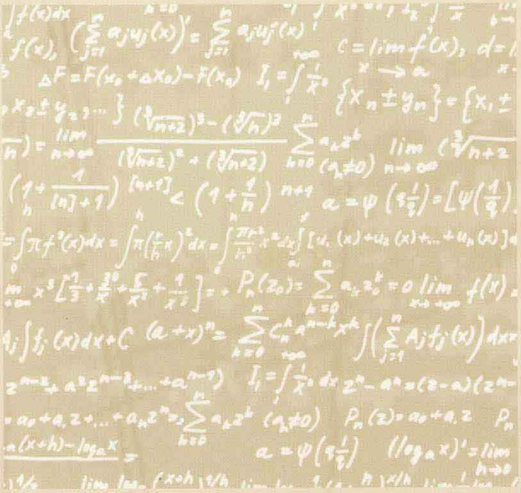
普通高等教育“十二五”规划教材



大学数学

微积分学基础

叶　帆　王文庆　侯晓阳　邱小丽　主编

中国科学技术大学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

大学数学

微积分学基础

叶　帆　王文庆
侯晓阳　邱小丽　编著

中国科学技术大学出版社
·合　肥·

内 容 简 介

本书是为了适应高等学校独立学院经管类专业高等数学课程教学需求所编写的教材，内容设计简明，但体系亦不失完整。全书涵盖了普通微积分教程的主要内容：函数与极限、一元微积分学、多元（主要是二元）微积分学、无穷级数及常微分方程等基本知识。

本书的编写方法较为独特，强调知识的可理解性、可接受性，对微积分学中一些较繁难之处，适当淡化数学理论上的严格论证，让读者能较便捷地学习、掌握微积分学的基本概念、基本理论及基本运算技能，并注重对所学知识的应用。书中各章后所附习题包括基本题与自测题两部分，基本题帮助读者完成对所学知识的理解、消化；自测题则是考查读者对所学知识进行综合运用的能力，帮助读者自我提升。

本书除作为高校独立学院经管类专业的高等数学基础课教材外，也可作为相关人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学. 微积分学基础/叶帆等编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2013.8
ISBN 978-7-312-03254-7

Ⅰ. 大… Ⅱ. 叶… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 ② 微积分—高等学校—教材
Ⅳ. ① O13 ② O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 133227 号

责任编辑：张善金
出 版 者：中国科学技术大学出版社
地 址：安徽省合肥市金寨路 96 号 邮编：230026
网 址：http://www.press.ustc.edu.cn
电 话：发行部 0551-63606086-8808
印 刷 者：安徽江淮印务有限责任公司
发 行 者：中国科学技术大学出版社
经 销 者：全国新华书店
开 本：710mm×960mm 1/16
印 张：23.75
字 数：439 千
版 次：2013 年 8 月第 1 版
印 次：2013 年 8 月第 1 次印刷
印 数：1—6000 册
定 价：36.00 元

前　言

微积分学是我国高等教育课程体系中一门相当重要的课程，因此其教材建设一直受到同行的关注。从20世纪70年代末的同济大学版《高等数学》问世起，到目前为止已出版了很多版本，它们在微积分的课程教学中发挥了很大作用。

进入21世纪以来，我国高等教育教学改革发展迅猛，特别是独立学院的发展，对微积分的教学提出了新的要求。大多数独立学院的人才培养目标均定位在"高素质应用型人才"上，而其课程内容及所使用教材却仍沿用一般本科院校所选择和使用的《高等数学》，这的确不适应其培养目标的需要。为此，我们在近年来担任独立学院微积分课程教学中所使用的自编讲义基础上，编写了本教材。

本教材体现了下列特色：

1. 基础性。本教材选取与经管类专业相关程度较高的内容为基本教学内容(加深性的内容纳入"提高班"讲授)。

2. 应用性。首先从经济背景或有关经济问题的提出导入课程内容；其次在章节结构中也单列出"经济应用"的内容，并在例题、习题的设计与选取上进一步强调经济应用。

3. 通俗性。针对独立学院学生的教学特点和培养目标，对传统教材中较难理解的数学语言，如极限理论中的ε-δ语言等，本教材将其等价地转化为描述性语言，并以此来定义一些相关概念，便于学生接受。

4. 直观性。尽量多配置一些图例来帮助学生更直观地理解有关教学内容。

本书是集体智慧和力量的结晶，第1、2、9章由王文庆老师编写，第

3、5 章由叶帆老师编写,第 4、6 章由邱小丽老师编写,第 7、8 章由侯晓阳老师编写。严忠、刘之行、杨爱琴、郭常超四位教授审阅了本书的全部内容,并进行最后统稿总撰。本书在编写过程中,得到了温州大学城市学院相关领导、教学管理部门和大学数学教研室全体老师的大力支持和热情帮助,他们对书稿内容提出了许多有益的意见和建议;此外,我们还参考了国内外许多版本的微积分学和高等数学教科书,在此向所有关心本书出版的领导和老师们,以及所有参考书籍、文献的作者一并表示深切的感谢。

由于成书仓促,书中难免存在疏漏之处,恳请同行专家、学者、读者不吝赐教。

编 者

2013 年 5 月

目　录

第1章 函 数

在一些经济现象中，常常有某两种变化着的经济量之间存在对应规律. 例如，对某商品的需求量 Q 的变化，常随着该商品的价格 p 的变化而变化，若价格每上升一个单位，需求量会减少 b 个单位，在经济理论中把这种变化的对应关系表示为

$$Q = a - b \cdot p \quad (a\text{、}b\text{ 为常数，且 }a\text{、}b > 0)$$

这就是线性需求函数的产生.

函数是现代数学的基本概念之一，是微积分研究的主要对象.

1.1 函数的概念

1.1.1 预备知识

1. 集合

一般地，具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**，通常用大写英文字母表示. 而构成这个集合的事物称为该集合的**元素**，用小写英文字母表示. 若事物 a 是集合 A 的元素，记为 $a \in A$，读作 a 属于 A；若 a 不是 A 的元素，则记作 $a \notin A$，读作 a 不属于 A.

由有限个元素构成的集合称为**有限集**，由无限多个元素构成的集合称为**无限集**.

若 A 是具有某种特性的元素 x 的全体所构成的集合，则可记为

$$A = \{x \mid x\text{ 所具有的特征}\}$$

本教程中经常用到的是数的集合，例如，大于等于 1 且小于等于 10 的所有实数的集合，记为

$$A = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 10\}$$

有限集一般用列举法表示. 若集合 A 由有限个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成，可记为

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$$

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**. 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

不包含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$.

设 A 和 B 是两个集合,由 A 和 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的**并**. 记为 $A \cup B$,即是

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

设 A 和 B 是两个集合,由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 和 B 的**交**,记为 $A \cap B$,即是

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

下面是几个常用的数集:

N:全体自然数的集合;

Z:全体整数的集合;

Q:全体有理数的集合;

R:全体实数的集合.

2. 变量

在客观物质世界与社会生活中,一切事物都在不断运动和变化着,反映它们的量,如时间、长度、速度、质量、力、人口、成本、收益、利润等等都处在运动和变化中. 所谓**变量**,是指在运动过程中不断变化着的量. 而**常量**,是指在某一运动过程中始终保持不变的量.

例如,某铁路线上甲、乙两站之间的距离是一个常量. 火车在其间运行的速度,是一个变量. 又如,在圆的面积公式

$$S = \pi r^2$$

中,$\pi = 3.1415\cdots$是常量,圆的面积 S 和半径 r 是变量. 当半径 r 变化时,面积 S 也随着发生变化.

习惯上,常用英文字母中的 a, b, c 等表示常量,而用 x, y, z 等表示变量.

初等数学基本上是常量的数学,高等数学是研究变量的数学. 正如恩格斯所说:“数学中的转折点是笛卡尔的变数,有了变数,运动进入了数学;有了变数,辩证法进入了数学;有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了.”

3. 实数、数轴及数轴上的区间

在中学里,我们已知晓什么是实数. 本教程所研究的数学问题,都在实数范围

里进行讨论. 高等数学里专门研究实数的那部分内容称为“实数理论”,关于“实数理论”,本书的读者勿需深究,但应熟记下面的几个结论:

(1) 实数与数轴上的点成一一对应关系.

(2) 实数是一个有序的集合,按其大小有序地排列在数轴上.

(3) 实数具有连续性. 连续性的意义可作如下理解:实数在数轴上的分布是连续不间断的,数轴上任意两个不相同的点之间,还存在有无穷多个点. 即在任意两个不相等的实数之间,还存在有无穷多个实数.

数轴上任意两个不同点之间的部分称为(有限)**区间**. 这两个点称为区间的**端点**,它们之间的距离称为区间的**长度**.

区间所表示的是一个数集. 设 a,b 为两个实数,且 $a<b$,则以 a,b 为端点的区间有如下四种:

(1) 开区间 $(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$,如图 1.1.1 所示.

(2) 闭区间 $[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$,如图 1.1.2 所示.

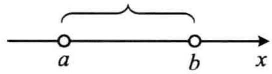


图 1.1.1

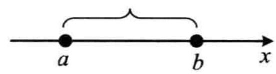


图 1.1.2

(3) 左开右闭区间 $(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$.

(4) 左闭右开区间 $[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$.

此外,还有无限区间. 引入记号 $+\infty$(读作“正无穷大”)和 $-\infty$(读作“负无穷大”). 则无限区间有以下五种:

$(-\infty,a)=\{x\,|\,x<a\}$; $(-\infty,a]=\{x\,|\,x\leqslant a\}$;

$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}$; $[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}$;

$(-\infty,+\infty)$ 为全体实数的集合 $\mathbf{R}$.

注意:$+\infty$ 和 $-\infty$ 都不是一个数.

1.1.2　函数

变量的变化不是孤立的,而是互相联系并遵循一定规律的. 函数就描述了变量之间的这种联系.

例如,在质点的匀速直线运动中,速度 v,时间 t 和路程 S 之间有关系:

$$S=vt \tag{1.1.1}$$

在这个关系式中,v 是常量,S 和 t 都是变量,路程 S 随着时间 t 的变化而变化,则可以称 t 为自变量,S 为 t 的函数.

1. 函数的定义

定义 1.1 设 x,y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,如果对于每个数 $x\in D$,按照某个对应关系(法则)f,有唯一确定的 y 值和它对应,则称 y 为 x 的**函数**,记作

$$y=f(x),x\in D \tag{1.1.2}$$

其中,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为这个函数的**定义域**.

因变量与自变量的这种依赖关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 取遍 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**,记为 $f(D)$,即

$$f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

2. 函数的两要素

函数的定义域与对应关系是函数的两个要素.

1) 定义域

定义域有两种情况:自然定义域与指定定义域.

如果讨论的是纯数学问题,则函数的定义域就是使函数表达式有意义的一切实数构成的集合.这种定义域称为**自然定义域**.例如,函数 $y=\sin x$ 的定义域为全体实数,即 $(-\infty,+\infty)$.而函数 $y=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

在实际问题中,函数的定义域应根据问题的实际意义来确定,称为**指定定义域**.例如,质点受重力作用从地面以上高为 h 处自由下落,下落的距离 S 是时间 t 的函数:

$$S=\frac{1}{2}gt^2 \quad (g\text{ 为重力加速度})$$

在这个例子中,自变量 t 应满足 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$,超出这范围的 t 对本问题是没有意义的.

对于一个函数的描述,应按照(1.1.2)式的形式,(1.1.2)式内由两部分组成,前一部分给出函数的对应规则,后一部分给出函数的定义域,若后一部分未给出,就隐含为自然定义域.

2) 对应法则

函数的对应法则习惯上多用字母“f”表示,当然也可用别的字母.例如 $y=g(x)$,$y=h(x)$ 等.

每个具体的函数有自己的对应法则,例如,函数

$$f(x)=x^2-2x+3 \tag{1.1.3}$$

式子右端的表达式就描述了这一法则.记号 $f(x)$ 意味着将 f 这一法则作用到自变量 x 上,因此,对于(1.1.3)式中的函数法则 f 就有

$$f(t)=t^2-2t+3$$

$$f(x^2)=(x^2)^2-2x^2+3=x^4-2x^2+3$$

$$f(\sin x)=\sin^2 x-2\sin x+3$$

若设 $g(x)=\mathrm{e}^x+2x$ (“g”是另外一个函数法则),则

$$g(t+1)=\mathrm{e}^{t+1}+2(t+1)$$

$$g(\sin x)=\mathrm{e}^{\sin x}+2\sin x$$

等等.

【例 1.1.1】 已知 $f(x+1)=x^2+5$,求 $f(x)$.

首先来分析一下题目的含义:题目告诉我们将函数法则“f”作用于 $(x+1)$ 得到 x^2+5.题目问,将法则“f”作用于 x,将得到一个什么样的表达式?通常,这类题目可用变量替换法求解.

解 令 $x+1=t$,则 $x=t-1$,从而得

$$f(t)=(t-1)^2+5=t^2-2t+6$$

因而得到

$$f(x)=x^2-2x+6$$

3) 两个函数的异同

两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域和对应关系均相同,而与表示自变量和因变量的字母无关,例如

$$y=\sqrt{1-x},\quad x\in(-\infty,1] \text{ 与 } w=\sqrt{1-u},\ u\in(-\infty,1]$$

是同一个函数.

而 $y=\sin x$ 与 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 是两个不同的函数,因为两个函数的定义域不相同.

3. 函数的常用表示法

1) 公式法(解析法)

即自变量与因变量之间的关系用数学表达式(又称解析表达式)来表示的方法.如例 1.1.1 中的 $f(x)=x^2-2x+6$.

2) 图像法

取 x 为横坐标,y 为纵坐标,则在平面直角坐标系 xOy 中.对于函数 $y=f(x)$,