中考数学创新题解法指导

石智萍 崔建勤 主编

开放 探索 应用

地质出版社

中考数学创新题
解法指导

主　编　石智萍　崔建勤
副主编　张　洪　翁　耕
编　者　王卫东　王贵春　田富春　刘剑英
刘　帅　许　冰　李明举　李维才
邱晓霞　张富平　范永喜　俞　一
袁常胜　唐岩峯

地质出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

中考数学创新题解法指导/石智萍,崔建勤主编.-北京:地质出版社,2002.2

ISBN 7-116-02607-X

Ⅰ.中… Ⅱ.①石…②崔… Ⅲ.数学课-初中-解题-升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 008654 号

责任编辑:江　橙
责任校对:田建茹
出版发行:地质出版社
社址邮编:北京海淀区学院路 31 号　100083
电　　话:(010)82324508(邮购部)
网　　址:http://www.gph.com.cn
电子邮箱:zbs@gph.com.cn
传　　真:(010)82310759
印　　刷:北京市增富印刷有限责任公司
经　　销:新华书店
开　　本:850×1168 1/32
印　　张:8
字　　数:215000
印　　数:1—6500 册
版　　次:2002 年 2 月北京第 1 版·第 1 次印刷
定　　价:8.00 元

ISBN 7-116-02607-X/G·244

出版说明

20世纪90年代以来，素质教育在我国已全面实施.进入21世纪，"培养学生的实践能力和创新意识"已成为广大教育工作者的共识."让人人学到最有用的数学，使数学成为每个人生活的组成部分"，这几乎成为数学教育工作者的共同目标.

作为评价数学成绩的中考或数学竞赛在这方面已取得突破性进展，考查学生能力的题型不断涌现.随着新教材的逐年展开以及将来新课程标准的实施，相信在不久的将来，一个人人爱数学、学数学和用数学的时代即将来临.本书愿抛砖引玉，为广大读者提供一些有价值的、实用的资料或者练习的天地.

九年义务教育中的初中三年，可以说是对公民进行初等数学教育的启蒙阶段，这就决定了初中数学的特殊地位.一则通过数学教材的逻辑性强，开发学生的智力，培养他们的创新意识；再则通过实际应用的初步训练，帮助学生树立应用意识.这样就可以使学生在以后的学习和工作中，学会从数学的角度看问题，并且设法运用所学的数学知识去解决实际问题.

目录

第1讲

智力游戏问题

在现行新教材中的“想一想”问题里，初一课本安排了两道智力游戏题，一个是“用 +、-、×、÷ 的运算符号以及括号，把四个 4 连接成一个算式，使这个算式的结果分别等于从 1 到 9 这九个数”. 另一个是“将 -4，-3，-2，-1，0，1，2，3，4 这九个数填入九宫格中(图 1-1)，使得横、竖、斜对角的所有 3 个数相加为 0”. 这些问题具有娱乐性、趣味性，又具有开启智力、激活思维的功能.

对于后者填幻方的问题早在 80 年代日本的考题中就有如下的问题：

例 “有 9 张分别写着从 1 到 9 的整数卡片，把这些卡片像图那样排列起来，使竖、横、斜任一方向的 3 张卡片上的数的和都相等. 像这样的排列方法有多少种？”

分析 先设中间的卡片为 x(图 1-2)，因为从 1 到 9 的整数的和是 45，所以竖、横、斜不论哪个方向，3 个数的和都是 $45 \div 3 = 15$. 因此包含 x 这张卡片的竖、横、斜的 12 个数的和是 $15 \times 4 = 60$，其中除 x 外其余各数只出现一次，由此可得方程

$$3x + 45 = 60.$$

解得 x 的值为 5.

再设像图 1-3 那样位置上的 3 张卡片，分别为 y, a, b，包含 y 的竖、横、斜 9 个数的和为 $3 \times 15 = 45$，而且其中 y 用了三次，又所

有九个卡片上的数也是45,可见应有

$$2y=a+b.$$

图 1-1

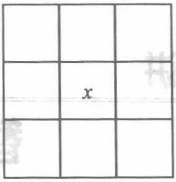

图 1-2

在满足这个式子的 y 值当中 $a\neq b$,所以 y 不能为奇数1,最小也是2.这时,a 的值为1或3,所以有两种排列方法,经过试验,y 的取值方法全部有2,4,6,8四种,所以所求的排列有八种.

图 1-3

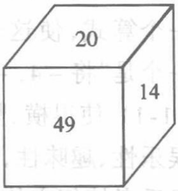

图 1-4

例 (2000年台湾省中考题) 如图1-4是一个正方体,每个面上都写有一个正整数,并且相对两面所写的两个数之和都相等,如果20,49,14的对面所写的数都是质数,依序为 a,b,c,那么 $a+b+c=$______.

分析 依题意,得

$$20+a=49+b=14+c.$$

由此我们可知 a,c 为奇质数,b 为偶质数,而偶质数只有2,从而求得 $a=31,b=37$,所以 $a+b+c=70$.

变式练习

1. 填空题:

(1)(2000 年杭州市中考题) 有一种"二十四点"的游戏,其游戏规则是这样的:任取四个 1 至 13 之间的自然数(如扑克牌四张),将这四个数(每个数用且只用一次)进行加减乘除四则运算,使其结果等于 24.例如:1,2,3,4,可作运算$(1+2+3)\times4=24$,现有四个数 3,4,-6,10,利用上述规则写出三种不同方法的运算式(像$4\times(2+1+3)=24$视作与上述运算相同的运算式)使其结果等于 24.运算式如下:

①________;②________;③________.

另有四个数:3,-5,7,-13 可以通过运算式④________,使其结果等于 24.

(2)(2000 年温州市中考题) 把立方体的六个面分别涂上六种不同的颜色,并画上朵数不同的花.各面上的颜色与花的朵数情况列表如下:

颜色	红	黄	蓝	白	紫	绿
花的朵数	1	2	3	4	5	6

将上述大小相同、颜色、花朵分布完全一样的四个立方体拼成一个水平放置的长方体,如图 1-5,这个长方体的下面共有____朵花.

图 1-5

(3)(1998 年台湾省中考题) 如图 1-6,将○、□、△这三种物体放在天平左、右两旁的称盘上,使两个天平都保持平衡.已知同

形状的物体质量相等,则这三种物体每一个的质量之比为○:□:△ = ______.

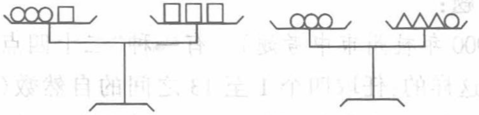

图 1-6

2.(2000 年河北省初中竞赛题) 代数第一册(上)"想一想"中有这样一个问题:"棱长为 a 的正方体,摆放成如图 1-7 所示的形状",现在请回答下列问题:

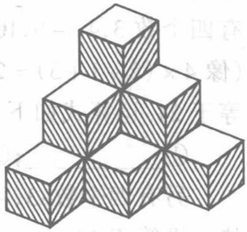

图 1-7

(1) 如果这一物体摆放了如图 1-7 所示的上下三层,请求该物体的表面积(列出算式,并求出结果).

(2) 依图中摆放方法类推,如果该物体摆放了上下 20 层,求该物体的表面积(列出算式,并求出结果).

3.(2000 年河北省初中竞赛题) 将连续的自然数 1 至 1001 按如图 1-8 的方式排列成一个长方形陈列,用一个正方形框出 16 个数,要使这个正方形框出的 16 个数之和分别等于(1)1998;(2)1991;(3)2000;(4)2080;这是否可能?若不可能,试说明理由;若可能,请写出该方框里 16 个数中的最小数与最大数.

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
995	996	997	998	999	1000	1001

图 1-8

第2讲

归纳猜想问题

提供一个数学素材，通过观察、推理，归纳其规律得出自己的猜想，然后再验证，这本身就是一种科学研究的方法.通过这些问题的训练，可以激发我们的创新意识，提高自己的数学素养.下面举一些数、方程和几何中的应用问题.

例1 （2000年河北省中考题） 观察下列各式及其验证过程：

$$2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}.\text{验证}:2\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2^3}{3}}=\sqrt{\frac{(2^3-2)+2}{2^2-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{2(2^2-1)+2}{2^2-1}}=\sqrt{2+\frac{2}{3}}.$$

$$3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}.\text{验证}:3\sqrt{\frac{3}{8}}=\sqrt{\frac{3^3}{8}}=\sqrt{\frac{(3^3-3)+3}{3^2-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{3(3^2-1)+3}{3^2-1}}=\sqrt{3+\frac{3}{8}}.$$

(1) 按照上述两个等式及其验证过程的基本思路，猜想 $4\sqrt{\frac{4}{15}}$ 的变形结果并进行验证.

(2) 针对上述各式反映的规律，写出用 n（n 为任意自然数，$n\geqslant 2$）表示的等式，并给出证明.

解:(1)$4\sqrt{\dfrac{4}{15}}=\sqrt{4+\dfrac{4}{15}}$.

验证:$4\sqrt{\dfrac{4}{15}}=\sqrt{\dfrac{4^3}{15}}=\sqrt{\dfrac{(4^3-4)+4}{15}}=\sqrt{\dfrac{4(4^2-1)+4}{4^2-1}}$

$=\sqrt{4+\dfrac{4}{15}}$.

(2) 由题设及(1)的验证结果,可猜想对任意自然数 $n(n\geqslant 2)$ 都有

$$n\sqrt{\frac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\frac{n}{n^2-1}}.$$

证明:$\because n\sqrt{\dfrac{n}{n^2-1}}=\sqrt{\dfrac{n^3}{n^2-1}}=\sqrt{\dfrac{n^3-n+n}{n^2-1}}$

$=\sqrt{\dfrac{n(n^2-1)+n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\dfrac{n}{n^2-1}}$.

$\therefore n\sqrt{\dfrac{n}{n^2-1}}=\sqrt{n+\dfrac{n}{n^2-1}}$.

小结 本题提供了两个特例,又进行了推广,对于这种由特殊到一般的归纳,实际上是数学常用的抽象方法.

例 2 (2000 年潍坊市中考题)

(1) 如下表,方程 1,方程 2,方程 3,……是按一定规律排列的一列方程.解方程 1,并将它的解填在表中的空白处;

序号	方程	方程的解	
1.	$\dfrac{6}{x}-\dfrac{1}{x-2}=1$	$x_1=$ ____	$x_2=$ ____
2.	$\dfrac{8}{x}-\dfrac{1}{x-3}=1$	$x_1=4$	$x_2=6$
3.	$\dfrac{10}{x}-\dfrac{1}{x-4}=1$	$x_1=5$	$x_2=8$
⋮	⋮	⋮	⋮

(2) 若方程$\frac{a}{x}-\frac{1}{x-b}=1(a>b)$的解是 $x_1=6,x_2=10$.求 a，b 的值.该方程是不是(1)中所给出的一列方程中的一个方程？如果是，它是第几个方程？

(3) 请写出这列方程中的第 n 个方程和它的解，并验证所写出的解适合第 n 个方程.

解：(1)将$\frac{6}{x}-\frac{1}{x-2}=1$ 化简为 $x^2-7x+12=0$，

解之，得 $x_1=3,x_2=4$.

检验知 $x_1=3,x_2=4$ 是原方程的解.

(2) 分别将 $x_1=6,x_2=10$ 代入$\frac{a}{x}-\frac{1}{x-b}=1$ 中得

$$\begin{cases}\frac{a}{6}-\frac{1}{6-b}=1 & ① \\ \frac{a}{10}-\frac{1}{10-b}=1 & ②\end{cases}$$

②×10 - ①×6 得 $\quad\frac{6}{6-b}-\frac{10}{10-b}=4$.

整理，得 $\quad b^2-17b+60=0$，

解得 $b_1=5$ 时，由①得 $a_1=12$；$b_2=12$ 时，由①得 $a_2=5$.

$\because a>b$，$\therefore a=12,b=5$.

经验证可知，$a=12,b=5$ 满足方程.

该方程是(1)中所给出的一列方程中的一个方程，是第 4 个.

(3) 这列方程的第 n 个方程为

$$\frac{2n+4}{x}-\frac{1}{x-(n+1)}=1 \quad (n\text{ 为自然数}) \qquad ③$$

它的解为 $\quad x_1=n+2,x_2=2(n+1)$.

将 $x_1=n+2$ 代入方程③，得

左边$=\frac{2n+4}{n+2}-\frac{1}{(n+2)-(n+1)}=2-1=1=$右边.

将 $x_2=2(n+1)$代入方程③，得

左边 $= \dfrac{2n+4}{2(n+1)} - \dfrac{1}{2(n+1)-(n+1)} = \dfrac{n+2}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1}{n+1}$ $= 1 =$ 右边.

所写方程③的解适合第 n 个方程.

例 3 （2001 年河北省中考题） 在△ABC 中,D 为 BC 边的中点,E 为 AC 边上的任意一点,BE 交 AD 于点 O.某学生在研究这一问题时,发现了如下的事实:

（1）当 $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1+1}$ 时,有 $\dfrac{AO}{AD} = \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{2+1}$;

（2）当 $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{1+2}$ 时,有 $\dfrac{AO}{AD} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{2}{2+2}$;

（3）当 $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{1+3}$ 时,有 $\dfrac{AO}{AD} = \dfrac{2}{5} = \dfrac{2}{2+3}$;

在图 2-1(4)中,当 $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{1}{1+n}$ 时,参照上述研究结论,请你猜想用 n 表示 $\dfrac{AO}{AD}$ 的一般结论,并给出证明(其中 n 是正整数).

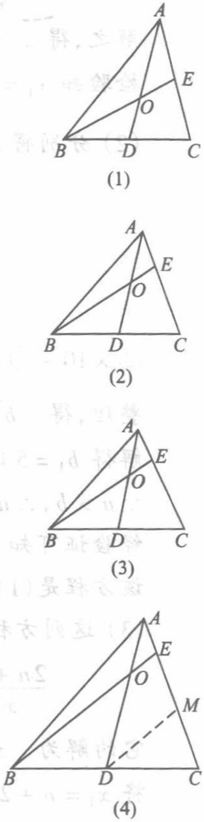

图 2-1

解:由研究结论得出猜想的规律为 $\dfrac{AO}{AD} = \dfrac{2}{2+n}$.

过 D 作 $DM \parallel BE$ 交 EC 于点 M,则有 $\dfrac{CM}{ME} = \dfrac{CD}{DB} = 1$,

$\therefore$ 有 $EM = \dfrac{1}{2}EC$.

由$\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{1}{1+n}$，得$\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{1}{n}$，从而$\dfrac{AE}{EM}=\dfrac{AE}{\frac{1}{2}EC}=\dfrac{2}{n}$.

故$\dfrac{AO}{AD}=\dfrac{AE}{AM}=\dfrac{2}{2+n}$.

事实上，在新编义务教育数学教材中初一代数“公式”一节中有许多这样的实例，“用字母代替数”正是代数优于算术的地方.正是由于代数的抽象性决定了它的一般性，也正是由于代数式的高度概括性从而反映了规律的本质属性.下面提供一些练习供读者训练.

变式练习

1. 填空题：

(1)(1999 年日照市中考题) 研究下列算式，你会发现有什么规律？

$$1\times3+1=4=2^2;$$
$$2\times4+1=9=3^2;$$
$$3\times5+1=16=4^2;$$
$$4\times6+1=25=5^2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

请你将找出的规律用公式表示出来：________________.

(2)(1999 年三明市中考题) 问题：你能很快算出 1995^2 吗？

为了解决这个问题，我们考察个位上的数为 5 的自然数的平方.任意一个个位数为 5 的自然数可写成 $10n+5$，即求$(10n+5)^2$的值(n 为自然数).你试分析 $n=1$，$n=2$，$n=30$，…这些简单情况，从中探索其规律，并归纳、猜想出结论(在下面空格内填上你的探索结果).

①通过计算，探索规律：

$15^2 = 225$ 可写成 $100 \times 1(1+1) + 25$,

$25^2 = 625$ 可写成 $100 \times 2(2+1) + 25$,

$35^2 = 1225$ 可写成 $100 \times 3(3+1) + 25$,

$45^2 = 2025$ 可写成 $100 \times 4(4+1) + 25$,

…………

$75^2 = 5625$ 可写成______________,

$85^2 = 7225$ 可写成______________.

…………

②从第(1)题的结果,归纳、猜想得$(10n+5)^2 =$__________.

③根据上面的归纳、猜想,请算出 $1995^2 =$____________.

(3)(2000 年北京市东城区中考题) 已知正数 a 和 b,有下列命题:

(1) 若 $a+b=2$,则$\sqrt{ab} \leqslant 1$;

(2) 若 $a+b=3$,则$\sqrt{ab} \leqslant \frac{3}{2}$;

(3) 若 $a+b=6$,则$\sqrt{ab} \leqslant 3$.

根据以上三个命题所提供的规律猜想:若 $a+b=9$,则$\sqrt{ab} \leqslant$_____.

(4)(2000 年济南市中考题) 观察下列各式,你会发现什么规律?

$3 \times 5 = 15$, 而 $15 = 4^2 - 1$,

$5 \times 7 = 35$, 而 $35 = 6^2 - 1$,

…… ……

$11 \times 13 = 143$, 而 $143 = 12^2 - 1$,

…… ……

将你猜想到的规律用含一个字母的式子表示出来:______.

(5)(2000 年河南省中考题) 某下岗职工购进一批苹果,到集贸市场零售,已知卖出的苹果数量 x 与售价 y 的关系如下表:

数量 x(千克)	1	2	3	4	5
售价 y(元)	$2+0.1$	$4+0.2$	$6+0.3$	$8+0.4$	$10+0.5$

写出用 x 表示 y 的公式是________________.

(6)（2000 年江西省中考题） 有一列数:1,2,3,4,5,6,⋯.

当按顺序从第 2 个数数到第 6 个数时,共数了________个数;

当按顺序从第 m 个数数到第 n 个数($n>m$)时,共数了______个数.

(7)（2000 年山西省中考题） 下列每个图是由若干盆花组成形如三角形的图案;每条边(包括两个顶点)有 $n(n>1)$盆花,每图案的花盆总数是 S.

$n=2$, $S=3$　　$n=3$, $S=6$　　$n=4$, $S=9$

按此规律推断,S 与 n 的关系式为____________.

(8)（2000 年新疆中考题） 研究下列算式:

$$1=1^2,$$
$$1+3=4=2^2,$$
$$1+3+5=9=3^2,$$
$$1+3+5+7=16=4^2,$$
$$1+3+5+7+9=25=5^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

用代数式表示此规律(n 为正整数):

$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=$________.

(9)（1997 年常州市中考题） 问题:你能比较两个数 1997^{1998} 和 1998^{1997} 的大小吗?

为了解决这个问题,我们先把它抽象成数学问题,写出它的一般形式,即比较 n^{n+1} 和 $(n+1)^n$ 的大小(n 是自然数).然后,我们从分析 $n=1$, $n=2$, $n=3$,⋯⋯这些简单情形入手,从中发现规律,经过归纳,猜想出结论.

①通过计算,比较下列各组中两个数的大小(在空格中填写“>”、“=”、“<”号):

1^2 ___ 2^1; 2^3 ___ 3^2; 3^4 ___ 4^3; 4^5 ___ 5^4; 5^6 ___ 6^5,……

②从第①题的结果经过归纳,可以猜想出 n^{n+1} 和 $(n+1)^n$ 的大小关系是:______.

③根据上面归纳猜想得到的一般结论,试比较下列两个数的大小:1997^{1998} ______ 1998^{1997}.

2.(1991 年广西中考题)

(1) 看一看:下列两组算式 $(3\times5)^2$ 与 $3^2\times5^2$; $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)\times4\right]^2$ 与 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2\times4^2$. 每组两个算式的计算结果是否相等?

(2) 想一想:$(ab)^3$ 等于什么?

(3) 猜一猜:当 n 为正整数时,$(ab)^n$ 等于什么? 试证明结论的正确性.

3.(1998 年安徽省中考题) 给出下列算式:

$$3^2-1^2=8=8\times1,$$
$$5^2-3^2=16=8\times2,$$
$$7^2-5^2=24=8\times3,$$
$$9^2-7^2=32=8\times4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

观察上面一系列等式,你能发现什么规律? 试用代数式来表述这个规律.

4.(2000 年江西省中考题)

对于气温,有的地方用摄氏温度表示,有的地方用华氏温度表示,摄氏温度与华氏温度之间存在着某种函数关系.从温度计的温度的刻度上可以看出,摄氏(℃)温度 x 与华氏(℉)温度 y 有如下的对应关系: