



普通高等教育土建类规划教材

工程弹性力学与 有限元基础

● 张建文 刘彦辉 赵莹莹 编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



普通高等教育土建类规划教材

工程弹性力学与有限元基础

张建文 刘彦辉 赵莹莹 编
程选生 主审



机械工业出版社

本书是依据高等学校力学教学指导委员会制定的《弹性力学课程教学基本要求》，并结合弹性力学和有限元在实际工程中的应用编写而成的，适用于高等院校土木、水利专业的课程教学。全书共分 11 章，内容包括：绪论、弹性空间问题的基本理论、空间问题的解答、平面问题的基本理论、直角坐标系下平面问题的解答、极坐标系下平面问题的解答、弹性力学平面问题的有限差分法、弹性力学平面问题的变分法、弹性薄板的弯曲问题、有限单元法、大型有限元软件简介及应用实例。

本书可供高等院校土木、水利等专业的本科生、研究生使用，也可供非力学类专业博士生、高等院校力学教师和工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

工程弹性力学与有限元基础/张建文等编. —北京：机械工业出版社，
2013. 7
普通高等教育土建类规划教材
ISBN 978-7-111-42566-3

I. ①工… II. ①张… III. ①工程力学—弹性力学—高等学校—教材
②有限元法—应用—工程技术—高等学校—教材 IV. ①TB125②TB115

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 104824 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑：马军平 责任编辑：马军平 李 乐

版式设计：常天培 责任校对：樊钟英

封面设计：张 静 责任印制：杨 曦

北京云浩印刷有限责任公司印刷

2013 年 7 月第 1 版第 1 次印刷

184mm×260mm·12 印张·290 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-42566-3

定价：26.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

社服务中心：(010)88361066

销 售 一 部：(010)68326294

销 售 二 部：(010)88379649

读者购书热线：(010)88379203

网络服务

教 材 网：<http://www.cmpedu.com>

机工官网：<http://www.cmpbook.com>

机工官博：<http://weibo.com/cmp1952>

封面无防伪标均为盗版

前 言

本书是依据高等学校力学教学指导委员会制定的《弹性力学课程教学基本要求》，并结合弹性力学和有限元在实际工程中的应用编写而成的，适用于高等院校土木、水利专业等非力学类专业的课程教学，还可供工程技术人员参考。

本书结合工程实例和弹性力学在实际工程中应用的需求，主要讨论了弹性力学和有限元的基本概念、基本方程、基本解法。全书共分 11 章，内容包括：绪论、弹性空间问题的基本理论、空间问题的解答、平面问题的基本理论、直角坐标系下平面问题的解答、极坐标系下平面问题的解答、弹性力学平面问题的有限差分法、弹性力学平面问题的变分法、弹性薄板的弯曲问题、有限单元法、大型有限元软件简介及应用实例。

本书在编写时力求简明扼要、联系实际、深入浅出；章后附有习题，便于学生复习和自学。

本书编写人员具体分工如下：第 1 至 6 章、第 9 章由南阳理工学院张建文编写；第 7、8 章由佳木斯大学赵莹莹编写；第 10、11 章由广州大学刘彦辉编写。全书由张建文统稿，兰州理工大学程选生主审。

本书在编写过程中，参考和引用了已经公开出版的弹性力学和有限元相关教材和文献资料，在此向相关作者表示深深的感谢。由于编者水平有限，书中难免存在不足之处，望读者批评指正。

编 者

目 录

前言

第1章 绪论	1
1.1 弹性力学的任务	1
1.2 弹性力学的发展史	1
1.3 弹性力学的基本概念	2
1.4 弹性力学的研究内容	5
1.5 弹性力学的基本假设	6
习题	7
第2章 弹性空间问题的基本理论	8
2.1 平衡微分方程	8
2.2 应力状态分析	9
2.3 应变状态分析	14
2.4 应力和应变的关系（物理方程）	19
2.5 边界条件、圣维南原理	21
2.6 弹性力学问题的解法	22
2.7 轴对称问题的基本方程	24
习题	25
第3章 空间问题的解答	26
3.1 按位移求解空间弹性体问题	26
3.2 按应力求解空间弹性体问题	27
3.3 半空间体受重力与均布压力作用	28
3.4 半空间体在边界上受法向集中力作用	29
3.5 等截面直杆的扭转	30
习题	33
第4章 平面问题的基本理论	34
4.1 平面应力和平面应变问题	34
4.2 平衡微分方程	35
4.3 应力状态分析	36
4.4 应变状态分析	39
4.5 应力和应变的关系（物理方程）	42
4.6 按位移求解平面问题	43
4.7 按应力求解平面问题（相容方程）	44
4.8 应力函数（常体力情况下的简化）	45
习题	47
第5章 直角坐标系下平面问题的解答	49
5.1 弹性力学平面问题的解法	49
5.2 平面问题的多项式解答——逆解法	49

5.3 利用逆解法求解纯弯曲作用下的矩形截面梁	52
5.4 利用半逆解法求解均布荷载作用下的简支梁	53
5.5 利用量纲分析法求解自重和水压力作用下的楔形体	58
习题	59
第6章 极坐标系下平面问题的解答	61
6.1 基本方程	61
6.2 应力分量的坐标变换	65
6.3 轴对称平面问题的基本方程	66
6.4 承受均布压力作用的圆环或圆筒问题	69
6.5 圆孔对应力分布的影响	72
6.6 楔形体顶端承受集中力作用的问题	75
6.7 半平面体的解答(边界受集中力、分布力)	77
习题	80
第7章 弹性力学平面问题的有限差分法	81
7.1 基本原理	81
7.2 用有限差分法求解梁弯曲的问题	84
7.3 用有限差分法求解压杆的临界荷载	87
7.4 应力函数的差分分解	90
习题	94
第8章 弹性力学平面问题的变分法	96
8.1 基本原理	96
8.2 形变连续方程	103
8.3 虚位移原理的近似解法	105
8.4 虚力移原理的近似解法	110
8.5 例题	115
习题	119
第9章 弹性薄板的弯曲问题	121
9.1 基本概念和假定	121
9.2 平衡微分方程	122
9.3 边界条件	125
9.4 四边简支矩形薄板的纳维(Navier)解	127
9.5 温度作用下混凝土矩形薄板的弯曲	129
习题	137
第10章 有限单元法	138
10.1 基本理论	138
10.2 杆系结构的有限元分析	140
10.3 平面结构的有限元分析	149
10.4 空间结构的有限元分析	157
第11章 大型有限元软件简介及应用实例	162
11.1 ANSYS 功能与软件结构	162
11.2 杆系结构有限元应用实例	166
11.3 平面结构有限元应用实例	172
11.4 实体结构有限元应用实例	177
参考文献	183

第1章 绪 论

1.1 弹性力学的任务

弹性力学又称为弹性体力学或者弹性理论，由于弹性体是变形在一定范围内（变形小于固体的弹性极限）的固体，所以弹性力学是固体力学的一个重要分支。

对于土木、机械等工科专业来说，弹性力学的研究任务与材料力学、结构力学的任务相似，都是分析结构或构件在弹性阶段的应力和位移，校核结构或构件的强度和刚度是否满足工程要求，同时寻求并改进它们的计算方法。需要指出，这三门学科并不完全相同，它们的研究对象上各有分工、在研究方法上也具有不同之处。弹性力学有其本身的特殊性，弹性力学的研究对象是实际物体经过抽象处理后的完全弹性体。弹性力学的主要任务是研究完全弹性体在受外力作用、温度改变、边界约束或其他外界因素作用下而发生的应力、形变和位移状态。

1.2 弹性力学的发展史

弹性力学的研究从17世纪开始，经过300多年来国内外科研人员的研究和探索，其理论和方法日益丰富和完善，目前已广泛应用于土木、机械、化工、船舶、航空航天等工程领域。弹性力学的发展经历了以下四个阶段。

第一阶段是弹性力学的发展初期阶段（约始于17世纪60年代）。1678年英国的胡克提出了胡克定律。1807年，托马斯·杨做了大量的试验，提出和测定了材料的弹性模量。伯努利（1705年）和库仑（1776年）研究了梁的弯曲理论，一些力学家开始了对杆件等构件的分析。

第二阶段是理论基础的建立阶段（约始于19世纪20年代）。1820年法国的纳维建立了各向同性弹性体方程。柯西在1822—1828年间发表的一系列论文中，明确提出了应变、应变分量、应力和应力分量的概念，建立了弹性力学的几何方程、平衡方程、各向同性以及各向异性材料的广义胡克定律。格林（1838年）应用能量守恒定律，指出各向异性体只有21个独立的弹性常数。至此，弹性力学建立了完整的线性理论，弹性力学问题已经转化为指定边界条件下求解微分方程的数学问题。

第三阶段是线性理论的发展时期（约始于19世纪50年代）。1854—1858年间法国的圣维南发表了关于柱体扭转和弯曲的论文，并提出了圣维南原理。1862年艾里提出了应力函数，以求解平面问题。1881年德国的赫兹解出了两弹性体局部接触时弹性体内的应力分布。1898年德国的基尔施在计算圆孔附近的应力分布时，发现了应力集中。这些成就解释了过去无法解释的实验现象，在提高机械、结构等零件的设计水平方面起了重要作用，使弹性力学得到工程界的重视。在这个时期，弹性力学的一般理论也有很大的发展。一方面建立了各种关于能量的原理。另一方面发展了许多有效的近似计算、数值计算和其他计算方法，如著

名的瑞利-里兹法，为直接求解泛函极值问题开辟了道路，推动了力学、物理、工程中近似计算的蓬勃发展。

第四阶段是弹性力学的深入发展时期（约始于 20 世纪初）。1907 年以后，非线性弹性力学迅速发展起来。1907 年卡门提出了薄板的大挠度问题。卡门和钱学森提出了薄壳的非线性稳定问题。在这一时期，线性弹性力学也得到进一步的发展，出现了许多分支学科，如各向异性和非均匀体的理论、非线性板壳理论和非线性弹性力学、考虑温度影响的热弹性力学、研究固体同气体和液体相互作用的气动弹性力学和水弹性理论以及粘弹性理论等。磁弹性和微结构弹性理论也开始建立起来。此外，还建立了弹性力学广义变分原理。这些新领域的发展，丰富了弹性力学的内容，促进了有关工程技术的发展。

从这一时期开始，我国的力学家钱伟长、胡海昌、徐芝纶等也开始了弹性力学的研究，从而为我国弹性力学理论研究和工程应用作出了突出的贡献。

1.3 弹性力学的基本概念

弹性力学中的一些基本概念有外力、应力、形变和位移。在学习弹性力学理论和方法前，首先对这些概念进行介绍。

外力是指其他物体对弹性体研究对象的作用力。外力可以分为体积力和表面力，分别简称为体力和面力。

体力是分布在弹性体体积内的力，如重力和惯性力，物体内部各点的体力一般是不相同的。为了说明物体在某一点 P 所受体力的大小和方向，在图 1-1 中取包含着 P 点、体积为 ΔV 的微元体。

设作用于 ΔV 的体力为 $\Delta \mathbf{F}$ ，则体力的平均集度为 $\Delta \mathbf{F}/\Delta V$ 。如果把所取的这一小部分物体 ΔV 不断缩小，则 $\Delta \mathbf{F}$ 和 $\Delta \mathbf{F}/\Delta V$ 都将随着 ΔV 的变化不断改变大小、方向和作用点。假设体力在弹性体内部连续分布，考虑极限情况，如果 ΔV 无限减小而趋向于 P 点，则 $\Delta \mathbf{F}/\Delta V$ 必将趋于一定的极限矢量 $\mathbf{f}$ ，即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \mathbf{f} \quad (1-1)$$

此极限矢量 $\mathbf{f}$ 即为该弹性体在 P 点所受体力的集度。由于 ΔV 是标量，所以 $\mathbf{f}$ 的方向就是 $\Delta \mathbf{F}$ 的极限方向。矢量 $\mathbf{f}$ 在空间直角坐标轴 x, y, z 上的投影 X, Y, Z 称为该物体在 P 点沿坐标轴的体力分量，其量纲为 $L^{-2}MT^{-2}$ ，正负号规定为：沿坐标轴正向为正，沿坐标轴负向为负。

面力是分布在弹性体表面上的力，如接触力和流体压力，物体在其表面上各点受面力作用一般也是不相同的。为了说明弹性体在表面上某一点 P 处所受面力的大小与方向，在图 1-2 中的物体表面取包含 P 点、面积为 ΔA 的微面积。

设作用于 ΔA 上的面力为 $\Delta \mathbf{F}$ ，则面力的平均集度为 $\Delta \mathbf{F}/\Delta A$ 。如果把所取的这一小部分面积 ΔA 不断缩小，则 $\Delta \mathbf{F}$ 和 $\Delta \mathbf{F}/\Delta A$ 也

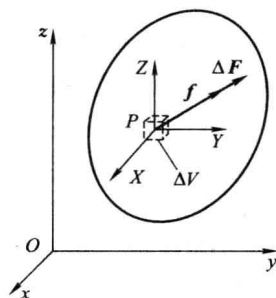


图 1-1 体力示意图

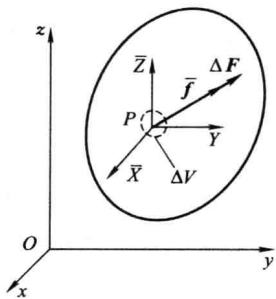


图 1-2 面力示意图

将随着 ΔA 的变化不断改变大小、方向和作用点。假设物体上的面力为连续分布，考虑极限情况，令 ΔA 无限减小而趋向于 P 点，则 $\Delta F/\Delta A$ 必将趋于一定的极限 $\bar{f}$ ，即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \bar{f} \quad (1-2)$$

这个极限矢量 $\bar{f}$ 即为该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔA 是标量，所以 $\bar{f}$ 的方向和 ΔF 的极限方向是一致的。矢量 $\bar{f}$ 在坐标轴 x, y, z 上的投影 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ 分别称为在 P 点沿 x, y, z 方向的面力集度分量，量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$ 。面力正负号规定为：沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。

物体在外力作用下，其内部不同部分之间的相互作用称为内力。为了研究物体在内部某一点 P 处的内力，假想用经过 P 点的一个截面 $k-k$ 将该物体分为 I 和 II 两部分，如图 1-3 所示。舍弃 II 部分，保留 I 部分。舍弃部分对保留部分的作用即为内力。为了说明截面 $k-k$ 上某一点 P 处所受内力的大小与方向，在 $k-k$ 截面上取包含 P 点、面积为 ΔA 的微面积。设作用于 ΔA 上的内力为 ΔF ，则内力的平均集度为 $\Delta F/\Delta A$ 。假设内力为连续分布，考虑极限情况，令 ΔA 无限减小而趋于 P 点，则 $\Delta F/\Delta A$ 必将趋于一定的极限 p ，即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = p \quad (1-3)$$

这个极限矢量 p 定义为物体在截面 $k-k$ 上 P 点的应力，量纲为 $L^{-1}MT^{-2}$ 。由于 ΔA 是标量，所以应力 p 的方向和 ΔF 的极限方向是一致的。

由于应力在沿坐标轴 x, y, z 方向的分量与物体的形变或材料强度都没有直接关系，故一般不将应力沿 x, y, z 进行投影。而与物体的形变和材料强度直接相关的是应力在其作用截面法线方向和切线方向的分量，分别定义为正应力 σ 和切应力 τ 。

通过物体内的同一点 P ，可以作很多个截面，不同截面上的应力一般是不相同的。为了分析一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内部取出一个微小的正平行六面体，如图 1-4 所示。六面体的棱边分别平行于三个坐标轴，各边的长度分别为 $PA = \Delta x$ ， $PB = \Delta y$ ， $PC = \Delta z$ 。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用 σ 表示，加上一个下标以表明这个正应力的作用面和作用方向，如 σ_x 表示作用在垂直于 x 轴的面上、沿着 x 轴的方向的正应力；切应力用 τ 表示，加双下标表示作用平面和作用方向，第一个下标字母表明切应力作用面垂直于哪一个坐标轴，第二个下标字母表明切应力作用方向沿着哪一个坐标轴，如 τ_{xy} 表示作用在垂直于 x 轴的面上、沿着 y 轴方向作用的切应力。

应力正负号的规定和体力、面力不同，为了说明这一点，首先需要定义截面的正负：如

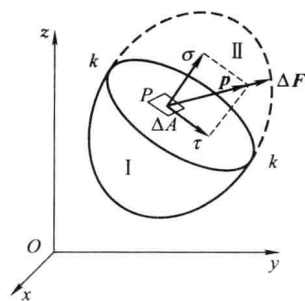


图 1-3 应力示意图

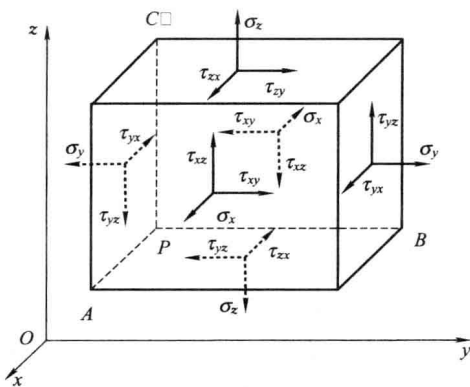


图 1-4 正平行六面体单元

图 1-4 所示, 如果截面的外法线方向和坐标轴的正方向一致, 则这个截面定义为正面; 如果截面的外法线方向和坐标轴的正方向相反, 则这个截面定义为负面。规定: 作用在正面上的应力以沿坐标轴正向为正, 沿坐标轴负向为负; 作用在负面上的应力以沿坐标轴负向为正, 沿坐标轴正向为负, 即正正为正、负负为正, 其余则为负。

应注意弹性力学和材料力学中的应力正负号规定有所不同。正应力的正负号规定在弹性力学和材料力学中是一致的; 切应力有所不同: 材料力学中切应力以使单元体或其局部产生顺时针转动趋势的为正, 如图 1-5 所示。这两门力学关于切应力正负号的规定不能统一的原因在于, 材料力学通常研究平面上的问题, 可以清楚地表明顺时针方向, 并且可以将其符号规定用于莫尔圆来求解斜截面上的应力; 而弹性力学研究的不仅仅是平面问题, 也不再用莫尔圆方法来求解斜截面上的应力, 因此采用了与材料力学不同的正负号规定。

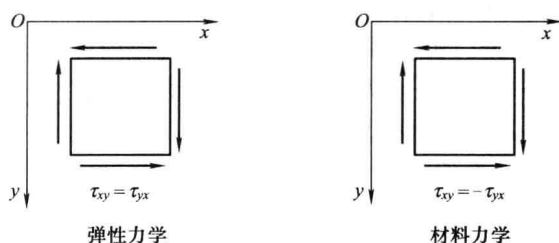


图 1-5 弹性力学和材料力学中切应力正负号的规定

图 1-5 中给出的四个切应力分量之间并不是完全独立的, 它们具有一定的互等关系, 满足切应力互等定理: 作用在两个互相垂直的面上且垂直于两面交线的切应力大小相等, 正负号相同。也就是说, 两个互相垂直的面上的切应力必然同时指向或者同时背离这两个面的交线, 且大小相等。下面给出该定理的简单证明: 以图 1-4 中所示的正六面体为研究对象, 分别以连接前后两面中心的直线为轴列出六面体的力矩平衡方程

$$2\tau_{yz}\Delta x\Delta z\frac{\Delta y}{2} - 2\tau_{xy}\Delta x\Delta y\frac{\Delta z}{2} = 0$$

即有 $\tau_{yz} = \tau_{xy}$ 。同理, 对连接左右两面中心的直线、连接上下两面中心的直线分别列六面体的力矩平衡方程并整理, 有 $\tau_{zx} = \tau_{xy}$, $\tau_{xy} = \tau_{yz}$ 。由此可知, 在弹性力学里, 切应力记号的两个下标字母可以对调。如果按照材料力学里切应力的正负号规定, 切应力互等定理依然成立, 不同的是在两个下标字母对调以后, 还要将切应力反号, 即 $\tau_{yz} = -\tau_{xy}$, $\tau_{zx} = -\tau_{xy}$, $\tau_{xy} = -\tau_{yz}$, 如图 1-5 所示。

可以证明, 在物体的任意一点, 如果已知 σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} 这六个应力分量, 就可以求解经过该点任意截面上的正应力和切应力。因此, 该点的应力状态即可由上述六个应力分量完全确定。

形变是指物体形状的改变。物体的形状可以用它各部分的长度和相对角度来表示。因此, 物体的形变可以归结为长度和角度的改变。

为了分析物体在其某一点 P 的形变状态, 在 P 点沿着坐标轴 x , y , z 的正方向取三个微小的线段 PA , PB , PC , 如图 1-4 所示。在外因作用下物体发生变形以后, 这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩, 即单位伸缩或相对伸缩, 称为线应变, 也称正应变。线应变用字母 ε 表示: ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的线应

变, ε_y , ε_z 的意义可以此类推。线应变以伸长为正, 缩短为负, 与正应力的正负号规定相适应。各线段之间的直角的改变用 rad 衡量, 称为角应变, 用字母 γ 表示。角应变 γ_{xy} 表示 x 与 y 两方向的线段 PA 与 PB 之间的直角的改变, 其余类推。角应变以直角变小为正, 变大为负, 与切应力的正负号规定相适应。线应变和切应变都是量纲为一的量。

可以证明, 在物体的任意一点, 如果已知 ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} 这六个应变分量, 就可以求得经过该点的任一线段的线应变, 也可以求得经过该点的任意两条线段之间的角度的改变。因此, 这六个应变, 称为该点的形变分量, 可以完全确定该点的形变状态。

位移是指一点位置的移动。物体内部任意一点的位移, 用它在 x , y , z 三个坐标轴上的投影 u , v , w 来表示, 以沿坐标轴正方向为正, 沿坐标轴负方向为负。这三个投影称为该点的位移分量, 位移及其分量的量纲是 L 。

需要说明的是, 弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、形变分量和位移分量, 都是随着该点的位置变化而变化的, 因而都是位置坐标的函数。

1.4 弹性力学的研究内容

弹性力学是在材料力学的基础上发展起来的, 两者的研究任务相似, 但是两者在研究对象上有所分工, 由于研究对象的不同, 弹性力学与材料力学和结构力学的研究方法也有所不同。

材料力学的研究对象是杆件 (物体的长度比横截面的最大尺度大得多), 其主要研究内容在于分析杆件在拉压、剪切、弯曲、扭转等因素单独或者组合作用下的内力、应力和位移; 结构力学进一步研究杆件组成的结构或体系, 如桁架、刚架、排架、桁-梁组合结构等在外力作用、温度改变、装配误差等因素作用下的力学响应。而对于非杆状的结构, 如板和壳、水坝、挡土墙、压力隧道、弹性地基等实体结构, 常为弹性力学的研究对象。因此, 弹性力学的研究对象不仅可以是杆件 (一维), 还包含二维和三维的问题, 比材料力学的研究范围更为广泛。与此同时, 很多情形下也经常应用弹性力学理论对杆状构件作进一步的、较为精确的分析和计算。

从研究方法上来看, 弹性力学和材料力学也有较大的不同。材料力学在应用静力学、几何学和物理学理论研究杆件的内力、应力和位移时, 为了简化问题的分析和计算, 经常对构件的形变状态或应力分布等作一些假定, 在这些假定的前提下得出的解答往往只是近似的结论。而应用弹性力学对杆件结构进行研究一般不引用那些假定, 得出的结果就比较精确, 从而更具有指导意义。例如, 在材料力学里计算含有小孔的拉伸构件时, 通常假定拉伸应力在小孔附近的净截面上是均匀分布的, 只考虑小孔引起的截面面积减小对应力的影响。而弹性力学的研究表明: 远离小孔的净截面上应力分布均匀, 而小孔附近截面上的应力不是均匀分布的, 在孔的附近将发生高度的孔口应力集中, 孔边的最大拉伸应力为平均拉伸应力的三倍。当然, 对于很多工程问题, 采用材料力学方法得出的结论具有近似性, 但也已经满足工程精度要求。

虽然弹性力学并不直接研究杆系结构, 但弹性力学借鉴了很多结构力学的研究方法, 大大扩展了自身理论的应用范围, 使得某些比较复杂的、无法求解的问题得到了很好的解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性, 但应用在工程上通常是具有足够精度的。尤其是

在 20 世纪 50 年代中期发展起来的有限单元法中,把弹性连续体划分成有限大小的单元构件,然后用结构力学里的位移法、力法或混合法求解,更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

由此可见,虽然材料力学、结构力学和弹性力学在研究对象、研究方法上各有特点,但这三门学科并没有严格的界限区分,对于具体的工程问题,应该根据具体的要求,合理选择适宜的理论和方法,扬长避短,力争用最经济的投入和最小的工作量取得满足工程需要的计算结果。

1.5 弹性力学的基本假设

用弹性力学求解实际工程问题,通常需要根据研究对象的特点和求解问题的性质及范围,对研究对象作出若干基本假设,使得问题的求解成为可能。否则,如果将研究对象的所有性质和特点都精确地考虑进去,问题将变得非常复杂,甚至得不出明确的解答。弹性力学中对研究对象的基本假设包含以下几个方面:

1) 连续性假设 假设物体是连续的,也就是假定整个物体的体积内部都被组成这个物体的材料所充满,密实而无任何空隙。这样,物体内的一些物理量(如应力、形变、位移等)才可能是连续的,进而才可能用坐标变量的连续函数来表示它们的变化规律并进行数学分析。实际上,物体内部都存在着气孔、杂质等缺陷,严格说来都不符合上述假定。但如果组成物体微粒的尺寸、相邻微粒之间的距离以及内部杂质等都比物体的尺寸小很多,那么引入物体连续性的假定,就不会引起显著的误差。

2) 均匀性假设 假定物体是均匀的,也就是假定整个物体是由同一材料组成,内部各部分的力学性能是完全相同的,不随位置坐标的变化而改变。在对物体进行研究时,可取内部任意部分作为研究对象,得出的结论具有代表性。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的,如混凝土,只要每一种材料的颗粒远远小于物体的整体尺寸而且在物体内部均匀分布,这个物体就可以视为满足均匀性假设。

3) 各向同性假设 假定物体是各向同性的,即物体的力学性质在物体的所有各个方向都是相同的,物体的弹性常数不随方向改变而变化。对物体从不同方向进行研究,可以得到相同的结论。钢材、铸铁、玻璃、混凝土等宏观上都可以视为各向同性材料。而木材、竹材、复合材料不能视为各向同性体。

4) 完全弹性假设 假定物体是完全弹性的。所谓弹性,指的是“物体在引起形变的外力被移去之后能完全恢复原形”这一性质。所谓完全弹性,指的是物体能完全恢复原形而没有任何残余形变。这样的物体在任一瞬时的形变就完全决定于它在这一瞬时所受的外力,与它过去的受力情况无关。由材料力学已知:塑性材料的物体,在应力未达到屈服极限以前,是近似的完全弹性体;脆性材料的物体,在应力未超过比例极限以前,也是近似的完全弹性体。在一般的弹性力学中,完全弹性的这一假定还包含形变与引起形变的应力成正比的含义,即两者之间是呈线弹性关系的。因此,应力和应变之间的关系可以用胡克定律来表示,其弹性常数不随应力或应变的大小而变化。

5) 小变形假设 假定物体的位移和形变都是微小的。这就是说,物体受力以后,整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸,而且应变和转角都远小于 1。这样,在建

立物体变形以后的平衡方程时，就可以方便地用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸，而不致引起显著的误差；并且，在考察物体的形变与位移的关系建立几何方程时，由于 $\varepsilon \ll 1$ ， $\varepsilon \gg \varepsilon^2 \gg \varepsilon^3 \gg \dots$ ，因此在同一方程中，可以只保留形变分量的一次项，略去形变分量的二次项及高阶小量，使几何方程成为线性方程，从而简化问题的计算。

6) 无初始应力假设 假设物体处于自然状态，即在外界因素作用之前，物体内部没有应力。弹性力学求解的应力仅仅是由于外力或温度改变而产生的。在以上六项基本假设中，符合前四项假设的物体称为理想弹性体。本书即以理想弹性体为研究对象，研究无初始应力的小变形问题。如果不符合小变形假定的物体，属于大变形问题，需另作讨论。

习 题

1-1 举例说明常见工程材料中哪些是符合弹性力学基本假定的，哪些是不符合的？

1-2 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件可否视为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否视为理想弹性体？

第2章 弹性空间问题的基本理论

2.1 平衡微分方程

如图 2-1 所示, 通过弹性体内的任意一点 P , 截取一个微小的平行六面体, 六面体的法线均与坐标轴平行, 棱边的长度分别为 $PA = dx$, $PB = dy$, $PC = dz$ 。应力分量是位置坐标的函数, 因此, 作用在该六面体两对面上的应力分量不完全相同, 而具有微小的增量。例如, 作用在后面的正应力是 σ_x , 则作用在前面的正应力根据泰勒级数展开, 并忽略二阶及二阶以上微量后得 $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$, 其余类推。由于所取六面体是微小的, 因而可以认为体力是均匀分布的。

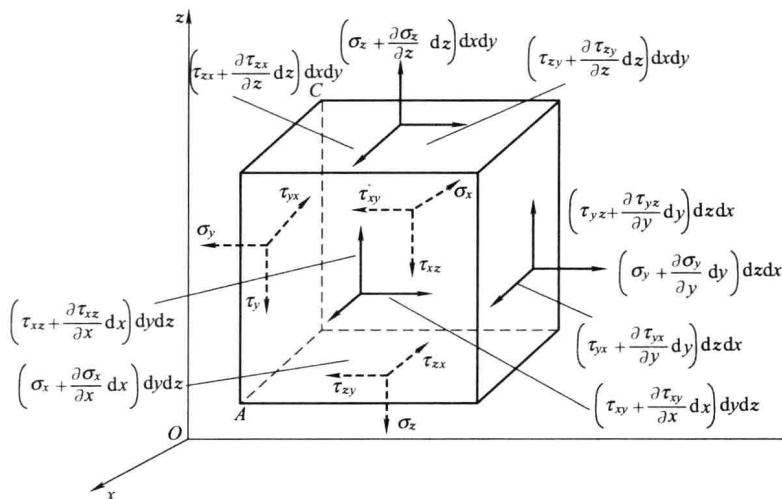


图 2-1 微元体应力示意图

首先, 以连接六面体前后两面中心的直线 ab 为矩轴, 列出力矩的平衡方程 $\sum M_{ab} = 0$, 即

$$\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \frac{dy}{2} - \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{zy} dx dy \frac{dz}{2} = 0$$

上式两端同除以 $dx dy dz$, 合并同类项, 得

$$\tau_{yz} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy - \tau_{zy} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz = 0$$

略去微量以后, 得

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

同理可得出

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}$$

此处证明了切应力互等定理。

以 x 轴为投影轴，列出投影的平衡方程 $\sum F_x = 0$ ，得

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_x dydz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dzdx - \tau_{yx} dzdx + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dxdy - \tau_{zx} dxdy + X dxdydz = 0$$

同理，根据 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$ ，可得出另外两个方程。将这三个方程化简以后，并除以 $dxdydz$ ，得

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{cases} \quad (2-1)$$

这就是空间问题的平衡微分方程。

2.2 应力状态分析

2.2.1 一点的应力状态

在应力分析和确定弹性体边界条件的过程中，需要了解空间斜截面上的应力状态，因此，需对任意一点的应力状态进行分析。假定弹性体在任一点 P 的六个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}$ 为已知，试求经过 P 点的任一斜面上的应力。为此，如图 2-2 所示，在 P 点附近截取一个平面 ABC 平行于这一斜面，并与经过 P 点而平行于坐标面的三个平面形成一个微小的四面体 $PABC$ ，当平面 ABC 趋近于 P 点时，平面 ABC 上的应力就成为该斜面上的应力。

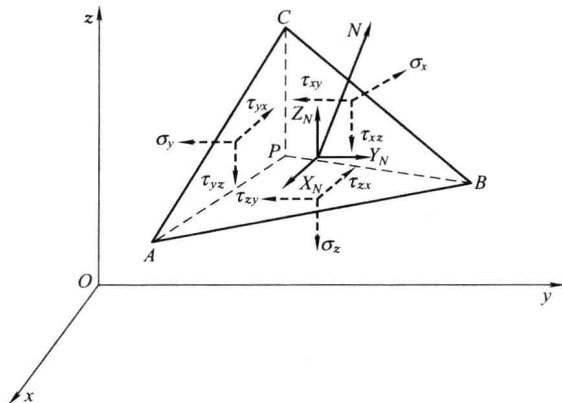


图 2-2 斜面上应力示意图

令平面 ABC 的外法线为 N ，其方向余弦为

$$\begin{cases} \cos\langle N, x \rangle = l \\ \cos\langle N, y \rangle = m \\ \cos\langle N, z \rangle = n \end{cases}$$

设 $\triangle ABC$ 的面积为 ΔS ，则 $\triangle BPC$ ， $\triangle CPA$ ， $\triangle APB$ 的面积分别为 $l\Delta S$ ， $m\Delta S$ ， $n\Delta S$ 。四面体 $PABC$ 的体积用 ΔV 表示。 $\triangle ABC$ 上的应力 p_N 在坐标轴方向的分量用 X_N ， Y_N ， Z_N 来表示。根据四面体的平衡条件 $\sum F_x = 0$ ，得

$$X_N \Delta S - \sigma_x l \Delta S - \tau_{yx} m \Delta S - \tau_{zx} n \Delta S + X \Delta V = 0$$

上式两端同除以 ΔS ，移项得

$$X_N + X \frac{\Delta V}{\Delta S} = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}$$

同理，由平衡条件 $\sum F_y = 0$ 及 $\sum F_z = 0$ ，可列出其余两个方程。当斜面 ABC 趋近于 P 点时，由于 ΔV 是比 ΔS 更高一阶的微量，所以 $\frac{\Delta V}{\Delta S}$ 趋于零。所以有

$$\begin{cases} X_N = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} \\ Y_N = l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} \\ Z_N = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z \end{cases} \quad (2-2)$$

设 $\triangle ABC$ 上的正应力为 σ_N ，则由投影可得

$$\sigma_N = lX_N + mY_N + nZ_N$$

将式 (2-2) 代入，并应用互等定理，得

$$\sigma_N = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy} \quad (2-3)$$

设 $\triangle ABC$ 上的切应力为 τ_N ，则由于

$$p_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2$$

即

$$\tau_N^2 = X_N^2 + Y_N^2 + Z_N^2 - \sigma_N^2 \quad (2-4)$$

由式 (2-3) 及式 (2-4) 可见，在弹性体的任意一点，如果已知六个应力分量 σ_x ， σ_y ， σ_z ， τ_{yz} ， τ_{zx} ， τ_{xy} ，就可以得到任一斜面上的正应力和切应力。这就是说，六个应力完全决定了一点的应力状态。

在特殊情况下，如果面 ABC 是弹性体的边界面，则 X_N ， Y_N ， Z_N 成为面力分量 $\bar{X}$ ， $\bar{Y}$ ， $\bar{Z}$ ，于是由式 (2-2) 得出

$$\begin{cases} l(\sigma_x)_s + m(\tau_{yx})_s + n(\tau_{zx})_s = \bar{X} \\ l(\tau_{xy})_s + m(\sigma_y)_s + n(\tau_{zy})_s = \bar{Y} \\ l(\tau_{xz})_s + m(\tau_{yz})_s + n(\sigma_z)_s = \bar{Z} \end{cases} \quad (2-5)$$

这就是弹性体的应力边界条件，它表明了应力分量的边界条件与面力分量的关系。

2.2.2 主应力与应力主向

设经过弹性体内任一点 P 的某斜面上的切应力等于零，则该斜面上的正应力称为在 P

点的一个主应力，该斜面称为在 P 点的一个应力主面，该斜面的法线方向称为在 P 点的一个主应力方向。

假设在 P 点有一个应力主面存在。这样，由于该面上的切应力等于零，所以该面上的全应力就等于该面上的正应力，也等于主应力 σ 。于是该面上的全应力在坐标轴上的投影为

$$X_N = l\sigma, Y_N = m\sigma, Z_N = n\sigma$$

将式 (2-2) 代入，即得

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = l\sigma \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} = m\sigma \\ l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = n\sigma \end{cases} \quad (a)$$

此外还有关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (b)$$

如果将式 (a) 与式 (b) 联立求解，能够得出一组解答，就得到一个主应力以及与之对应的应力主面和应力主向。具体如下：

将式 (a) 改写为

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \quad (c)$$

这是关于 l, m, n 的三元一次线性方程组。由式 (b) 可见， l, m, n 不能全等于零，所以这三个方程的系数行列式应当等于零，即

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

将行列式展开，并应用互等定理，可得出

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_y - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 - \tau_{xy}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy}) = 0 \quad (2-6)$$

求解这个方程，如果能得出 σ 的三个实根 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ，它就是在 P 点的三个主应力。

为了求得与主应力 σ_1 相应的方向余弦 l_1, m_1, n_1 ，可以利用式 (c) 中的任意两式，由此得

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{yx}m_1 + \tau_{zx}n_1 = 0 \\ \tau_{xy}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{zy}n_1 = 0 \end{cases}$$

将上述两式均除以 l_1 ，得

$$\begin{cases} \tau_{yx}\frac{m_1}{l_1} + \tau_{zx}\frac{n_1}{l_1} + (\sigma_x - \sigma_1) = 0 \\ (\sigma_y - \sigma_1)\frac{m_1}{l_1} + \tau_{zy}\frac{n_1}{l_1} + \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

由此可以求得比值 m_1/l_1 及 n_1/l_1 ，然后按照式 (b) 求得

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_1}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{n_1}{l_1}\right)^2}}$$