

普通高等教育“十二五”规划教材

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j u_j(x) = \sum_{j=1}^n a_j u_j(x) \quad \text{当 } x \rightarrow a, \quad \frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{a} \\ f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad d = \lim_{x \rightarrow a} dx \\ \Delta F &= F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) \quad I_1 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \\ \{x_n \pm y_n\} &= \{x_n, \pm y_n\} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n+2})^2 - (\sqrt[n]{n})^2}{(\sqrt[n]{n+2})^2 + (\sqrt[n]{n+2})} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n+2}} \right) \\ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} &\leq \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+2} \quad a = \varphi\left(\frac{1}{q}\right) = \left[\varphi\left(\frac{1}{q}\right) \right] \\ \int \pi f^2(x) dx &= \int \pi \left(\frac{f}{n} \right)^2 dx = \int \frac{\pi f^2}{n^2} dx = \int \frac{\pi f^2}{n^2} dx = \int \frac{\pi f^2}{n^2} dx \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x^n \left[\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \frac{4}{x^5} \right] &= P_n(z_0) = \sum_{k=0}^n a_k z_0^k = 0 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \\ \int_1^2 f_j(x) dx + C(a+x)^n &= \sum_{k=0}^n C_k a^{n-k} x^k \int \left(\sum_{j=1}^n A_j f_j(x) \right) dx \\ z^{n-2} + a^2 z^{n-2} + \dots + a^{n-2} &= \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\ a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n &= \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad (a_k \neq 0) \quad P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n \\ \frac{a(x+h) - \log x}{a} &= \varphi\left(\frac{1}{q}\right) \quad (\log_a x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \log_a \frac{x+h}{x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} \end{aligned}$$

大学数学

微积分学基础

叶帆 王文庆 侯晓阳 邱小丽 主编

中国科学技术大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

大学数学

微积分学基础

叶帆 王文庆 编著
侯晓阳 邱小丽



中国科学技术大学出版社

·合肥·

内 容 简 介

本书是为了适应高等学校独立学院经管类专业高等数学课程教学需求所编写的教材,内容设计简明,但体系亦不失完整。全书涵盖了普通微积分教程的主要内容:函数与极限、一元微积分学、多元(主要是二元)微积分学、无穷级数及常微分方程等基本知识。

本书的编写方法较为独特,强调知识的可理解性、可接受性,对微积分学中一些较繁难之处,适当淡化数学理论上的严格论证,让读者能较便捷地学习、掌握微积分学的基本概念、基本理论及基本运算技能,并注重对所学知识的应用。书中各章后所附习题包括基本题与自测题两部分,基本题帮助读者完成对所学知识的理解、消化;自测题则是考查读者对所学知识进行综合运用能力,帮助读者自我提升。

本书除作为高校独立学院经管类专业的高等数学基础课教材外,也可作为相关人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学.微积分学基础/叶帆等编著. —合肥:中国科学技术大学出版社,2013.8
ISBN 978-7-312-03254-7

I. 大… II. 叶… III. 高等数学—高等学校—教材 ② 微积分—高等学校—教材
IV. ① O13 ② O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 133227 号

责任编辑:张善金

出 版 者:中国科学技术大学出版社

地 址:安徽省合肥市金寨路 96 号 邮编:230026

网 址: <http://www.press.ustc.edu.cn>

电 话:发行部 0551-63606086-8808

印 刷 者:安徽江淮印务有限责任公司

发 行 者:中国科学技术大学出版社

经 销 者:全国新华书店

开 本:710mm×960mm 1/16

印 张:23.75

字 数:439 千

版 次:2013 年 8 月第 1 版

印 次:2013 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1—6000 册

定 价:36.00 元



前 言

微积分学是我国高等教育课程体系中一门相当重要的课程,因此其教材建设一直受到同行的关注。从 20 世纪 70 年代末的同济大学版《高等数学》问世起,到目前为止已出版了很多版本,它们在微积分的课程教学中发挥了很大作用。

进入 21 世纪以来,我国高等教育教学改革发展迅猛,特别是独立学院的发展,对微积分的教学提出了新的要求。大多数独立学院的人才培养目标均定位在“高素质应用型人才”上,而其课程内容及所使用教材却仍沿用一般本科院校所选择和使用的《高等数学》,这的确不适应其培养目标的需要。为此,我们在近年来担任独立学院微积分课程教学中所使用的自编讲义基础上,编写了本教材。

本教材体现了下列特色:

1. 基础性。本教材选取与经管类专业相关程度较高的内容为基本教学内容(加深性的内容纳入“提高班”讲授)。

2. 应用性。首先从经济背景或有关经济问题的提出导入课程内容;其次在章节结构中也单列出“经济应用”的内容,并在例题、习题的设计与选取上进一步强调经济应用。

3. 通俗性。针对独立学院学生的教学特点和培养目标,对传统教材中较难理解的数学语言,如极限理论中的 $\varepsilon\delta$ 语言等,本教材将其等价地转化为描述性语言,并以此来定义一些相关概念,便于学生接受。

4. 直观性。尽量多配置一些图例来帮助学生更直观地理解有关教学内容。

本书是集体智慧和力量的结晶,第 1、2、9 章由王文庆老师编写,第



3、5 章由叶帆老师编写,第 4、6 章由邱小丽老师编写,第 7、8 章由侯晓阳老师编写。严忠、刘之行、杨爱琴、郭常超四位教授审阅了本书的全部内容,并进行最后统稿总撰。本书在编写过程中,得到了温州大学城市学院相关领导、教学管理部门和大学数学教研室全体老师的大力支持和热情帮助,他们对书稿内容提出了许多有益的意见和建议;此外,我们还参考了国内外许多版本的微积分学和高等数学教科书,在此向所有关心本书出版的领导和老师们,以及所有参考书籍、文献的作者一并表示深切的感谢。

由于成书仓促,书中难免存在疏漏之处,恳请同行专家、学者、读者不吝赐教。

编 者

2013 年 5 月



目 录

前言	(i)
第 1 章 函数	(1)
1.1 函数的概念	(1)
1.1.1 预备知识	(1)
1.1.2 函数	(3)
1.2 函数的几种性质	(6)
1.2.1 函数的单调性	(6)
1.2.2 函数的奇偶性	(7)
1.2.3 函数的周期性	(8)
1.2.4 函数的有界性	(8)
1.3 初等函数	(8)
1.3.1 反函数	(8)
1.3.2 复合函数	(10)
1.3.3 基本初等函数	(12)
1.3.4 初等函数	(17)
1.3.5 几个重要函数	(18)
1.4 常用经济函数	(19)
1.4.1 成本函数 $C(x), x \geq 0$	(19)
1.4.2 收益函数 $R(x), x \geq 0$	(20)
1.4.3 利润函数 $L(x), x \geq 0$	(20)
1.4.4 需求函数 $Q(p), p \geq 0$	(20)
1.4.5 供给函数 $S(p), p \geq 0$	(21)
1.4.6 生产函数	(22)



第2章 极限与连续	(27)
2.1 数列的极限	(27)
2.1.1 数列	(27)
2.1.2 数列的极限	(27)
2.2 函数极限	(30)
2.2.1 自变量趋于无穷时函数的极限	(30)
2.2.2 自变量趋于有限值时函数的极限	(32)
2.2.3 极限的几何解释	(37)
2.3 无穷小量与无穷大量	(38)
2.3.1 无穷小量	(38)
2.3.2 无穷大量	(41)
2.4 极限的性质及运算法则	(42)
* 2.4.1 函数极限的性质	(42)
2.4.2 极限四则运算法则	(43)
2.5 两个重要极限	(47)
2.5.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	(47)
2.5.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	(49)
2.5.3 连续复利	(52)
2.6 连续函数	(53)
2.6.1 连续函数的概念	(53)
2.6.2 连续函数的性质	(56)
2.6.3 初等函数的连续性	(57)
2.6.4 间断点	(59)
2.7 闭区间上连续函数的性质	(61)
2.7.1 最大值与最小值定理	(61)
2.7.2 介值定理与零点定理	(63)
2.8 无穷小量的比较	(64)
2.8.1 无穷小比较的概念	(64)
2.8.2 等价无穷小的替换	(65)
第3章 导数与微分	(74)
3.1 导数的概念	(74)



3.1.1 引例	(75)
3.1.2 导数的定义	(77)
3.1.3 导数的几何意义	(79)
3.1.4 可导与连续的关系	(80)
3.2 函数的求导法则	(81)
3.2.1 基本初等函数的导数	(81)
3.2.2 导数的四则运算法则	(84)
3.3 反函数、复合函数的导数	(85)
3.3.1 反函数的求导法则	(85)
3.3.2 复合函数的求导法则	(86)
3.4 高阶导数	(90)
3.5 隐函数的导数	(93)
3.5.1 隐函数及其导数	(93)
3.5.2 对数求导法	(94)
* 3.5.3 参数方程表示的函数的导数	(96)
3.6 函数的微分	(97)
3.6.1 微分的定义	(97)
3.6.2 函数可微的条件	(98)
3.6.3 微分的几何意义	(99)
3.6.4 基本初等函数的微分公式与微分运算法则	(100)
3.6.5 微分的应用	(102)
第 4 章 中值定理与导数的应用	(109)
4.1 中值定理	(109)
4.1.1 罗尔(Rolle)定理	(109)
4.1.2 拉格朗日(Lagrange)中值定理	(111)
* 4.1.3 柯西(Cauchy)中值定理	(113)
4.2 洛必达(L'Hospital)法则	(114)
4.2.1 $\frac{0}{0}$ 型洛必达法则	(114)
4.2.2 $\frac{\infty}{\infty}$ 型洛必达法则	(116)
4.2.3 其他类型未定式	(117)



4.3	泰勒公式	(118)
4.4	函数的单调性与极值	(121)
4.4.1	函数的单调性	(121)
4.4.2	函数的极值	(123)
4.4.3	函数的最大值和最小值	(126)
4.5	曲线的凹凸性与函数图形	(127)
4.5.1	曲线的凹凸性与拐点	(128)
4.5.2	函数图形的描绘	(130)
4.6	导数在经济学中的应用	(132)
4.6.1	边际分析	(132)
4.6.2	弹性分析	(134)
第5章	不定积分	(142)
5.1	不定积分的概念	(142)
5.1.1	原函数的概念	(142)
5.1.2	不定积分的概念	(143)
5.1.3	不定积分的几何意义	(145)
5.2	不定积分的基本公式及运算法则	(145)
5.2.1	不定积分的基本公式	(145)
5.2.2	不定积分的运算法则	(147)
5.2.3	直接积分计算举例	(147)
5.3	换元积分法	(149)
5.3.1	第一类换元积分法(“凑”微分法)	(149)
5.3.2	第二类换元积分法	(153)
5.4	分部积分法	(155)
5.5	简单有理函数的积分	(159)
5.5.1	有理函数的不定积分	(160)
5.5.2	三角函数有理式的不定积分	(163)
5.6	积分表的使用	(164)
第6章	定积分及其应用	(172)
6.1	定积分的概念	(172)
6.1.1	引例	(172)



6.1.2 定积分的概念	(174)
6.1.3 函数的可积性	(175)
6.1.4 定积分的几何意义	(175)
6.2 定积分的性质	(177)
6.3 微积分基本公式	(180)
6.3.1 变上限积分函数	(181)
6.3.2 牛顿—莱布尼兹公式	(182)
6.4 定积分的换元积分法和分部积分法	(184)
6.4.1 定积分的换元积分法	(184)
6.4.2 定积分的分部积分法	(186)
6.5 定积分的几何应用	(187)
6.5.1 微元法	(187)
6.5.2 平面图形的面积	(189)
6.5.3 体积	(192)
6.6 积分在经济分析中的应用	(194)
6.6.1 由边际函数求原经济函数	(194)
6.6.2 由边际函数求最优问题	(197)
6.7 广义积分	(198)
6.7.1 无限区间上的广义积分	(198)
6.7.2 无界函数的广义积分	(200)
第7章 多元函数及其微积分学	(208)
7.1 空间解析几何初步	(208)
7.1.1 空间直角坐标系	(208)
7.1.2 空间两点间的距离	(209)
7.1.3 曲面与方程	(210)
7.2 多元函数的概念	(216)
7.2.1 平面点集与 n 维空间	(216)
7.2.2 多元函数的概念	(218)
7.2.3 二元函数的极限	(220)
7.2.4 二元函数的连续性	(221)
7.3 偏导数	(223)
7.3.1 偏导数的定义及其计算	(223)



7.3.2 高阶偏导数	(226)
7.4 多元复合函数的偏导数	(228)
7.4.1 多元复合函数的求导法则	(228)
7.4.2 其他情形	(229)
7.5 隐函数的偏导数	(232)
7.6 全微分	(234)
7.6.1 全微分的定义	(234)
7.6.2 全微分在近似计算中的应用	(236)
7.7 二元函数的极值与最值问题	(237)
7.7.1 二元函数的极值与最值	(237)
7.7.2 条件极值与拉格朗日乘数法	(242)
7.8 二重积分	(246)
7.8.1 二重积分的概念	(246)
7.8.2 二重积分的性质	(249)
7.8.3 在直角坐标系下二重积分的计算	(251)
* 7.8.4 在极坐标系下二重积分的计算	(258)
第8章 无穷级数	(267)
8.1 无穷级数的概念与性质	(267)
8.1.1 常数项级数的概念	(267)
8.1.2 收敛级数的性质	(270)
8.2 正项级数的审敛法	(273)
8.2.1 比较审敛法	(273)
8.2.2 比值审敛法	(277)
8.3 任意项级数	(279)
8.3.1 交错级数审敛法	(279)
8.3.2 绝对收敛与条件收敛	(281)
8.4 幂级数	(283)
8.4.1 函数项级数的概念	(283)
8.4.2 幂级数及其收敛性	(284)
8.4.3 幂级数的运算	(288)
8.5 初等函数的幂级数展开	(290)
8.5.1 泰勒(Taylor)级数	(290)



8.5.2 直接展开法	(292)
8.5.3 间接展开法	(293)
8.5.4 幂级数应用举例	(294)
第9章 常微分方程	(300)
9.1 微分方程的基本概念	(300)
9.1.1 引言	(300)
9.1.2 基本概念	(301)
9.2 可分离变量的微分方程	(304)
9.2.1 可分离变量的微分方程概说	(304)
9.2.2 齐次微分方程	(306)
9.3 一阶线性微分方程	(308)
9.3.1 一阶齐次线性微分方程	(308)
9.3.2 一阶非齐次线性微分方程	(308)
9.4 可降阶的高阶微分方程	(311)
9.4.1 $y''=f(x)$ 型的微分方程	(312)
9.4.2 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	(312)
9.4.3 $y''=f(y, y')$ 型微分方程	(314)
9.5 二阶常系数线性微分方程	(315)
9.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程	(315)
9.5.2 二阶常系数非齐次线性微分方程	(319)
9.6 常微分方程在经济学中的应用	(324)
9.6.1 市场价格与供求函数	(324)
9.6.2 预测商品的销售量	(325)
9.6.3 储蓄与投资的关系问题	(326)
附录1 简易积分表	(332)
附录2 习题参考答案	(342)
参考文献	(368)



第1章 函 数

在一些经济现象中,常常有某两种变化着的经济量之间存在对应规律.例如,对某商品的需求量 Q 的变化,常随着该商品的价格 p 的变化而变化,若价格每上升一个单位,需求量会减少 b 个单位,在经济理论中把这种变化的对应关系表示为

$$Q = a - b \cdot p \quad (a, b \text{ 为常数, 且 } a, b > 0)$$

这就是线性需求函数的产生.

函数是现代数学的基本概念之一,是微积分研究的主要对象.

1.1 函数的概念

1.1.1 预备知识

1. 集合

一般地,具有某种特定性质的事物的总体称为**集合**,通常用大写英文字母表示.而构成这个集合的事物称为该集合的**元素**,用小写英文字母表示.若事物 a 是集合 A 的元素,记为 $a \in A$,读作 a 属于 A ;若 a 不是 A 的元素,则记作 $a \notin A$,读作 a 不属于 A .

由有限个元素构成的集合称为**有限集**,由无限多个元素构成的集合称为**无限集**.

若 A 是具有某种特性的元素 x 的全体所构成的集合,则可记为

$$A = \{x \mid x \text{ 所具有的特征}\}$$

本教程中经常用到的是数的集合,例如,大于等于 1 且小于等于 10 的所有实数的集合,记为

$$A = \{x \mid 1 \leq x \leq 10\}$$

有限集一般用列举法表示.若集合 A 由有限个元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 构成,可记为



$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**. 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 读作 A 包含于 B 或 B 包含 A .

不包含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\emptyset$.

设 A 和 B 是两个集合,由 A 和 B 的所有元素构成的集合称为 A 与 B 的**并**. 记为 $A \cup B$,即是

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

设 A 和 B 是两个集合,由 A 和 B 的所有公共元素构成的集合称为 A 和 B 的**交**,记为 $A \cap B$,即是

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

下面是几个常用的数集:

N:全体自然数的集合;

Z:全体整数的集合;

Q:全体有理数的集合;

R:全体实数的集合.

2. 变量

在客观物质世界与社会生活中,一切事物都在不断运动和变化着,反映它们的量,如时间、长度、速度、质量、力、人口、成本、收益、利润等等都处在运动和变化中. 所谓**变量**,是指在运动过程中不断变化着的量. 而**常量**,是指在某一运动过程中始终保持不变的量.

例如,某铁路线上甲、乙两站之间的距离是一个常量. 火车在其间运行的速度,是一个变量. 又如,在圆的面积公式

$$S = \pi r^2$$

中, $\pi = 3.1415\cdots$ 是常量,圆的面积 S 和半径 r 是变量. 当半径 r 变化时,面积 S 也随着发生变化.

习惯上,常用英文字母中的 a, b, c 等表示常量,而用 x, y, z 等表示变量.

初等数学基本上是常量的数学,高等数学是研究变量的数学. 正如恩格斯所说:“数学中的转折点是笛卡尔的变数,有了变数,运动进入了数学;有了变数,辩证法进入了数学;有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了.”

3. 实数、数轴及数轴上的区间

在中学里,我们已知晓什么是实数. 本教程所研究的数学问题,都在实数范围



里进行讨论. 高等数学里专门研究实数的那部分内容称为“实数理论”, 关于“实数理论”, 本书的读者勿需深究, 但应熟记下面的几个结论:

(1) 实数与数轴上的点成——对应关系.

(2) 实数是一个有序的集合, 按其大小有序地排列在数轴上.

(3) 实数具有连续性. 连续性的意义可作如下理解: 实数在数轴上的分布是连续不间断的, 数轴上任意两个不相同的点之间, 还存在有无穷多个点. 即在任意两个不相等的实数之间, 还存在有无穷多个实数.

数轴上任意两个不同点之间的部分称为(有限)区间. 这两个点称为区间的端点, 它们之间的距离称为区间的长度.

区间所表示的是一个数集. 设 a, b 为两个实数, 且 $a < b$, 则以 a, b 为端点的区间有如下四种:

(1) 开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$, 如图 1.1.1 所示.

(2) 闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$, 如图 1.1.2 所示.

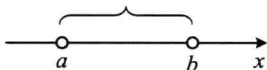


图 1.1.1

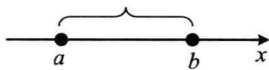


图 1.1.2

(3) 左开右闭区间 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$.

(4) 左闭右开区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$.

此外, 还有无限区间. 引入记号 $+\infty$ (读作“正无穷大”) 和 $-\infty$ (读作“负无穷大”). 则无限区间有以下五种:

$$(-\infty, a) = \{x | x < a\}; \quad (-\infty, a] = \{x | x \leq a\};$$

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}; \quad [a, +\infty) = \{x | x \geq a\};$$

$$(-\infty, +\infty) \text{ 为全体实数的集合 } \mathbf{R}.$$

注意: $+\infty$ 和 $-\infty$ 都不是一个数.

1.1.2 函数

变量的变化不是孤立的, 而是互相联系并遵循一定规律的. 函数就描述了变量之间的这种联系.

例如, 在质点的匀速直线运动中, 速度 v , 时间 t 和路程 S 之间有关系:

$$S = vt \quad (1.1.1)$$

在这个关系式中, v 是常量, S 和 t 都是变量, 路程 S 随着时间 t 的变化而变化, 则可以称 t 为自变量, S 为 t 的函数.



1. 函数的定义

定义 1.1 设 x, y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 按照某个对应关系(法则) f , 有唯一确定的 y 值和它对应, 则称 y 为 x 的函数, 记作

$$y = f(x), x \in D \quad (1.1.2)$$

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 数集 D 称为这个函数的定义域.

因变量与自变量的这种依赖关系通常称为函数关系.

当自变量 x 取遍 D 的所有数值时, 对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的值域, 记为 $f(D)$, 即

$$f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

2. 函数的两要素

函数的定义域与对应关系是函数的两个要素.

1) 定义域

定义域有两种情况: 自然定义域与指定定义域.

如果讨论的是纯数学问题, 则函数的定义域就是使函数表达式有意义的一切实数构成的集合. 这种定义域称为自然定义域. 例如, 函数 $y = \sin x$ 的定义域为全体实数, 即 $(-\infty, +\infty)$. 而函数 $y = \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

在实际问题中, 函数的定义域应根据问题的实际意义来确定, 称为指定定义域. 例如, 质点受重力作用从地面上高为 h 处自由下落, 下落的距离 S 是时间 t 的函数:

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \quad (g \text{ 为重力加速度})$$

在这个例子中, 自变量 t 应满足 $0 \leq t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}}$, 超出这范围的 t 对本问题是没有意义的.

对于一个函数的描述, 应按照(1.1.2)式的形式, (1.1.2)式内由两部分组成, 前一部分给出函数的对应规则, 后一部分给出函数的定义域, 若后一部分未给出, 就隐含为自然定义域.

2) 对应法则

函数的对应法则习惯上多用字母“ f ”表示, 当然也可用别的字母. 例如 $y = g(x)$, $y = h(x)$ 等.



每个具体的函数有自己的对应法则,例如,函数

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad (1.1.3)$$

式子右端的表达式就描述了这一法则. 记号 $f(x)$ 意味着将 f 这一法则作用到自变量 x 上, 因此, 对于 (1.1.3) 式中的函数法则 f 就有

$$f(t) = t^2 - 2t + 3$$

$$f(x^2) = (x^2)^2 - 2x^2 + 3 = x^4 - 2x^2 + 3$$

$$f(\sin x) = \sin^2 x - 2\sin x + 3$$

若设 $g(x) = e^x + 2x$ (“ g ”是另外一个函数法则), 则

$$g(t+1) = e^{t+1} + 2(t+1)$$

$$g(\sin x) = e^{\sin x} + 2\sin x$$

等等.

【例 1.1.1】 已知 $f(x+1) = x^2 + 5$, 求 $f(x)$.

首先来分析一下题目的含义: 题目告诉我们将函数法则“ f ”作用于 $(x+1)$ 得到 $x^2 + 5$. 题目问, 将法则“ f ”作用于 x , 将得到一个什么样的表达式? 通常, 这类题目可用变量替换法求解.

解 令 $x+1=t$, 则 $x=t-1$, 从而得

$$f(t) = (t-1)^2 + 5 = t^2 - 2t + 6$$

因而得到

$$f(x) = x^2 - 2x + 6$$

3) 两个函数的异同

两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域和对应关系均相同, 而与表示自变量和因变量的字母无关, 例如

$$y = \sqrt{1-x}, \quad x \in (-\infty, 1] \text{ 与 } w = \sqrt{1-u}, \quad u \in (-\infty, 1]$$

是同一个函数.

而 $y = \sin x$ 与 $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是两个不同的函数, 因为两个函数的定义域不相同.

3. 函数的常用表示法

1) 公式法(解析法)

即自变量与因变量之间的关系用数学表达式(又称解析表达式)来表示的方法. 如例 1.1.1 中的 $f(x) = x^2 - 2x + 6$.

2) 图像法

取 x 为横坐标, y 为纵坐标, 则在平面直角坐标系 xOy 中, 对于函数 $y = f(x)$,