21世纪高等院校创新教材

XIANXING DAISHU YU XIANXING GUIHUA

线性代数与线性规划

周晓中◎编著

中国人民大学出版社

21世纪高等院校创新教材

XIANXING DAISHU YU XIANXING GUIHUA

线性代数与线性规划

周晓中◎编著

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与线性规划 / 周晓中编著. —北京：中国人民大学出版社，2012.12
（21 世纪高等院校创新教材）
ISBN 978-7-300-16593-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①周… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材②线性规划-高等学校-教材 Ⅳ.①O151.2 ②O221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 293357 号

21 世纪高等院校创新教材
线性代数与线性规划
周晓中　编著
Xianxing Daishu yu Xianxing Guihua

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京民族印务有限责任公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2013 年 3 月第 1 版
印　　张	10.5 插页 1	**印　　次**	2013 年 3 月第 1 次印刷
字　　数	244 000	**定　　价**	19.00 元

内容简介

本书是根据教育部制定的《线性代数与线性规划课程教学基本要求》，在编者多年数学教学的基础上编写成的。它由行列式、矩阵、线性方程组、线性规划等四部分组成。

本书每章开篇明确学生的学习目的和要求，便于学生把握本章的全局，每节开始首先提出问题，并在此基础上明确需要研究的内容，自然展开本节内容，深入浅出，通俗易懂，突出重点，强化应用，每章课堂练习都经过精心设计与编选，每章结束进行学习小结，便于检查学习效果。

本书可作为应用型本科、成人高校相关专业及高职高专院校工科、经济与管理类各专业线性代数与线性规划课程的教材。

序　言

《线性代数与线性规划》是高职高专院校工科、经管类相关专业开设的公共基础课程，课程有利于学生对专业和专业技能的学习，有利于学生用数学方法解决生产、工作中遇到的实际问题，有利于学生可持续发展和终身学习。1999 年，教育部在《高职高专课程基本要求》中提出了高职高专课程“以应用为目的，以够用为度”的原则。近年，编者依据教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》精神，就教学内容和教学方法改革，开展了多方面的课程建设实践和研究，取得了一定的成效。本书是编者多年《线性代数与线性规划》教学实践与研究的结晶，教材密切结合学生的学习需要，突出重点，注重基础，强调应用，循序渐进，做到难易适当。

工科、经管类相关专业不同于数学专业。教材本着打好基础，够用为度的原则，略去了一些繁复定理的严格证明，对希望学生更好掌握的内容花费了较大的篇幅进行介绍，力求讲得流畅、透彻；而在知识介绍上，不过度要求深入和全面，重视实用性，重视在经济上、管理上、行业上和实际工作中的应用，并适当兼顾与专业接轨，体现有所为有所不为。

我们认为，基础课应该既要服务于专业，同时还要兼顾数学体系的完整性，但不可对难度有过高要求，尽量做到难易适当，深入浅出，举一反三，融会贯通，这些想法在书中线性方程组解的判定、基础解系、通解计算方法和单纯形方法的讲解上都有体现。使用 Excel 求解线性规划的方法，在学生实际工作中比较实用，不需要学生掌握专业的数学软件，易于掌握，书中详细介绍了这种方法，力求使线性规划方法在未来学生的实际工作中体现得更加完整。本书在内容编排上能够做到前后呼应，形象直观地说明问题，同时，注意知识面的拓宽，使教师和学生使用时得心应手。

本书是作者在多年的教学实践和使用过程中整理而成的，能够达到教学要求的效果，经过广大学生的学习和编者不断完善，编写成教材，相信读者学习本书后会大有斩获，并对学习线性代数和线性规划产生兴趣，增强学习的信心，提高科学素养，对培养数学应用能力也会有所帮助。

本书由周晓中编著，周艳丽任副主编。苏文悌老师认真审阅了本书，并提出宝贵意见。詹培民、关素英等老师为本书做了大量工作，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免不当之处，诚挚欢迎使用本教材的教师与读者提出宝贵意见，作者将不断改进和完善，不懈提高质量，突出本书的特色，更好地为教学服务。

编者

2012年5月

目　录

第一章

行列式

学习目的与要求：

1. 了解行列式概念产生的背景和原因；

2. 掌握二阶、三阶行列式的计算方法，从二、三阶行列式的形成规律，了解 n 阶行列式定义产生的过程；

3. 掌握行列式的性质，特别是可以简化行列式构成元素的性质以及行列式可以以任一行或列展开的性质；

4. 掌握行列式的化三角形行列式的计算方法以及以行或列展开逐步降阶计算行列式的方法；

5. 掌握行列式的一些应用，特别是克莱姆法则及其应用.

内容介绍：

行列式的概念是在研究线性方程组解的过程中产生的.

第一节　基本概念和性质

问题的提出：

数学知识是相互关联的，初中我们已经学习过二元或三元一次方程组的求解，常常利用消元法求解，并且总是可以求出唯一解. 那么，每个二元或三元一次方程组都有唯一解吗？

问题的研究：

我们做以下研究，对于二元一次方程组的情况

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases}, \tag{Ⅰ}$$

$(1)\times a_{22}+(2)\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

类似可得$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=b_2a_{11}-b_1a_{21}$.

于是，若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\qquad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

同样，对于三元一次方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases}\qquad(\text{Ⅱ})$$

利用类似的消元法，得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33})x_1\\ =&b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}.\end{aligned}$$

若 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}\neq 0$，则可以求出唯一的 x_1. 类似可以求出唯一的 x_2，x_3，于是可得方程组的唯一解.

这样就很好地回答了我们提出的问题，但以上这些条件和解的公式大多很复杂，于是，人们引进了下面我们要介绍的二阶和三阶乃至 n 阶行列式，以便我们更好地求解方程组.

行列式在数学的许多分支中都有着非常广泛的应用，是一种常用的计算工具. 特别是在本门课程中，它是研究线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

一、二阶行列式的定义

符号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\ a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称为由 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 构成的二阶行列式. 符号与表达式之间有明显的对角线法则.

二、三阶行列式的定义

符号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

称为由 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 构成的三阶行列式. 容易看出三阶行列式的表达式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积再冠以正负号，简单变形后有

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ a_{21}&a_{22}&a_{23}\\ a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\ a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\ a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\ a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

$\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\ a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\ a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\ a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$ 均为二阶行列式，且分别为三阶行列式中划掉 a_{11}，a_{12}，

a_{13}所在的行与它们所在的列后，剩余元素构成的二阶行列式，可以记为M_{11}，M_{12}，M_{13}，而记$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$，$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}$，$A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}$，于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

由此可见，三阶行列式的表达式，可以以上述方法用二阶行列式来表达. 根据这个规律，四阶行列的表达式也可以利用上述方法用三阶行列式给出，以此类推五阶、六阶、…、n阶都可以用递推的方法定义.

三、n阶行列式的定义

通过上面的分析，我们可以用递推的方法给出n阶行列式的定义.

引进符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为由$a_{ij}(i;j=1,2,\cdots,n)$构成的n阶行列式，常用D来表示. 记M_{ij}为划掉a_{ij}所在的行与列后余下的元素构成的$n-1$阶行列式，称为a_{ij}的余子式；而记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为$a_{ij}(i;j=1,2,\cdots,n)$的代数余子式，我们定义n阶行列式的表达式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

特别的，当$n=1$时，$|a_{11}|=a_{11}$.

例 1 计算$\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$.

解 $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=4\times2-5\times(-3)=23.$

例 2 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -5 \\ -4 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义，有

$$D_4=3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{vmatrix}+(-5)\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=3\left[1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&0\\-2&-1\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}\right]+$$

$$5\left[(-4)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5&7\\4&-2\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}6&7\\-3&-2\end{vmatrix}\right]$$

$$=3[-7+2(-10-28)]+5[(-4)\cdot(-10-28)-(-12+21)]=466.$$

例 3 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix}0&a_{12}&0&0\\0&0&0&a_{24}\\a_{31}&0&0&0\\0&0&a_{43}&0\end{vmatrix}$.

解 由行列式的定义，有

$$D_1=a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0&0&a_{24}\\a_{31}&0&0\\0&a_{43}&0\end{vmatrix}=-a_{12}\cdot a_{24}(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}a_{31}&0\\0&a_{43}\end{vmatrix}$$

$$=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}.$$

四、三角形行列式

形如

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\text{或}\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

的行列式称为三角形行列式，由于

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&0\\a_{21}&a_{22}&0\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&0\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}\,a_{33}.$$

故由 n 阶行列式定义，递推可得

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}.$$

即三角形行列式的值等于其主对角线上元素的乘积.

五、行列式的基本性质

通过对二阶、三阶行列式的定义进行研究，我们得到二、三行列式具有下面的一些性质，并且可以证明这些性质对 n 阶行列式也成立.

命题 1　将行列式各行元素作为各列构成的行列式，称为原行列式的转置行列式；行列式与它的转置行列式的值相等.

注：此命题表明，关于行成立的性质，对于列也成立.

命题 2　交换行列式的两行或两列，行列式改变符号.

推论 1　行列式中如果有两行或两列元素对应相等，则此行列式值为零.

命题 3　若行列式中某行或某列元素有一个公因子，则此公因子可以提到行列式符号外面.

命题 4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（$i=1, 2, \cdots, n$）对于列同样成立.

命题 5　行列式中某一行或列的元素乘上一个数，加到另外一行或列对应元素上去，行列式的值不变.

命题 6　行列式可以表示为其任一行或列的元素，分别乘上它们对应的代数余子式之和. 也称行列式可以按任意行或列展开.

推论 2　行列式中某行或列的元素，分别乘上另一行或列对应元素的代数余子式之和值为零.

命题 6 和推论 2 可归结为如下等式：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}.$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases} D, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}.$$

第二节　行列式的计算和一些应用

问题的提出：

尽管在行列式定义中给出了计算行列式的具体方法，但当行列式阶数较高、构成行列式的元素比较大时，计算量很大，例如，计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 123 & 125 & 135 \\ 321 & 323 & 333 \\ 243 & 245 & 255 \end{vmatrix}.$$

问题的研究：

我们有必要寻找计算行列式的更有效的方法.

本节我们利用行列式的性质，给出行列式计算的一些基本方法和某些应用.

一、行列式的计算

利用行列式的性质可以简化行列式的计算，也可以给出行列式计算的许多方法，我们这里主要介绍两种计算行列式的基本方法：

方法一：利用行列式的性质，将一个行列式化为三角形行列式计算之.

方法二：利用行列式的性质，将行列式的一行或一列化为只有一个非零元素，然后按该行或列展开，转换成计算低一阶的行列式；再将这个低阶的行列式的一行或一列化为只有一个非零元素，然后按该行或列展开，转换成计算更低一阶的行列式，如此进行下去，即可求出行列式的值.

例 1 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

解 利用行列式性质，有

$$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\cdot(-3)\cdot 5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=-2\cdot(-3)\cdot 5\cdot 1=30.$$

例 2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

解 先将第一行的公因子 3 提出来：

$$D=3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3+(-5)\times r_1]{r_2+(-2)\times r_1}3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -7 & -8 \\ 0 & -9 & -18 \end{vmatrix}=27\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=54\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}\xlongequal{c_2-c_3}54\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=54\times 3=162.$$

例 3 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$.

解　$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+5r_1]{r_2-r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-8r_2]{r_3+4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+\frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{vmatrix} = 40.$$

例 4　计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

解　注意到行列式的各列 4 个数之和都是 6，故把第 2，3，4 行同时加到第 1 行，可提出公因子 6，再由各行减去第一行化为上三角形行列式.

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48.$$

例 5　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

解　$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_3]{r_1+2r_3} \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & -5 \end{vmatrix}$

$$=(-1)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 7 & -2 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3+2r_2]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -6-18=-24.$$

例 6 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}=2\times(-1)^{2+5}\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$$=-10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}\xlongequal[r_3+r_1]{r_2+(-2)r_1}-10\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=-10\times(-2)\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 6 & 6 \end{vmatrix}=20(-42-12)=-1\,080.$$

课堂练习

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

二、行列式的一些应用

行列式的应用是广泛的，在后面各章节我们还会看到. 这里我们介绍它的两个应用.

1. 空间直角坐标系下向量的向量积可以用行列式来表示

在空间直角坐标系下，如果分别用 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 表示与三个坐标轴正方向同向的单位向量，则任何一个空间直角坐标系下的向量 a 都可以表示为 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\{a_x, a_y, a_z\}$，设$\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

例 7 设 $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$，求 $\vec{a}\times\vec{b}$.

解 $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k}.$

例 8 设 $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$，$\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，$\vec{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$，求$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

解 先求 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}$，于是

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

2. 克莱姆法则

从引言可知，二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 & (1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (2) \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，它有唯一解，且解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

当它的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，它有唯一解，且解为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

一般地，我们有以下如下定义.

含有 n 个未知数 x_1，x_2，…，x_n 的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}, \tag{1}$$

称为 n 元线性方程组. 当其右端的常数项 b_1，b_2，…，b_n 不全为零时，线性方程组（1）称为非齐次线性方程组，当 b_1，b_2，…，b_n 全为零时，线性方程组（1）称为齐次线性方程组，形式如下

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}. \tag{2}$$

线性方程组（1）的系数 a_{ij} 构成的行列式称为该方程组的系数行列式，记为 D，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

类似地，对于二元和三元线性方程组我们有如下定理.

定理 1（克莱姆法则） 若线性方程组（1）的系数行列式 $D\neq 0$，则线性方程组（1）有唯一解，其解为

$$x_j=\frac{D_j}{D} \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \tag{3}$$

其中 $D_j\,(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是把 D 中第 j 列元素 a_{1j}，a_{2j}，…，a_{nj} 对应地换成常数项 b_1，b_2，…，b_n，而其余各列保持不变所得到的行列式.

证明：（略）.

在解题或证明中，常用到定理 1 的逆否定理：

定理 1′ 如果线性方程组（1）无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

对于齐次线性方程组（2），易见 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定为该方程组的解，称其为齐次线性方程组（2）的零解. 把定理 1 应用于齐次线性方程组（2），可得到下列结论.

定理 2 如果齐次线性方程组（2）的系数行列式 $D\neq 0$，则齐次线性方程组（2）只有零解.

定理 2′ 如果齐次方程组（2）有非零解，则它的系数行列式 $D=0$.

例 9 用克莱姆法则求解线性方程组：