的余数互不相同.

5. 证明:对于任意自然数 k,$2k-1$ 和 $2k+1$ 这两个数中至少有一个不能写成两个整数的平方和.

6. 对分数$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{p-2},\frac{1}{p-1}$通分求和. 证明:如果 p 是奇质数,则所得分数的分子能被 p 整除.

学校______ 班级______ 姓名______ 学号______ 成绩______

练习三　不定方程

如果一个方程中未知数的个数多于一个，并且通常在整数范围内讨论方程有没有解、有多少个解、怎样求解等问题，这样的方程称为不定方程．在初中数学竞赛中出现的不定方程往往是一次或二次整式方程，这样，处理整式以及整式方程的方法在解决这类方程时就十分有用．常用方法包括：奇偶分析（利用余数）、因式分解、配方估值、判别式估值、利用不等式性质估值等等．对于二元一次不定方程有一个非常完美的结果：

设 a、b、c 都是整数，如果 a 和 b 的最大公约数 (a,b) 整除 c，则不定方程 $ax+by=c$ 必有整数解．

1．求方程 $5x+3y=22$ 的全部整数解．

2．试确定不定方程 $x^2-y^2=1988$ 的整数解的个数．

3. 求解不定方程 $x^2=y^2+1990$.

4. 求方程 $xy-10(x+y)=1$ 的整数解.

5. 求不定方程$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$的正整数解.

6. 求不定方程 $3x^2-4xy+3y^2=35$ 的整数解.

7. 求方程 $x+y=x^2-xy+y^2$ 的整数解.

8. 若 x,y,z 的最小值不小于 3，求方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$ 的整数解.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com