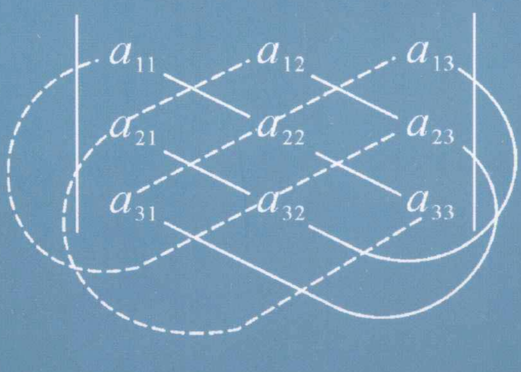
高等学校“十二五”规划教材

X线性代数

Xianxing Daishu

主编 李克娥 吴海涛



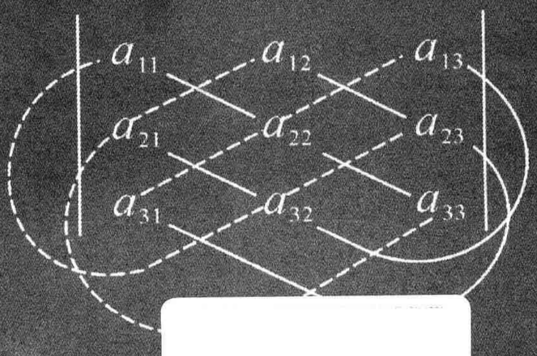
華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

高等学校“十二五”规划教材

X线性代数

ianxing Daishu

主 编 李克娥 吴海涛
副主编 熊 骏 潘大勇 刘利群



華中科技大學出版社
http://www.hustp.com
中国·武汉

内 容 提 要

本书介绍了线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，并结合数学软件 MATLAB，解决了线性代数中的一些计算问题.本书内容主要包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、方阵的特征值与对角化、二次型、线性空间与线性变换、MATLAB 在线性代数中的应用等内容.本书侧重于工程数学的基本方法，注重学生应用能力的培养，注重概念、理论和方法的引入，增加了数学软件的应用.每章都有小结，并配有一定数量的习题和部分习题的参考答案，完成前 6 章教学大约需 40 学时.

本书可作为高等院校理工科、经管类各专业本科生的教材和相关课程教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李克娥 吴海涛 主编.—武汉：华中科技大学出版社，2013.7
ISBN 978-7-5609-9153-5

Ⅰ.线… Ⅱ.①李… ②吴… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 132338 号

线性代数 李克娥 吴海涛 主编

策划编辑：袁 冲 舒 干
责任编辑：史永霞 洪云飞
封面设计：龙文装帧
责任校对：朱 霞
责任监印：张正林
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山 邮编：430074 电话：(027)81321915
录 排：华中科技大学惠友文印中心
印 刷：华中理工大学印刷厂
开 本：787mm×960mm 1/16
印 张：13.25
字 数：290 千字
版 次：2013 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
定 价：23.80 元

华中出版

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118 竭诚为您服务

前　言

线性代数是高等院校理工科和经管类等专业的一门重要基础课程，其基本理论和思想方法在自然科学和工程技术领域有着广泛的应用，是解决许多实际问题的有力工具. 本课程的学习，可为相关专业课程的学习奠定必要的数学基础. 我们参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的《工科数学基础课程教学基本要求》，在吸收同类教材优点的基础上，结合多年的教学经验，编写了这本教材.

本书共八章，主要包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、方阵的特征值与对角化、二次型、线性空间与线性变换、MATLAB 在线性代数中的应用等内容. 本书在线性代数的基本概念、基本理论和基本方法的引入方面，进行了有益的探索，并且在阐明线性代数基本理论的同时，增加了数学软件在线性代数中的应用，有利于培养学生的实际运用能力.

本书由李克娥、吴海涛任主编，熊骏、潘大勇、刘利群任副主编. 第 1 章由潘大勇编写，第 2 章和第 8 章由吴海涛编写，第 3 章和第 7 章由熊骏编写，第 4 章由刘利群编写，第 5 章和第 6 章由李克娥编写. 在本书的编写过程中，何先平教授、成庭荣副教授在百忙之中审阅了书稿，对全书的结构与内容、编写方法等进行了全面指导；周德强、成先娟、曹静、刘瑶环、祝慧敏、杨先山等老师参与了习题答案及资料的收集整理工作，并且提出了许多宝贵意见；当然，本书的顺利付梓也离不开长江大学信息与数学学院的领导和全体教师的热心鼓励和支持，在此一并表示感谢.

由于水平有限，不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以便再版时予以修正.

编　者

2013 年 4 月

目　　录

第1章　行　列　式

行列式是人们从解线性方程组的需要中建立起来的，是线性代数的基本概念，在数学和其他学科中都有广泛的应用. 本章主要概述了全排列及逆序数，对换及其性质，n 阶行列式的定义、性质和计算方法.

1.1　全排列与逆序数

1.1.1　全排列

把 n 个不同的元素排成一列称为这 n 个元素的全排列，n 个不同的元素所有可能的排列的个数称为全排列数，习惯上用 A 表示. 下面来计算 A_n^n.

从 n 个不同的元素中任取一个数放在第一个位置上，有 n 种取法，从剩下的 $n-1$ 个元素中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法，这样继续下去，直到最后剩下一个数放在第 n 个位置上，只有 1 种取法. 于是

$$A_n^n = n(n-1)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1. \tag{1.1}$$

因此，n 个不同元素的全排列数有 $A_n^n = n!$ 种.

例如，用 1、2、3 三个数字，可以排列多少个没有重复数字的三位数？

这个问题相当于：把 3 个数字分别放在百位、十位与个位上，有几种不同的放法？由式(1.1)可知，共有 $A_3^3 = 3! = 6$ 个不同的三位数. 事实上，百位上可以从 1、2、3 中任选一个，所以有 3 种取法；十位上只能从剩下的 2 个数字中选一个，所以有 2 种取法；而个位上只能取最后剩下的一个数字，所以只有 1 种取法. 因此，共有 $3\times 2\times 1 = 6$ 种取法. 这 6 个不同的三位数分别是 123，132，213，231，312，321.

定义 1　由 n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 组成的有序数组 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 称为这 n 个数的一个全排列(或简称 n 级排列). 其中 p_i 为 $1,2,\cdots,n$ 中的某个数，i 表示这个数在排列中的位置，排列的对象称为元素，本节主要讨论 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 所构成的排列.

1.1.2　逆序和逆序数

对于排列，首先规定一个标准排列次序：称 $12\cdots n$ 为标准顺序(即规定左小右大为顺序). 由 $1,2,\cdots,n$ 所构成的任一排列中，若某 2 个元素的排列次序与标准顺序不同，就称为有一个逆序. 例如 1、2、3 排成的 3 级排列

$$123、132、213、231、312、321,$$

其中 123 就是标准顺序排列(顺序),其余的则是非标准顺序排列(有逆序),如在 132 中,3 在 2 的左边,与标准顺序不同,故 132 有 1 个逆序.

一般地,n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个任意排列记作 $p_1p_2\cdots p_n$,若第 i 个位置上的元素 p_i 的左边有 τ_i 个元素比 p_i 大,就说元素 p_i 的逆序是 τ_i. 一个排列中所有逆序的和,称为这个排列的逆序数,记作 τ. 因此,排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数是

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum_{i=1}^{n}\tau_i. \tag{1.2}$$

例 1 求排列 641523 的逆序数.

解 6 级排列的标准顺序为 123456,下面逐一分析各个数字的逆序数:

首位数字 6 的逆序数为 0,4 的逆序数为 1,1 的逆序数为 2,5 的逆序数为 1,2 的逆序数为 3,3 的逆序数为 3.

所以由式(1.2),排列 641523 的逆序数

$$\tau=0+1+2+1+3+3=10.$$

例 2 求排列 $n(n-1)\cdots1$ 的逆序数.

解 n 级排列的标准顺序为 $12\cdots n$.

首位 n 的逆序数为 0,$n-1$ 的逆序数为 1,$n-2$ 的逆序数为 2,…,2 的逆序数为 $n-2$,1 的逆序数为 $n-1$. 所以由式(1.2),排列 $n(n-1)\cdots1$ 的逆序数为

$$\tau=0+1+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

称逆序数 τ 为奇数的排列为奇排列,τ 为偶数的排列为偶排列. 如例 1 中的排列 641523 就是一个偶排列,排列 561423 也是一个偶排列,而排列 461523 就是一个奇排列. 例 2 中排列 $n(n-1)\cdots21$ 的奇偶性与 n 的取值相关:当 $n=4k$ 或 $4k+1$(k 为非负整数)时,$\dfrac{n(n-1)}{2}$ 是偶数,这时排列是偶排列;当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$(k 为非负整数)时,这个排列是奇排列.

1.2 对换及其性质

定义 2 将一个排列中的任意 2 个元素的位置对换,而其余元素不动,得到一个新的排列的过程称为对换. 若对换的是相邻的 2 个元素,则称为相邻对换.

排列 461523 可由排列 641523 进行一次相邻对换得到,也可由排列 561423 进行一次不相邻对换得到,这里排列 641523 和排列 561423 都是偶排列,而排列 461523 是一个奇排列,可见进行一次对换(无论相邻与否)将改变排列的奇偶性. 一般地,我们有:

定理 1 一个排列经过一次对换，排列的奇偶性改变一次.

证明 先证相邻对换的情形. 设排列为 $a_1\cdots a_s abb_1\cdots b_t$，对换 a，b 即经过一次相邻对换后变成排列 $a_1\cdots a_s bab_1\cdots b_t$.

显然，$a_1\cdots a_s$，$b_1\cdots b_t$ 这两个排列的逆序数经过对换 a，b 后并不改变，改变的只是 a 和 b 二者的次序：

若 $a<b$，经过对换后 a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变；

若 $a>b$，经过对换后 a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1.

总之，排列 $a_1\cdots a_s abb_1\cdots b_t$ 的逆序数比经过对换后的排列 $a_1\cdots a_s bab_1\cdots b_t$ 的逆序数增加 1 或减少 1，从而奇偶性发生改变.

再证一般对换的情形. 设排列为 $a_1\cdots a_s ab_1\cdots b_t bc_1\cdots c_l$.

将该排列中的元素 b 作 t 次相邻对换，变成排列 $a_1\cdots a_s abb_1\cdots b_t c_1\cdots c_l$，再将字母 a 作 $t+1$ 次相邻对换，变成 $a_1\cdots a_s bb_1\cdots b_t ac_1\cdots c_l$.

于是可知排列 $a_1\cdots a_s ab_1\cdots b_t bc_1\cdots c_l$ 可经 $2t+1$ 次相邻对换变成排列

$$a_1\cdots a_s bb_1\cdots b_t ac_1\cdots c_l.$$

排列 $a_1\cdots a_s ab_1\cdots b_t bc_1\cdots c_l$ 的奇偶性改变了 $2t+1$ 次，因此奇偶性发生改变.

推论 1 奇排列对换成标准排列的对换次数为奇数，偶排列对换成标准排列的对换次数为偶数.

证明 由定理 1 知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而标准排列是逆序数为零的偶排列，故推论 1 成立.

例 3 证明：$n!(n\geqslant 2)$ 个不同的 n 级排列中，奇排列数和偶排列数相等，各占一半.

证明 设有 p 个奇排列，q 个偶排列，把每个奇排列的最左边 2 个元素对换，由定理 1 可知，p 个奇排列都变成偶排列，于是 $p\leqslant q$. 对于偶排列，类似地作最左边 2 个元素的对换，同理有 $q\leqslant p$. 所以，$p=q$.

1.3 行列式的定义

1.3.1 二元线性方程组和二阶行列式

我们用高斯消元法来解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{1.3}$$

这里 $b_i(i=1,2)$ 是常数项，a_{ij} 是 x_j 的系数$(i,j=1,2)$.

为消去 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列两方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

同样，消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

因此，当 $D=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，可得方程组(1.3)的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.4}$$

式(1.4)中的分子、分母都是 4 个数分两对分别相乘再相减而得的，分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.3)中未知数的四个系数所确定的. 未知数的 4 个系数构成了一个数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.5}$$

为了便于记忆，我们称表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为数表(1.5)所确定的二阶行列式.

定义 3　二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.6}$$

其中，数 $a_{ij}\ (i,j=1,2)$ 称为行列式(1.6)的元素或元. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列. 位于第 i 行与第 j 列交叉处的元素 a_{ij} 称为行列式(1.6)的 (i,j) 元.

二阶行列式(1.6)的右端又称为二阶行列式的展开式，二阶行列式的展开式可以用对角线法则来记忆，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中，把 a_{11} 到 a_{22} 的实线称为主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的虚线称为副对角线. 于是二阶行列式就是这样 2 项的代数和：一项是主对角线上的 2 个元素之积，取正号；一项是副对角线上的 2 个元素之积，取负号. 实际上，二阶行列式的展开式中，每项 2 个元素来自行列式中不同的行和不同的列. 一般地，二阶行列式展开式的每一项可以表示为 $a_{1p_1}a_{2p_2}$，这里 p_1，p_2 是自然数 1,2 的一个排列，因此只有 2 种可能，即 $a_{11}a_{22}$ 和 $a_{12}a_{21}$. 如何确定每项所带的符号呢?观察列标 p_1,p_2 排列的逆序数，容易发现：$a_{11}a_{22}$ 列标排列 12 的逆序数 $\tau_1=0$；$a_{12}a_{21}$ 列标排列 21 的逆序数 $\tau_2=1$. 因此，逆序数是偶数时取正号，逆序数是奇数时取负号，这样二阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=(-1)^{\tau_1}a_{11}a_{22}+(-1)^{\tau_2}a_{12}a_{21}.$$

这便是对角线法则的意义.

利用二阶行列式的定义，式(1.4)中 x_1,x_2 的分子、分母也可以写成二阶行列式：

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2;\quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，式(1.4) 表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1.7}$$

例 4 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ x-3y=-2. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-7\neq 0,\quad D_1=\begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}=-19,\quad D_2=\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-11,$$

因此，方程组有唯一解

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-19}{-7}=\dfrac{19}{7}, \\ y=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{-11}{-7}=\dfrac{11}{7}. \end{cases}$$

1.3.2 三元线性方程组和三阶行列式

三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.8}$$

同样可以逐次消元，消去 x_3，x_2 得

$$\begin{aligned}&(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ =\ & b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3.\end{aligned}$$

记 $D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，当 $D\neq 0$ 时，可得

$$x_1=\frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3). \tag{1.9}$$

类似地，可得

$$x_2=\frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}), \tag{1.10}$$

$$x_3=\frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}).\quad(1.11)$$

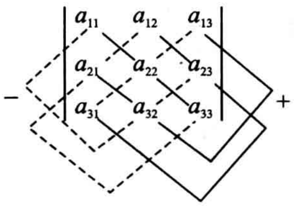
式(1.9) ~ 式(1.11) 便是三元线性方程组(1.8) 的求解公式，要记住公式是较困难的. 注意到这个线性方程组的系数对应一个三行三列的数表，类似于二阶行列式.

定义 4 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

(1.12)

上述定义表明三阶行列式是 6 项乘积的代数和，每项均来自不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号，其规律是如下图所示的对角线法则：实线上的 3 元素之积冠以正号，虚线上的 3 个元素之积冠以负号.



如何理解对角线法则呢?

首先，我们看到式(1.12) 中，每一项都是不同行不同列的 3 个元素之积，行标依次为 1,2,3，而列标是数 1,2,3 的一个排列. 由于 1,2,3 的全排列数是 3!，因此展开式共有 6 项，且各项均可写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，这里 p_1,p_2,p_3 是自然数 1,2,3 的一个排列. 其次，各项的符号与列标排列的逆序数相关. 事实上，展开式每项列标的排列中，排列 123,231,312 的逆序数分别是 $\tau(123)=0,\tau(231)=2,\tau(312)=2$，且都是偶数，排列是偶排列；排列 132,213,321 的逆序数分别是 $\tau(132)=1,\tau(213)=1,\tau(321)=3$，且都是奇数，排列是奇排列. 这样，展开式中各项的符号可以表示为 $(-1)^{\tau}$，其中 τ 是列标排列的逆序数. 因此，三阶行列式(1.12) 可以表示为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

将方程组(1.8) 中常数项 b_1、b_2、b_3 依次替换 D 中的第一列元素(x_1 的系数)、第二列元素(x_2 的系数)、第三列元素(x_3 的系数) 所得的行列式分别为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

当 $D \neq 0$ 时,方程组(1.8)有公式解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{1.13}$$

有关线性方程组更进一步的讨论见第 2 章克莱姆(Cramer)法则和第 3 章相关内容.

例 5 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则,有

$$\begin{aligned} D &= 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3-2\times1\times3-1\times(-4)\times5-2\times3\times2 \\ &= 30+2-24-6+20-12=10. \end{aligned}$$

例 6 求解方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

解 由式(1.12),方程左端三阶行列式

$$D = 18+3x^2+4x-12-9x-2x^2 = x^2-5x+6,$$

于是,原方程化为

$$x^2-5x+6=0,$$

解得 $x=2$ 或 $x=3$.

特别提示:对角线法则只适用于二阶行列式和三阶行列式.

下面我们将行列式的定义推广到 n 阶的情形.

1.3.3 n 阶行列式

为了定义 n 阶行列式,先来回顾二阶行列式、三阶行列式的结构.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2},$$

其中,p_1,p_2 是自然数 1,2 的一个排列,τ 是列标 p_1,p_2 排列的逆序数.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3},$$

其中,p_1,p_2,p_3 是自然数 1,2,3 的一个排列,τ 是列标 p_1,p_2,p_3 排列的逆序数.

类似地,可以把行列式推广到一般的情形.

定义 5 由 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix},$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积,并冠以符号$(-1)^{\tau}$,得到形如

$$(-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

的项,其中,$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,τ 是列标 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 排列的逆序数. 所有项(共有 $n!$项) 的代数和

$$D = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式,记作

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}, \tag{1.14}$$

或简记为 $\det(a_{ij})$,其中 a_{ij} 为行列式 $\det(a_{ij})$ 的(i,j)元,$p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,τ 是列标 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 排列的逆序数.

特别规定,一阶行列式 $D_1 = |a| = a$. 注意这里的行列式记号不要与绝对值记号混淆.

例 7 在 6 阶行列式中,项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 应冠以什么符号?

解 项 $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ 通过交换元素的位置,可以使行标按照从小到大的标准顺序排列,它的值及符号不变,得

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}.$$

而列标的排列为 431265,易知

$$\tau(431265) = 6.$$

因此,这一项的逆序数是偶数,故在这个 6 阶行列式的展开式中该项应冠以“+”号.

例 8 用定义计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 在这个行列式中,当 $i > j$ 时,有 $a_{ij} = 0$,即 D_n 中可能不为 0 的元素 a_{ij} 的下标满足 $i \leqslant j$,我们称这种行列式为上三角行列式(或上三角形行列式). 在 D_n 的展开式

$$D_n=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

中，当 $p_i<i$ 时，$a_{ip_i}=0$，所以展开式中必有 $p_1\geqslant 1,p_2\geqslant 2,\cdots,p_n\geqslant n$.

在所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中，能满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12\cdots n$，所以 D_n 中可能不为零的项只有一项 $(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，此项的符号 $(-1)^{\tau}=(-1)^0=1$，即得

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\0&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1,n}\\0&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\tau}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

这表明，上三角行列式等于其主对角线上的 n 个元素之积.

特别地，若满足 $i\neq j$ 时 $a_{ij}=0$，则行列式称为对角行列式(空出的元素都是0，省略不写)，易得

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\&&&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.\tag{1.15}$$

在行列式中，当 $i<j$ 时，有 $a_{ij}=0$，即 D_n 中可能不为零的元素 a_{ij} 的下标必满足 $i\geqslant j$，称这种行列式为下三角行列式(又称下三角形行列式)，同理可得

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&&&\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.\tag{1.16}$$

副对角线行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix}&&&a_1\\&&a_2&\\&\iddots&&\\a_n&&&\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1a_2\cdots a_n.\tag{1.17}$$

定理 2 n 阶行列式也可定义为

$$D_n=\sum(-1)^{\tau}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},\tag{1.18}$$

其中 τ 为排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数.

证明 由行列式定义，$D=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，$\tau$ 为 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数，记

$$D_n=\sum(-1)^{\tau}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

取 D 中任一项 $(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$，其行标 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为标准排列，逆序数为 0，记列标的逆序数为 $\tau=\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)$. 对换 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 得

$$a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

对换后，这一项的值不变. 由于该项中 2 元素的次序对换，使行标排列与列标排列同时作了一次对换，设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 τ_1，则 τ_1 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 τ_2，则 $(-1)^{\tau_2}=-(-1)^{\tau}$，故 $(-1)^{\tau}=(-1)^{\tau_1+\tau_2}$. 于是，

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau_1+\tau_2}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}.$$

这就表明，对换乘积中 2 元素的次序，行标排列与列标排列同时作了相应的对换，则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性. 经过一次是如此，经过多次对换还是如此. 这样经过若干次对换，使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$（逆序数为 τ）变为标准排列（逆序数为 0），行标排列则相应地从标准排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，其逆序数为 τ_3，则有

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^{\tau_3}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

又若 $p_i=j$，则 $q_j=i$（即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_jj}$）. 可见排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 所唯一确定.

由此可知，对 D 中任一项 $(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，$D_n$ 中有且仅有一项 $(-1)^{\tau}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 与之对应并相等. 同理，对 D_n 中的任一项，D 中也有且仅有一项与之对应并相等，即 D 与 D_n 中的项可以一一对应并相等，故 $D=D_n$.

由上面定理的证明，我们有如下结论.

推论 2　n 阶行列式的任一项可表示为

$$(-1)^{\tau_1+\tau_2}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},\tag{1.19}$$

其中 $p_1\cdots p_n$，$q_1\cdots q_n$ 分别为行标排列和列标排列，它们的逆序数分别为

$$\tau_1=\tau(p_1\cdots p_n),\quad \tau_2=\tau(q_1\cdots q_n).$$

当行标或列标呈标准排列时，有 $\tau_1=0$ 或 $\tau_2=0$，便得到前面的定义 5 和定理 2.

例 9　证明

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}=0.$$

证明　由定义知，$D=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$，其中 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 是自然数 1,2,3,4,5 的一个排列，τ 是列标 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 排列的逆序数. 若 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}\neq 0$，由题设知 p_3,p_4,p_5 只能等于 4 或 5，从而 p_3,p_4,p_5 中至少有两个相等，这与 $p_1,p_2,p_3,$

p_4,p_5 是自然数 1,2,3,4,5 的一个排列矛盾. 故 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}=0$,于是 $D=0$.

1.4 行列式的性质

由 n 阶行列式的定义知,当 n 较大时,直接利用定义计算行列式,一般来说计算量是很大的. 因此探讨行列式的性质,不仅可以用来简化行列式的计算,而且在理论研究中也是必不可少的.

先介绍行列式的一个重要性质.

把行列式 D 的行、列互换所得到的行列式称为 D 的转置行列式,记作 D^{T},即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明 将 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式记作

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由定义知,

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}.$$

于是由定理 2 推出

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n}=D^{\mathrm{T}}.$$

由性质 1 可知,行列式中行与列具有同等的地位,对行成立的性质,对列也成立,反之亦然. 以下我们仅证明行的性质,列的性质类似可得.

性质 2 互换行列式的两行(或列),行列式的值变号.