职业高级中学课本

数学（理工类）下册

教学参考书

人民教育出版社

前　言

为了帮助职业高中教师更好地掌握文化课教材教学的目的、内容、要求，研究和改进教学方法，提高职业高中文化课教学质量，根据人民教育出版社编辑出版的职业高级中学语文、数学(理工类)、物理(理工类)、化学课本，我们编写了相应的教学参考书.

本书是配合职业高级中学数学课本(理工类)下册编写的教学参考书．本书在编写过程中力求体现职业高中(理工类)的教学的特点，注意实用性，便于教师在教学中参考利用．对于课本中每一部分教材提出了教学目的要求，教学建议，并配有习题答案与提示．每章后面还编写了检查测验题，并附有答案，可供参考使用．

参加本书编写的有蔡上鹤、李录、张景源、齐秀华、李文成、彭风珍，徐德森、王志和、聂琦、高存明等．齐秀华对全书进行了统稿，高存明为本书责任编辑.

本书在编写过程中，得到了辽宁教育学院的热情支持，关成志同志提出了很多宝贵意见，在此一并致谢.

职业高级中学课本数学(理工类)

教学参考书编写组.

1988年12月

前言
第五章　数列、极限、数学归纳法……1
　I　目的要求……1
　II　教材分析……
　III　课时分配……
　IV　教学建议……
　　一　数列……
　　二　数学归纳法……19
　V　习题答案、提示和解答……24
　　附　检查测验题……54
第六章　不等式……58
　I　目的要求……58
　II　教材分析……58
　III　课时分配……59
　IV　教学建议……60
　V　习题答案、提示和解答……67
　　附　检查测验题……80
第七章　复数……84
　I　目的要求……84
　II　教材分析……84
　III　课时分配……86
　IV　教学建议……86
　　一　复数的概念……87

二 复数的运算……………………………………………93
三 复数的三角形式……………………………………98
V 习题答案、提示和解答……………………………104
附 检查测验题…………………………………………139
第八章 排列、组合、二项式定理……………………143
I 目的要求………………………………………………143
II 教材分析……………………………………………143
III 课时分配……………………………………………145
IV 教学建议……………………………………………145
一 排列与组合…………………………………………147
二 二项式定理…………………………………………162
V 习题答案、提示和解答……………………………167
附 检查测验题…………………………………………180
第九章 直线的方程……………………………………184
I 目的要求………………………………………………184
II 教材分析……………………………………………184
III 课时分配……………………………………………186
IV 教学建议……………………………………………186
一 有向线段、定比分点………………………………187
二 直线的方程…………………………………………192
三 两条直线的位置关系………………………………199
V 习题答案、提示和解答……………………………206
附 检查测验题…………………………………………216
第十章 圆锥曲线………………………………………224
I 目的要求………………………………………………224
II 教材分析……………………………………………224
III 课时分配……………………………………………225
IV 教学建议……………………………………………226

一　曲线和方程……231
二　圆……241
三　椭圆……244
四　双曲线……249
五　抛物线……253
六　坐标轴的平移……256
V　习题答案、提示和解答……261
附　检查测验题……291
第十一章　参数方程、极坐标……297
I　目的要求……297
II　教材分析……297
III　课时分配……298
IV　教学建议……299
一　参数方程……299
二　极坐标……308
附录……318
一　关于曲线的参数方程……318
二　曲线的极坐标方程的定义……321
三　关于极坐标化直角坐标公式的证明……323
四　极坐标系中曲线的对称性……324
V　习题答案、提示和解答……325
附　检查测验题……335

第五章　数列、极限、数学归纳法

I　目的要求

1．使学生理解数列的有关概念，掌握等差数列与等比数列的概念、通项公式、前 n 项和的公式，并能够运用这些知识解决一些问题．

2．使学生了解数列极限的意义，掌握数列极限的四则运算法则；会求公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列前 n 项和的极限，会将循环小数化成分数．

3．使学生了解数学归纳法的原理，并能用数学归纳法证明一些简单问题．

4．通过上述内容的教学，使学生进一步认识特殊和一般、有限和无限、近似和精确的辩证关系．

II　教材分析

本章内容包括“数列与数列的极限”和“数学归纳法”两大节．数列与数列的极限是初等数学、高等数学两者共同具有的重要内容，它们不仅有着广泛的实际应用，而且是学生进行计算、推理等基本训练、综合训练的重要题材．数学归纳法是一种重要的数学证明方法，在进一步学习数学中要经常用到．

本章第一大节“数列与数列的极限”首先通过实例说明数列的意义及数列的项、通项公式等有关概念（不讲递推公式确

定的数列)，接着讲了两种特殊的数列——等差数列与等比数列，介绍了它们的定义、通项公式以及前 n 项和的公式．作为选学内容，在例、习题中介绍了国民经济各部门常常用来确定各种产品尺寸型号的分级参数系列——优先数系中的基本系列 $R5$ 数系和 $R10$ 数系．然后，教材采用由特殊到一般的方法介绍了数列极限的概念及其四则运算法则，并结合实例给出了无穷等比(公比的绝对值小于 1)数列各项的和的定义、计算公式以及化循环小数为分数的方法．

第二大节“数学归纳法”通过证明等差数列的通项公式引出这一方法后，说明了数学归纳法的两个步骤及其意义，并且以反例来强调这两个步骤缺一不可，然后用数学归纳法证明了一些代数、几何、三角方面的命题(几何、三角方面的命题证明仅供选学)．

把“数列与数列的极限”安排在 5 种基本函数基础知识的后面，这是因为数列可看成定义在自然数集 N 或它的有限子集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的一列函数值．在前一情况下的数列即无穷数列，在后一情况下的数列即有穷数列．研究无穷数列需要用到有关极限的知识，所以把“数列”与“数列的极限”安排在一起．至于前一部分“数列”，主要是学习两种常见的特殊数列即等差数列与等比数列的通项公式及前 n 项和的公式，内容比较简单，在解决实际问题时却常要用到，而且可以用来巩固以前学过的代数知识．

“数学归纳法”紧接在“数列与数列的极限”之后，有利于先用不完全归纳法得出数列的有关公式，再用数学归纳法对这些公式进行证明．这既可使对数列的学习深化一步，又可

使数学归纳法的引入显得自然．此外，适当提早学习并反复运用数学归纳法，有助于学生更好地掌握这一方法．

本章教材的重点是数列的概念，等差数列、等比数列的通项公式与前 n 项和的公式，数列极限的概念以及数学归纳法．其中数列极限的概念与数学归纳法又是本章的难点．

III　课时分配

本章教学时间约需 20 课时，具体分配如下(仅供参考)：

5.1	数列	约 2 课时
5.2	等差数列	约 4 课时
5.3	等比数列	约 3 课时
5.4	数列的极限	约 4 课时
5.5	数学归纳法	约 2 课时
5.6	数学归纳法的应用举例	约 2 课时
小结和复习		约 3 课时

IV　教学建议

1．数列可以没有通项公式(这正象函数不一定有解析式一样)，可以有且只有一个通项公式，也可以有多于一个的通项公式，要分别举例说明．对于后者，只要求学生写出一个通项公式就行了．

2．使学生理解等差数列的公差 d 的性质，能灵活运用等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 以及前 n 项和的公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，并懂得在 a_1，d，n，a_n，S_n 这

5 个数中，知道了其中的 3 个，就能求得其余 2 个. 此外，还要让学生掌握等差中项的概念与公式 $A=\frac{a+b}{2}$，并通过综合性练习学会灵活运用.

3. 在教学等比数列的概念、通项公式以及等比中项的概念与公式 $G=\pm\sqrt{ab}$ 时，由于学生已通过学习等差数列积累了一些经验，所以应该对比着等差数列的有关情况来进行教学. 至于推导前 n 项和的公式，也与等差数列的情况一样，基本思想在于消除等号右边的多项式中的省略号；所以在等比数列的情况下，要在等式 $S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+aq^{n-1}$ 的两边都乘以公比 q.

4. 极限的概念很难理解，研究方法又很特殊，教学时必须从实例出发，对它们进行细致的剖析，充分利用图形与表格，抓住关键之处，在学生丰富的感性认识的基础上，揭示出极限概念的内容和极限方法的实质；在建立极限概念以后，要立即应用到有关问题的讨论上去. 其次，在教学方法上必须遵循由浅入深，由简到繁，由具体到抽象的认识路线，使学生能由直观逐步上升到用数学语言准确叙述极限概念，并能用简明的数学符号把它表达出来，形成科学的概念和方法. 总之，对于这一教学内容，应当以直观性的描述为主，以掌握方法、计算、应用为主，对理论上的抽象性、严谨性的要求应尽量低一些，更不宜为追求理论知识的完整而扩大教学内容的范围.

5. 在教学数学归纳法时，应把观察试验、探索命题且进行证明或反驳作为一个整体的逻辑思维的训练过程；要使学

生认识到不完全归纳的缺陷，认识到数学归纳法的两个步骤缺一不可,从而理解数学归纳法的实质.

一　数　　列

(一) 教学要求

1. 使学生理解数列的有关概念,掌握等差数列与等比数列的定义、通项公式、前 n 项和的公式，并能运用这些知识解决一些问题.

2. 使学生了解数列极限的意义,掌握极限的四则运算法则；会求公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列前 n 项和的极限.

3. 通过极限概念的教学,使学生初步理解极限的思想方法,从而了解有限与无限,近似与精确的辩证关系，培养学生辩证唯物主义的观点.

(二) 教材分析

5.1　数列

1. 在本节教学中,可以先简要地复习一下自然数，并由小到大依次把它们排成一列

$$1,2,3,4,5,\cdots,$$

指出这就是自然数列．然后结合教材中的 5 个实例，自然地引入数列的定义.

在讲解数列的概念时,要强调数列中数的有序性.因为如果组成两个数列的数相同而排列次序不同$\Big($例如$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},$

$\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$与$\frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\Big)$，那么它们就是不同的数列.

在数列中，同一个数可以重复出现，例如本节教材中的(4)，(5)两个数列.

2. 联系学生已经掌握的函数知识，可以把数列当作一种特殊函数的一列函数值. 因为数列是按一定次序排列的一列数，那么它就必定有开头数，有相继的第二个数，有第三个数，等等. 于是，数列中的每一个数都对应于一个序号；反过来，每个序号也都对应于数列中的一个数. 因此，数列就是定义在自然数集N（或它的有限子集$\{1, 2, 3, \cdots, n\}$）上的函数$f(n)$当自变量从1开始依次取自然数时，相对应的一列函数值

$$f(1), f(2), f(3), \cdots, f(n),$$

通常用a_n代替$f(n)$，于是数列的一般形式常记为$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，或简记为$\{a_n\}$，其中$a_n$表示数列$\{a_n\}$的通项.

这里要注意的是：(1) $\{a_n\}$与a_n是不同的，前者表示数列$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，而后者仅表示这个数列的第$n$项；(2)数列的项与它的项数是不同的概念. 数列的项是指数列中的某一个确定的数，它可以当作函数值；而项数是指数列的项的位置序号，它可以当作自变量的值.

3. 当一个数列$\{a_n\}$的第n项a_n与项数n之间的函数关系可以用一个公式$a_n=f(n)$来表示时，我们就把这个公式叫做这个数列的通项公式. 如果知道了一个数列的通项公式，那么只要用具体的项数代替n，就可以写出这个数列的任意一项.

正象并不是所有的函数关系都能用解析式表达出来一

样，也不是所有的数列都能写出它的通项公式.

有的数列的通项公式，在形式上不一定是唯一的. 例如，教材中的数列(4)的通项公式可写成 $a_n=(-1)^n$，或者写成 $a_n=\cos n\pi$，也可写成

$$a_n=\begin{cases}-1, \text{当 } n \text{ 为奇数时}, \\ 1, \text{当 } n \text{ 为偶数时},\end{cases}$$

这些通项公式形式上虽然不同，但表示同一个数列.

有些数列，只给出它的前面几项，并没有给出它的构成规律，那么仅由前面几项归纳出来的所谓“通项公式”常常不是唯一的. 如由数列 2, 4, 8, …可以归纳出 $a_n=2^n$，也可以归纳出 $a_n=n^2-n+2$，等等. 由于这些“通项公式”不同，由它们写出的后继项就不一样了. 因此只从数列的有限项来归纳通项公式是不一定可靠的.

4. 关于数列的分类，教材只介绍了按数列的项数是有限还是无限进行分类，即分为有穷数列与无穷数列. 此外，还可以按数列中任何相邻两项的大小比较，以及按任何一项绝对值是否都小于某一正数来定义递增数列、递减数列以及有界数列.

5. 这一节教材中的两个例题属于两种类型：(1) 已知数列的通项公式，写出数列的某几项，如例 1；(2) 根据数列的前 n 项，写出数列的通项公式，如例 2.

后一类型的问题，是本节教学中的难点，教学时要引导学生观察数列中各项与其序号的变化情况，分解所给数列的前几项，看看这几项的分解式中，哪些部分是变化的，哪些是不变的，再探索各项中的变化部分与序号间的联系，从而归纳出

构成规律，写出通项公式．这里应着眼于培养学生的观察和分析能力．

对于后一类型的问题，教材中的例题、习题都是给出数列的前几项，要求写出一个使这几项能够满足的通项公式．由于题中没有说出整个数列的构成规律，这种问题的解答可能不是唯一的．一般地说，这时写通项公式，常常是只要求学生写出一个能使所给的有限项满足的最自然的、最简单的公式．

5.2 等差数列

1．本节教材的重点是等差数列的定义及其通项公式、前 n 项和的公式．等差数列的通项公式与前 n 项和的公式的导出都离不开等差数列的定义．因此，教学中首先要讲清等差数列的定义，并且自始至终都要紧扣这个定义．

2．在讲解等差数列的公差 d 时，应强调它是“从第 2 项起，每一项减去它的前一项的差”．防止在求公差时，把相邻两项相减的顺序颠倒．虽然等差数列的任一项减去它的后一项的差也是一个常数，但它不是公差，而是公差的相反数．

要证明一个数列是等差数列，只需证明对于任意自然数 n，差 $a_{n+1}-a_n$ 都是同一个数就可以了．

3．把等差数列的通项公式整理为 $a_n=dn+(a_1-d)$，这表明当 $d\neq0$ 时，a_n 是关于 n 的一次式．由此可见，以自然数集为定义域的函数 $f(n)=a_n$ 的图象是一条直线上那些自变量为自然数的点的集合．这条直线的斜率为 d，在纵轴上的截距为 a_1-d．

4．A 是 a,b 的等差中项的充要条件是 $2A=a+b$．两个数的等差中项又叫做这两个数的算术平均数．

5. 在讲解等差数列前 n 项和的公式时，要紧扣等差数列的定义，从分析等差数列的公差 d 的性质出发. 要通过对实例的观察和分析，着重讲述求和的思路.

在得出等差数列的前 n 项和的公式之后，可以让学生自己推出等差数列的另一个前 n 项和的公式

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

在求一个等差数列前 n 项的和时，如果已知等差数列的首项 a_1、末项 a_n 以及项数 n，可以用公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$；如果已知等差数列的首项 a_1、公差 d 以及项数 n，可以用公式

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.$$

6. 在解有关等差数列的问题时，如果已知 a_1, d, n, a_n, S_n 这 5 个量中的任意 3 个，就可求出其余 2 个.

在解有关等差数列的应用题时，如果已知 3 个数成等差数列，解题时一般设这 3 个数分别为 $a-d$, a, $a+d$（其中 d 为公差），如教材第 10 页上的例 6；如果已知 4 个数成等差数列，可设这 4 个数分别为 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$（其中公差为 $2d$）. 这样设通常使计算较为简便.

5.3 等比数列

1. 本节教材的重点是等比数列的定义及其通项公式、前 n 项和的公式. 其中等比数列的定义又是推导上面两个公式的基础.

2. 讲等比数列的公比 q 时，应强调它是“从第 2 项起，每一项与它的前一项的比”. 防止在求公比时，把相邻两项比的

次序颠倒.

在等比数列中，公比 q 是一个常数，它不仅可以是正数，而且也可以是负数. 要防止学生片面理解公比只能是正数. 但是公比不能为零，这可从等比数列的定义推出(见教材第17页上的练习第1题). 对于公比 q 的取值，还可以提出一些问题，启发学生结合实例深入探讨，例如 $|q|=1$ 时会出现什么结果，q 的绝对值大于(或小于)1与 q 的值大于(或小于)1是否一样，$q>0$ 与 $q<0$ 时各项的符号怎样，等等.

在讲过教材第19页上的例6的第(1)小题后，可以向学生指出：要证明一个数列是等比数列，只需证明对于任意自然数 n，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 是同一个数就行了.

3. 等比数列的通项公式可整理为 $a_n=\dfrac{a_1}{q}q^n$. 当 q 为不等于1的正数时，$y=q^x$ 是一个指数函数，而 $y=\dfrac{a_1}{q}q^x$ 是一个不为零的常数与一个指数函数的积. 因此，从图上看，表示数列 $\left\{\dfrac{a_1}{q}q^n\right\}$ 中的各项的点都在函数 $y=\dfrac{a_1}{q}q^x$ 的图象上.

4. G 是 a，b 的等比中项的充要条件是 $G^2=ab(ab>0)$.

任意两个同号的数的等比中项都有两个，它们互为相反数. 当 $a>0$，$b>0$ 时，$G=\sqrt{ab}$ 也叫做 a、b 的几何平均数.

5. 在推导等比数列前 n 项和的公式时，在 $S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1q^{n-2}+a_1q^{n-1}$ 的两边分别乘以公比 q 这一步，学生往往不易想到. 为此要说明将上面等式右边的每一项乘以公比 q，就得到它后面相邻的一项，即

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^n.$$

因而从前一等式的两边分别减去后一等式的两边，就可以消去这些相同项. 这种求和的思路在解决某些求和问题时经常用到，应要求学生掌握.

在得出等比数列前 n 项和的一个公式后，另一个求和公式 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$ 可让学生自己推出. 然后着重指出：在求等比数列前 n 项和时，如果已知首项 a_1、公比 q 以及项数 n，可以用公式 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$；如果已知首项 a_1、末项 a_n 以及公比 q，可以用公式 $S_n=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}$. 当 $q>1$ 时，也可把这两个公式分别改写为 $S_n=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$ 和 $S_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}$. 当 $q=1$ 时，等比数列是常数列，即

$$a, a, a, \cdots, a, \cdots,$$

它的前 n 项的和为 $S_n=na_1$.

6. 在解有关等比数列的问题时，如果已知 a_1, q, a_n, S_n, n 这 5 个量中的任意 3 个，就可求出其余 2 个.

在解有关等比数列的应用题时，如果已知 3 个数成等比数列，一般设这 3 个数分别为 $\dfrac{a}{q}, a, aq$（其中 q 为公比）；如果已知 4 个数成等比数列，可设它们分别为 $\dfrac{a}{q^3}, \dfrac{a}{q}, aq, aq^3$（其中 q^2 为公比）.

7. 在讲完本节后，可通过列表的方法将等差数列与等比数列的有关知识进行对比，作为一次复习.

5.4 数列的极限

1. 极限是本章教学中的一个难点. 为了使学生了解数列极限的概念，先引导学生观察数列实例的变化趋势. 从存在极限的角度看，数列(1)与(2)只有形式上的差异，并没有本质上的区别. 因此，这里只分析数列(1)

$$1-\frac{1}{10}, 1-\frac{1}{10^2}, \cdots, 1-\frac{1}{10^n}, \cdots$$

的变化趋势. 数列(1)中的项随着项数的增大越来越趋近于1；从图上看，数列(1)的各项在数轴上的对应点也显然越来越趋近于点1. 于是，"容易看出，当项数 n 无限增大时，数列(1)中的项无限趋近于1". 这里要特别注意在"增大"与"趋近"之前添加"无限"二字. 它的意义是：一方面表示项数 n 的增大与数列(1)的项的趋近都是在无限的过程中进行的；另一方面，表示数列(1)的项不仅趋近于1，而且是无限趋近于1，即数列(1)与数1之间有一种特定的关系.

2. 数列变化趋势的定性描述是建立在形象直观的基础之上的，要进一步研究极限概念，则应当将"无限增大"与"无限趋近"给予确切的定量描述.

怎样定量描述"数列(1)中的项无限趋近于1"呢？也就是，怎样定量描述 $\left|\left(1-\frac{1}{10^n}\right)-1\right|=\frac{1}{10^n}$ 无限趋近于0呢？由教材第22页上的表格看到：对于小数0.001，数列(1)中存在一项，即第3项，与这一项后面的所有项对应的不等式

$$\left|\left(1-\frac{1}{10^4}\right)-1\right|=\frac{1}{10^4}<0.001,$$