华罗庚金杯

少年数学辅导教程

HUALUOGENGJINBEI
SHAONIANSHUXUE
FUDAOJIAOCHENG

中国少年报培训中心/编

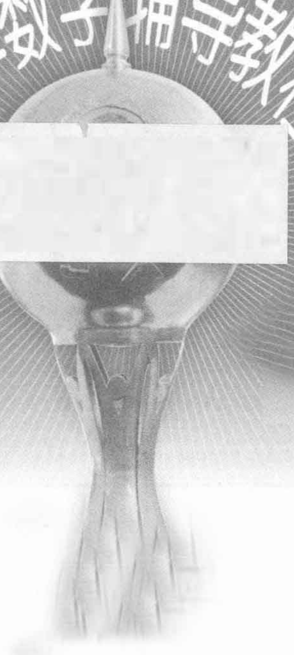
初一年级

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年兒童出版社

华罗庚金杯

少年数学辅导教程

HUALUOGENGJINBEI
SHAONIANSHUXUE
FUDAOJIAOCHENG



中国少年报培训中心／编

从书总主编 ＝ 邵二湘

{初一年级}

本册主编
蒋学瀛

编　写
蒋学瀛

中国少年儿童新闻出版总社
中国少年兒童出版社

图书在版编目(CIP)数据

华罗庚金杯少年数学辅导教程. 初中一年级/蒋学瀛主编;蒋学瀛编写.—北京:中国少年儿童出版社,2006.3

ISBN 7-5007-7969-0

Ⅰ. 华... Ⅱ. ①蒋... ②蒋... Ⅲ. 数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 006307 号

HUA LUO GENG JIN BEI SHAO NIAN SHU XUE FU DAO JIAO CHENG

出版发行:中国少年儿童新闻出版总社
中国少年儿童出版社
出版人:海飞
执行出版人:赵恒峰

策划:张玲 司布
装帧设计:刘静
责任编辑:许碧娟
责任校对:鸿玉
责任印务:金文涛

社址:北京市东四十二条 21 号
邮政编码:100708
总编室:010-64035735
传真:010-64012262
发行部:010-84037667 010-64032266-8269
http://www.ccppg.com.cn
E-mail:zbs@ccppg.com.cn

印刷:河北新华印刷一厂
经销:新华书店

开本:880×1230 1/32 **印张:**8 **插页:**1
2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月河北第 1 次印刷
字数:128 千字 印数:15000 册

ISBN 7-5007-7969-0/G·5987 **定价:**12.00 元

出版说明

“华罗庚金杯”少年数学邀请赛，是为了纪念世界数学大师华罗庚教授，在1986年由中国少年报社(现为中国少年儿童新闻出版总社)、中国优选法统筹法与经济数学研究会、中央电视台青少中心等单位联合发起创办，由中国少年报承办的全国性赛事，至今已20年了。20年来，全国已有数千万计的中小学生参与了这一赛事。这项活动大大激发了同学们学习数学的兴趣，普及了数学科学知识，弘扬了华罗庚教授热爱祖国、献身科学的爱国主义精神，为提高民族素质做出了积极的贡献。

中国少年报社培训中心是因承办“华杯赛”的需要而建立的，主要从事“华杯赛”的组织、培训工作。目前市场上林林总总的培训辅导书以及各种名目的数学竞赛繁多，各参赛城市教练员和选手均有无所遵循之感。他们纷纷要求我们编写一套相对稳定，实用性、针对性强，老师、学生都容易上手的“华杯赛”培训辅导用书。因此，我们编写了这套《华罗庚金杯少年数学辅导教程》。

这是一套完整的数学培训教材，是专为小学二至六

年级，初中一、二年级的学生开展数学课外活动而编写的；旨在全面提高中小学生的数学素质，培养他们的创新精神和解决实际问题的能力。

本丛书是多年来培训工作的结晶，全部由来自北京及其他参赛城市从事“华杯赛”组织、培训工作多年的特级教师、教研员、金牌教练员和教学一线的老师编写，由各城市教研员及专家教授把关。它以实际教学经验为主，博采众家之长；以“华杯赛”为主，同时包容了其他赛事。和同类书相比，本书权威性、实用性、趣味性更强，更便于老师培训辅导和学生自学。

本书是作者将自己从事培训、教学工作多年的教案、讲稿经过加工整理，并几易其稿编写而成的，最后又经有四十余年教学经验和十几年“华杯赛”命题工作经验的邵二湘老师统稿成书，在此向他们表示衷心感谢！

最后，恳请广大读者将使用中的意见或建议及时反馈给我们，以便我们进一步完善本书。

中国少年报社培训中心

目 录

第1讲　问题与方法

【培训提示】

1. 本讲将通过对具体问题的分析与研究，初步领会数学思想在解题过程中所发挥的重要作用。

2. 对数学思想的领悟和运用是提高学生学习兴趣、培养学生的创新意识及学习能力的重要途径。

3. 后面各讲均以培养学生的创新意识及创造能力为主，目的是使学生能正确地运用数学思想来指导解题。

【培训示例】

例1　有一个电子钟，每到正点响一次铃，每走9分钟亮一次灯。中午12点整，电子钟既响铃又亮灯，问下一次既响铃又亮灯是几点钟？

[**分析与解**]由题意可知，每到整点响一次铃，即指每过60分钟响一次铃，这样问题就转化为求60与9的最小公倍数的纯数字问题。

60与9的最小公倍数是180，由180÷60＝3(小时)可知，每隔3小时，电子钟既响铃又亮灯。

由已知中午 12 点整既响铃又亮灯，则知下一次既响铃又亮灯的时间是下午 3 点整。

例 2 求 $1998^{1999}+1999^{1998}$ 的个位数字。

[分析与解]我们知道整数在进行加法、乘法运算时，其和、积的末位数字仅与参加运算的加数、乘数的末位数字有关。这样问题就转化为研究 1998^{1999} 和 1999^{1998} 的末位数字问题，亦即 8^{1999} 和 9^{1998} 的末位数字问题，使问题得到了简化。

下面我们进一步研究 8^{1999} 和 9^{1998} 的末位数问题。由于整数的末位数字只可能是 0，1，2，3，…，9 这 10 个数字中的一个，我们来分别研究它们乘方的所有可能情况，从而得出确定整数乘方的末位数字的一般规律和方法。

首先，当末位数字为 0，1，5，6 时，其若干次乘方的末位数仍为 0，1，5，6。而对末位数字为 2，3，4，7，8，9 时，我们看下表：

a^1	2	3	4	7	8	9
a^2	4	9	16	49	64	81
a^3	8	27	64	343	512	729
a^4	16	81	256	2401	4096	6561
a^5	32	243	1024	16807	32768	59049

由此再写出 a^6，a^7，…，不难发现其乘方的末位数字呈周期性变化，且有下面一般性规律：

对于任一整数 a，a^{4n+k} 与 a^k 有相同的个位数字（n 与 k 都是自然数），据此我们给出本题的解法：

$\because$ 1998^{1999}与8^{1999}的个位数字相同，

而 $8^{1999}=8^{4\times499+3}$与$8^3$的个位数字相同，

知 8 的乘方的末位数字呈 8,4,2,6 周期性变化。

$\therefore$ 8^3的末位数字为 2，即1998^{1999}的个位数字为 2。

又$\because$ 1999^{1998}与9^{1998}的个位数字相同，

而 $9^{1998}=9^{4\times499+2}$与$9^2$的个位数字同为 1，

$\therefore$ 1999^{1998}的个位数字为 1。

因此 $1998^{1999}+1999^{1998}$的个位数字为 $2+1=3$。

注:例 1 是将一个实际的问题转化为一个纯 数字问题，例 2 则是将复杂的问题转化为简单问题的组合。可知，把已知条件、求解和论证的结果进行转化，寻求解决问题的思路和方法，是解决数学问题和实际问题的基本途径。在例 2 中，我们采用了对末位数字乘方的所有可能的情况进行观察研究，通过对具体情况的探索分析，从中发现某种规律，进而利用这种规律去解决问题，这种类比、归纳的思想是分析和解决问题的一种行之有效的思想方法。

例 3 观察数列 1,2,5,12,29,70,169,( )的规律，填上最后项。

[**分析与解**]此数列各项之间的关系并不明显，可先研究前三项 1,2,5 中的最后一项 5 与 1,2 两数的运算关系：

$$5=1\times3+2=1^2+2^2=1+2\times2$$

再看 2,5,12 中 12 与 2,5 符合哪种运算关系：

$$12\neq2\times3+5,12\neq2^2+3^2,\text{而 }12=2+5\times2$$

又 $$29=5+12\times2$$

由此可得： 第 1 项+第 2 项×2=第 3 项

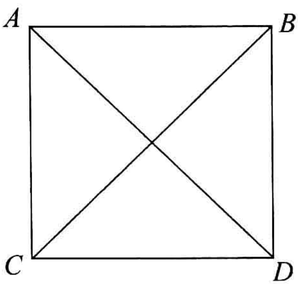
第 2 项＋第 3 项×2＝第 4 项

第 3 项＋第 4 项×2＝第 5 项

依次类推，可知

最后一项＝70＋169×2＝408

例 4 试推断 m 个球队进行单循环比赛时，总的比赛场数 n 与 m 的关系（单循环比赛即参加比赛的每个队都与其他所有队各赛一场）。



[分析与解]本题先由 $m=3$，4，5 具体进行研究，探索一般规律。如以 $m=4$ 个队来研究（假设此 4 个队分别为 A、B、C、D），如左图：画一个四边形，其中 4 个顶点分别代表 A、B、C、D 4 个队，因为每两队之间都要赛一场，所以每两点之间都要画一条线段，数出这些线段的条数，知需要比赛 6 场。利用同样的方法可求出 3 个队需赛 3 场，4 个队需赛 6 场，5 个队需赛 10 场，6 个队需赛 15 场……

$$3=2+1=\frac{3\times(3-1)}{2}$$

$$6=3+2+1=\frac{4\times(4-1)}{2}$$

而

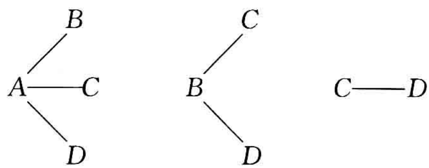
$$10=4+3+2+1=\frac{5\times(5-1)}{2}$$

$$15=5+4+3+2+1=\frac{6\times(6-1)}{2}$$

……

据此可推断 m 个队的比赛场数 $n=\frac{m(m-1)}{2}$。

注:本题在研究 A,B,C,D 4 个队的比赛场次时,还可用“网络法”解决,即



得出共比赛 $3+2+1=6$(场)。

这两种方法均是用数形结合的思想方法来进行的,它以数式与形的转化、结合为特点,具有直观性,有利于问题的研究和解决。

例 5 从 1 到 100 的自然数中,每次取两个数,要使它们的和大于 100,这种取法有多少种?

[**分析与解**]自 1 至 100,这 100 个不等的数中,每次取出两个,其中必有一个较小的。又这两数之和要大于 100,我们可以列举较小的数所有可能情况来探索规律:

较小数是 1 的,有 1 种取法,即(1,100);

较小数是 2 的,有 2 种取法,即(2,99),(2,100);

……

较小数是 50 的,有 50 种取法,即

(50,51),(50,52),(50,53),…,(50,100);

较小数是 51 的,有 49 种取法,即

(51,52),(51,53),(51,54),…,(51,100);

……

较小数是 99 的，有 1 种取法，即(99，100)；

所以共有

$$1+2+3+\cdots+49+50+49+\cdots+2+1$$
$$=2\left[\frac{(1+49)\times 49}{2}\right]+50=2500(\text{种})$$

注：本题的解法为穷举法，亦称枚举法。解题中常常要把讨论的对象进行恰当的分类，分类原则是不重不漏，分类方法因题而异。因此，此法是分类讨论的一种思想方法，在论证和含有字母的问题求解中，显得尤为重要。

例 6　在 1 到 200 的整数中，既不能被 2 整除又不能被 3 整除的整数有多少个？

[分析与解]本题所求可转化为从 1 到 200 的整数个数中，减去所有能被 2 或 3 整除的所有整数的个数。

在 1 到 200 的整数中，能被 2 整除的整数为 $2\times1, 2\times2, \cdots, 2\times100$，共 100 个；

在 1 到 200 的整数中，能被 3 整除的整数为 $3\times1, 3\times2, \cdots, 3\times66$，共 66 个；

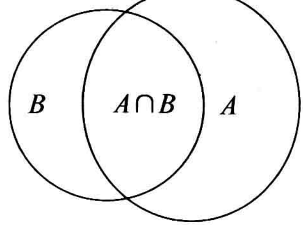
而在 1 到 200 的整数中，既能被 2 整除又能被 3 整除，即能被 6 整除的整数为：$6\times1, 6\times2, \cdots, 6\times33$，共 33 个。而此 33 个既在第一种情况又在第二种情况里。

所以，在 1 到 200 的整数中，既不能被 2 整除又不能被 3 整除的整数个数为：

$$200-100-66+33=67\ \text{个。}$$

注：本题图示如下页图：其中右圆 A 表示在 1 到 200 的整数中能被 2 整除的整数的个数；左圆 B 表示在 1 到 200 的整数中能被

3 整除的整数的个数;两圆的公共部分 $A\cap B$ 表示既能被 2 整除又能被 3 整除的整数个数。两圆合起来的部分则表示所有既能被 2 整除又能被 3 整除的整数个数,用 $A\cup B$ 表示。如果用 $n(A)$表示 A



中元素的个数,则有 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$。因为我们在计数时作合并运算常会把重复的部分多算,作排除运算时常会把重复的部分多减,而用这种图示方法能有效地避免这类问题。

例 7 $\frac{1}{?}+\frac{1}{?}+\frac{1}{?}+\frac{1}{?}+\frac{1}{?}+\frac{1}{?}=1$,请找出 6 个不同的自然数,分别填入 6 个问号中,使这个等式成立。

[分析与解]易知,$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$,下面的问题就是$\frac{1}{2}$能否拆成两个分子为 1,分母为自然数的两个式子的和。利用一个基本等式$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$,取 $n=2$,有$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$,此时 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$。再取 $n=3$,有$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$。再取 $n=4$,有$\frac{1}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{20}$,此时已有 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$。再取 $n=6$,可得$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$。

所以 $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$

即可找出 2,5,20,12,7,42 这 6 个不同的自然数分别填入 6 个

问号中，使等式成立。

注:(1)本题中分子为 1 分母为自然数的分数称为单位分数或埃及分数，它在很多问题中经常出现。

(2)基本等式或基本等式的变形在分数化简及运算中经常使用。

(3)本题结果不惟一，请读者考虑 n 的取值中为什么不能取 $n=5$？

例 8 将 $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{6},-\frac{1}{12},\frac{1}{20},-\frac{1}{30},\cdots$，按一定规律排成下表：

$$1$$

$$-\frac{1}{2}\qquad\frac{1}{6}$$

$$-\frac{1}{12}\qquad\frac{1}{20}\qquad-\frac{1}{30}$$

$$\frac{1}{42}\qquad-\frac{1}{56}\qquad\frac{1}{72}\qquad-\frac{1}{90}$$

$$\frac{1}{110}\qquad-\frac{1}{132}\qquad\frac{1}{156}\qquad-\frac{1}{182}\qquad\frac{1}{210}$$

……

请问:(1)第 199 行自左向右第 8 个数是多少?

(2)$\frac{1}{9702}$是否是上表中的某一项，若是，应在第几行的哪个位置?

[分析与解]通过观察可发现这个数串中奇号项为正，偶号项为负，且从第 2 项起每项的绝对值为$\frac{1}{n(n-1)}$($n=2,3,$

4,…),而且第 m 行有 m 个数($m=1,2,3,\cdots$),那么,问题(1)就是根据数所在的位置去判断它在数串中的项数,求此数。问题(2)则是判断该数在数串中的项数,据此确定其在表中的位置。

解:(1)从第 1 行到第 198 行结束,共计有 $1+2+3+\cdots+197+198=\frac{198\times(198+1)}{2}=19701$ 个数

因此,第 199 行自左向右第 8 个数是 $19701+8=19709$ 项,是奇号项,该数值为$\frac{1}{19709\times19708}$。

(2)∵ $\frac{1}{9702}=\frac{1}{98\times99}$,

∴ 此数是上表数串中的第 99 项,由 $1+2+3+\cdots+12+13=\frac{13\times14}{2}=91$,知第 13 行中第 13 个数为数串中的第 91 项,因此第 99 项应为第 14 行中从左向右的第 8 个数,即$\frac{1}{9702}$是上表中第 14 行自左向右的第 8 个数。

注:通过本例可进一步看出,通过对简单、特殊情况的观察、探索、分析来寻求解题规律和思路是行之有效的。

【培训检测】

练习一

1. 观察数列 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,( )的规律,填上最后项。
2. 有一串分数,按下列规律排列:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots$$

请问第 100 个分数是几分之几?

3. 已知$1+2+3+\cdots+10=55$

$1+2+3+\cdots+100=5050$

$1+2+3+\cdots+1000=500500$

……

猜想:$1+2+3+\cdots+10^m=$________

4. 计算:$1+(-2)+3+(-4)+\cdots+(-1)^{n+1}\cdot n(n=1,2,3,\cdots)$。

5. 分子小于6而分母小于60的不可约真分数有多少个?

6. 计算:

$$\left.1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{\ddots}{1-\cfrac{1}{x}}}}}\right\}\text{共 1999 层}$$

7. 试求 $1^2,2^2,3^2,\cdots,123456789^2$ 的和的个位数数字。

8. A、B、C、D 4 人进行乒乓球比赛,他们每人之间至少比赛一场,比赛结果是:A 三胜一败,B 一胜两败,C 三胜。请问 D 几胜几败?

9. 计算:$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}+\cdots+\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{59}{60}$的和。

10. 观察数列$\frac{1}{1},-\frac{1}{2},\frac{2}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{3}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{2}{4},-\frac{3}{4},\cdots$,请问: