KAM方法和系统的KAM稳定性

从福仲 著

科学出版社

KAM 方法和系统的 KAM 稳定性

从福仲　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书详细介绍近可积系统的 KAM 稳定性, 系统收录了作者十余年的研究成果. 全书分四章. 第 1 章介绍 KAM 方法和 Hamilton 系统的一些基本概念, 包括 KAM 迭代、测度估计、Poisson 括号等; 第 2 章系统介绍近可积映射的 KAM 稳定性, 包括近扭转映射的不变环面、近可积辛映射的 KAM 理论和 Nekhoroshev 理论等; 第 3 章建立了广义 Hamilton 系统的 KAM 稳定性, 包括 Kolmogorov 型定理、Atropic 不变环面、有效稳定性等; 第 4 章给出 KAM 方法的应用.

本书可作为学习和研究 Hamilton 动力系统的工具书，也可作为数学、物理、力学等非线性科学领域的大学教师、研究生、博士后和科技人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

KAM 方法和系统的 KAM 稳定性/从福仲著. —北京: 科学出版社, 2013

ISBN 978-7-03-037598-8

Ⅰ. ①K… Ⅱ. ①从… Ⅲ. ①哈密顿系统–研究 Ⅳ. ①O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 114395 号

责任编辑: 赵彦超 李静科 / 责任校对: 宣 慧

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

新科印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 6 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2013 年 6 月第一次印刷 印张: 11 3/4

字数: 233 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

自然科学中的许多问题, 例如, N 体问题 (弱耦合振荡)、Fermi-Pasta-Ulam 问题, 以及固体物理理论中的振荡现象等, 都可以归结为某些近可积系统. 这方面研究的核心问题是扰动系统能否保持可积系统的稳定性机制, Poincaré称之为动力学的基本问题[Ar3]. 研究这个问题的两个主要工具是 KAM 理论和 Nekhoroshev 理论.

经典的 KAM(Kolmogorov-Arnold-Moser) 理论指出, 具有 Diophanto 频率的拟周期运动 (不变环面) 在小扰动下仍然保持. 根据 Poincaré 不可积定理, 即使在扰动非常小的情况下, 共振环面 (其频率有理相关) 仍然被破坏. 这样就产生两个问题: 一方面, 共振环面能否作为低维环面保持 (当然, 其频率应满足相对 Diophanto 条件)? 答案是肯定的. 进一步, 有些学者也讨论了一般不变集的存在性, 这就产生了 Aubry-Mather 理论. 另一方面, 轨道在相空间的整体性态是什么样的? 如果自由度为 1 时, 根据 KAM 理论, 相空间被周期轨道围成 "一个个封闭的小区域", 因此所有轨道是有界的. 许多学者正是利用这个特点来研究 Littlewood 猜测的. 对于多个自由度的系统, 轨道存在很复杂的动力行为, 如, 出现 Arnold 扩散现象等.

1977 年, Nekhoroshev 证明了一个非常深刻的结果[Ne1]. 根据他的定理, 在一定的几何条件 (如陡性) 之下, 相空间中每个轨迹的作用变量部分在相当长 (一般是指数大) 的时间内, 都不发生明显变化. 因而 Arnold 扩散是相当缓慢的. 上述时间也称为 Arnold 扩散的下界. 20 世纪 80 年代, 人们利用 Nekhoroshev 定理大体上证明了 Boltzmann-Jeans 关于能量均分的猜测[BGG2], 修正了 Planck 指数律, 对 Fermi-Pasta-Ulam 悖论给出了合理的解释[GGMV1], 对以木星–太阳为主体的限制三体问题, 证明了在 "宇宙年龄"(2×10^{10} 年) 内的稳定性[GDFGS1], 从而揭示了经典力学、动力系统的遍历性和混沌的内在联系.

KAM 理论和 Nekhoroshev 理论统称为 KAM 稳定性理论. KAM 稳定性被认为是 20 世纪动力系统和经典力学理论最重要的进展之一. 本书旨在向读者阐述 KAM 稳定性的主要思想、典型方法和最新研究成果. 系统收录了作者从 1994~2010 年在系统稳定性方面的研究成果. 同时, 书中也给出了 KAM 方法的典型应用.

第 1 章介绍了 KAM 方法和 Hamilton 系统的一些基本概念, 包括 KAM 迭代程序、测度估计方法、Poisson 括号和广义 Hamilton 系统等基本概念. 这些是阅读后续章节的基础.

第 2 章系统介绍近可积映射的 KAM 稳定性. 对于一般的近扭转映射 (作用变量和角变量的维数可以不等), 在满足相交性条件下, 建立了不变环面的存在性定

理; 在 Rüssmann 条件下, 证明了近可积辛映射的 KAM 定理; 建立了保体积映射的参数化 KAM 定理和近扭转映射的 Nekhoroshev 理论等.

第 3 章主要研究广义 Hamilton 系统的 KAM 稳定性问题, 包括广义 Hamilton 系统的 Kolmogorov 型定理、双曲广义 Hamilton 系统的 Atropic 低维不变环面的存在性、椭圆广义 Hamilton 系统的 Atropic 低维不变环面的存在性、广义 Hamilton 系统的 Nekhoroshev 理论和广义 Hamilton 系统的近不变环面性质等.

第 4 章介绍 KAM 方法和 KAM 稳定性的应用. 首先介绍 KAM 方法在研究共振环面的保持性方面的应用. 证明了在非退化条件下, 满足相对 Diophanto 条件的共振环面可以作为低维环面保持下来而没有被完全破坏. 被保持下来的环面可能是椭圆的、双曲的, 或者是混合型的. 其次, 介绍 KAM 方法在研究多频率快慢系统近似分解中的应用. 最后, 介绍 KAM 稳定性在研究 Littlewood 问题方面的应用. 通过利用拟周期型 KAM 定理, 获得拟周期摆型方程 Lagrange 稳定的充要条件.

本书的各章节具有相对独立性, 读者可以视情况跳跃式阅读. 希望本书的出版能使更多的读者对 KAM 方法和 KAM 稳定性有一个基本的了解, 达到尽快掌握该领域概貌的目的.

本书的研究成果得到国家自然科学基金 (10101030, 10571179, 10871203, 11171350)、教育部新世纪优秀人才支持计划 (NCET-07-0386)、中国博士后科学基金 (29 批, 一等)、中国科学院王宽诚博士后奖励基金、吉林省自然科学基金 (201115133) 等项目的资助, 在此表示衷心感谢!

从福仲

2013 年 1 月 6 日

目　录

第 1 章 引 论

KAM 理论是 20 世纪最杰出的数学成就之一, 它是在 1954~1963 年间由前苏联数学家 Kolmogorov A N 和 Arnold V I, 以及德国数学家 Moser J 提出的[Ko1,Ar1,Ar2,Mo1]. KAM 是三位数学家英文名字的缩写.

KAM 理论是研究 Hamilton 系统及其相关系统拟周期运动存在性的摄动理论。这一理论将经典的平均法和形式积分方法巧妙结合起来, 通过构造一种快速迭代程序和一系列正则变换, 来说明系统在相空间的一个正测度子集上是可积的, 从而达到证明拟周期运动存在的目的. 本书将系统介绍这一理论的基本内容.

§1.1 KAM 方法

考虑 Hamilton 系统

$$\dot{y} = -\frac{\partial H_0}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H_0}{\partial y}, \tag{1.1}$$

其中

$$H_0(y,x) = N_0(y) + \varepsilon P_0(y,x), \tag{1.2}$$

这里 $y \in G \subset \mathbf{R}^n$, $x \in T^n$, $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 是通常的 n 维环面, G 是有界闭区域, N_0 与 P_0 为定义在 $G \times T^n$ 上的实解析函数, ε 是一维参数, 并且, 相空间 $G \times T^n$ 具有标准的辛结构

$$v = \sum_j \mathrm{d}y_j \wedge \mathrm{d}x_j.$$

相伴的 Hamilton 向量场 X_{H_0} 满足 $v \lrcorner X_{H_0} = -\mathrm{d}H_0$.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 称系统 (1.1) 为可积的. 当 $|\varepsilon|$ 充分小时, 称系统 (1.1) 是近可积的. 变量 y 和 x 分别称为作用变量和角变量. 对于可积的 Hamilton 系统, 即对 $\varepsilon = 0$ 的情况, (1.1) 具有一族拟周期解

$$y = y_0, \quad x = \frac{\partial N_0}{\partial y}(y_0)t + x_0\,(\mathrm{mod}1), \qquad y_0 \in G. \tag{1.3}$$

对于所有的 $t \in \mathbf{R}$, (1.3) 定义的集合在某 n 维环面上, 记该环面为 $\Im_{y_0}$, $\omega(y_0) = \partial N_0(y_0)/\partial y$ 称为不变环面 $\Im_{y_0}$ 的频率.

1954 年, Kolmogorov 提出了研究可积 Hamilton 系统的不变环面在小扰动下的保持性问题[Ko1]. 他认为, 对于近可积系统, 可积系统的 "多数" 不变环面在小扰

动下将仍然存在, 只是发生微小的形变. 这里“多数”的含义是指所有保持下来的不变环面的并形成一个正测度的集合. Kolmogorov 在 [Ko1] 中给出了这一结论的证明梗概, 但他从未补充证明中的全部细节. 1962 年, Arnold 设计了一个迭代程序, 给出了这个问题严格的数学证明[Ar1,Ar2]. 与此同时, Moser 对于保面积映射证明了与 Hamilton 系统类似的问题[Mo1]. 这些工作奠定了 KAM 理论.

KAM 方法的基本思想是构造快速 Newton 迭代程序. 这个方法的特点包括两个部分: 一是构造迭代程序. 在迭代的每一步, 通过坐标变换并利用调和方程“消掉” Hamilton 函数中的不可积部分, 即含有角变量的部分, 使得当扰动参数趋于零时, 新产生的扰动项是上一步扰动项的高阶无穷小; 二是构造收敛域. 迭代中每次都要从作用变量的定义域中“挖掉”可能使迭代不收敛的变量的取值部分, 最终使迭代在一个正测度集合上收敛. 在 Arnold 原始文章中, 迭代程序和收敛域的构造在证明的每一步是同时进行的. 后来, Pöschel J 发展了经典的 KAM 思想, 设计了一种将两个过程分开处理的方法[Pö1,Pö2,Pö3]. 目前, 人们普遍采用的是 Pöschel 迭代程序. 下面, 简要介绍 Arnold 设计的迭代程序. Pöschel 迭代程序将在后面的章节中详细介绍.

考虑 Hamilton 函数 (1.2). 引进一个正则坐标变换 $\Phi_0:(Y,X)\to(y,x)$,

$$y=Y+\varepsilon\frac{\partial S_0(Y,x)}{\partial x},\quad X=x+\varepsilon\frac{\partial S_0(Y,x)}{\partial Y},\tag{1.4}$$

其中 S_0 是一个待定的函数. 函数 $Yx+\varepsilon S_0(Y,x)$ 称为发生函数. (1.4) 称为近恒等坐标变换, 也称为正则坐标变换. 根据辛几何的基本知识可知, 在坐标变换 (1.4) 下, Hamilton 系统 (1.1) 被化成如下系统:

$$\dot{Y}=-\frac{\partial(H_0\circ\Phi_0)}{\partial X},\quad \dot{X}=\frac{\partial(H_0\circ\Phi_0)}{\partial Y}.\tag{1.5}$$

一般地, 对扰动项 $P_0(y,x)$ 关于角变量进行空间平均得到的函数, 记为 $\langle P_0\rangle^x$. 则

$$\langle P_0\rangle^x(y)=\int_{T^n}P_0(y,x)\mathrm{d}x.$$

由于 P_0 是实解析的, 它可以表示为 Fourier 展开式,

$$P_0(y,x)=P_{00}(y)+\sum_{k\neq0}P_{0k}(y)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}(k,x)\right).$$

这里 $k\in\mathbf{Z}^n$, (k,x) 表示 n 维空间中向量 k 和 x 的内积 (有时, 也记为 xk),

$$P_{0k}(y)=\int_{T^n}P_0(y,x)\exp\left(-\sqrt{-1}(k,x)\right)\mathrm{d}x.$$

这样, $P_{00}(y) = \langle P_0 \rangle^x (y)$. 记

$$\omega_0(y) = \frac{\partial N_0}{\partial y}(y).$$

它是定义在 G 上的 n 维向量函数. 称 $\omega_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 为频率映射. 令

$$P_{0N_0}(y,x) = \sum_{0<|k|\leqslant N_0} P_{0k}(y) \exp\left(2\pi\sqrt{-1}(k,x)\right).$$

这里 N_0 是一个自然数, $|k| = |k_1| + |k_2| + \cdots + |k_n|$. P_{0N_0} 是 P_0 的 N_0 截断函数减去 P_0 的平均函数. 取函数 S_0 满足如下的调和方程:

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}, \omega_0\right) + P_{0N_0} = 0. \tag{1.6}$$

注意, 在方程 (1.6) 中, 每一个函数都取相同变量. 根据 P_0 的 Fourier 表达式, S_0 应满足

$$S_0(y,x) = -\sum_{0<|k|\leqslant N_0} \frac{P_{0k}(y)}{2\pi\sqrt{-1}(k,\omega)} \exp\left(2\pi\sqrt{-1}(k,x)\right). \tag{1.7}$$

这样, 新的 Hamilton 函数 $H_1 = H_0 \circ \Phi_0$ 可以表示为

$$\begin{aligned}
H_1(Y,X) &= N_1(Y) + \varepsilon^2 P_1(Y,X),\\
N_1(Y) &= N_0(Y) + \varepsilon \langle P_0 \rangle^x (Y),\\
\varepsilon^2 P_1(Y,X) &= \left[N_0\left(Y + \varepsilon\frac{\partial S_0}{\partial x}\right) - N_0(Y) - \varepsilon\frac{\partial N_0}{\partial Y}\frac{\partial S_0}{\partial x}\right]\\
&\quad + \varepsilon\left[P_0\left(Y + \varepsilon\frac{\partial S_0}{\partial x}, x\right) - P_0(Y,x)\right] + \varepsilon\hat{P}_0(Y,x),
\end{aligned} \tag{1.8}$$

其中, $\hat{P}_0 = P_0 - P_{0N_0} - \langle P_0 \rangle^x$. 上面的表达式中变量 x 通过坐标变换 (1.4) 表示成 Y 和 X 的函数. 另外, 所有的函数都是依赖于参数 ε 的. 为了简单起见, 略去了函数表达式中的 ε.

在 (1.8) 的第三个等式中, 右边第一项利用 Taylor 公式可以写成 $O(\varepsilon^2)$, 第二项利用中值定理也可写成 $O(\varepsilon^2)$. 至于第三项, 可以通过选取 $N_0 = N_0(\varepsilon)$ 充分大, 写成 $O\left(\varepsilon^2\right)$. 因此, 式 (1.8) 是有意义的.

归纳地, 在经过 m 次正则坐标变换后, 可以假设 Hamilton 函数被化成

$$H_m(y,x) = N_m(y) + \varepsilon^{2^m} P_m(y,x). \tag*{$(1.2)_m$}$$

类似地, 引进正则坐标变换 $\Phi_m : (Y,X) \to (y,x)$,

$$y = Y + \varepsilon^{2^m}\frac{\partial S_m(Y,x)}{\partial x}, \quad X = x + \varepsilon^{2^m}\frac{\partial S_m(Y,x)}{\partial x}, \tag*{$(1.4)_m$}$$

其中 S_m 是一个待定的函数. 将 P_m 展开为 Fourier 级数,

$$P_m(y,x) = P_{m0}(y) + \sum_{k\neq 0} P_{mk}(y)\exp\left(2\pi\sqrt{-1}(k,x)\right).$$

取函数 S_m 满足如下的调和方程:

$$\left(\frac{\partial S_m}{\partial x}, \omega_m\right) + P_{mN_m} = 0, \tag{1.6$_m$}$$

其中, $\omega_m(y) = \partial N_m(y)/\partial y$. 同样, 根据 P_m 的 Fourier 表达式, S_m 应满足

$$S_m(y,x) = -\sum_{0<|k|\leqslant N_m} \frac{P_{mk}(y)}{2\pi\sqrt{-1}(k,\omega_m(y))}\exp\left(2\pi\sqrt{-1}(k,x)\right). \tag{1.7$_m$}$$

这样, 新的 Hamilton 函数 $H_{m+1} = H_m \circ \Phi_m$ 可以表示为

$$\begin{aligned}
H_{m+1}(Y,X) &= N_{m+1}(Y) + \varepsilon^{2^{m+1}} P_{m+1}(Y,X),\\
N_{m+1}(Y) &= N_m(Y) + \varepsilon^{2^m}\langle P_m\rangle^x(Y),\\
\varepsilon^{2^{m+1}} P_{m+1}(Y,X) &= \left[N_m\left(Y + \varepsilon^{2^m}\frac{\partial S_m}{\partial x}\right) - N_m(Y) - \varepsilon^{2^m}\frac{\partial N_m}{\partial Y}\frac{\partial S_m}{\partial x}\right]\\
&\quad + \varepsilon^{2^m}\left[P_m\left(Y + \varepsilon^{2^m}\frac{\partial S_m}{\partial x}, x\right) - P_m(Y,x)\right]\\
&\quad + \varepsilon^{2^m}\hat{P}_m(Y,x),
\end{aligned} \tag{1.8$_{m+1}$}$$

其中, $\hat{P}_m = P_m - P_{mN_m} - \langle P_m\rangle^x$. 上面的表达式中变量 x 通过坐标变换 $(1.4)_m$ 表示成 Y 和 X 的函数. 类似于前面的分析, $(1.8)_m$ 的第三个等式是有意义的.

从上面的过程可以看出, 迭代的每一步新的扰动项都是上一步扰动项的高阶无穷小. 这样的迭代程序称为快速 Newton 迭代程序. 令 $m\to\infty$, 则 $H_m(y,x)\to N_\infty(y)$. 最终的 Hamilton 函数 $N_\infty(y)$ 将产生一个可积的系统. 因此, 系统存在不变环面.

值得注意的问题是, 存在 $y\in G$, 使得 0 是 $(1.7)_m$ 中的分母 $2\pi\sqrt{-1}(k,\omega_m(y))$ 构成的数列的聚点. 为了使迭代过程收敛, 数列 $2\pi\sqrt{-1}(k,\omega_m(y))$ 不能 “太快” 收敛于 0. 为了克服这一困难, 迭代的每一步需要在 G 中去掉一些使 $2\pi\sqrt{-1}(k,\omega_m(y))$ 趋于零 “太快” 的 y. 经验上, 使得迭代收敛的 y 一般应在集合

$$O_m = \left\{y\middle| y\in G, |(k,\omega_m(y))| \geqslant \delta_m|k|^{-\tau}, \forall k\in \mathbf{Z}^n, 0<|k|\leqslant N_m\right\}$$

中. KAM 方法的一个重要的步骤就是估计集合

$$G_\infty = \bigcap_{m=0}^{\infty} O_m$$

的测度, 并且证明 G_∞ 有正测度.

最后, 需要指出的是, 上面关于 KAM 迭代程序的介绍还需要进一步完善, 例如, 收敛性的严格证明、测度估计、扰动估计等都需要进一步给出. 后面, 我们会发现, 由于技术的原因, 对于每一步迭代过程, 扰动项估计达不到 $O(\varepsilon^{2^m})$, 可以达到 $O(\varepsilon^{\gamma^m})$, 其中, $1<\gamma<2$ 是某常数.

§1.2 KAM 稳定性和 Nekhoroshev 理论

摄动技术是研究保守动力系统运动轨道长时间演化机制的基本工具. KAM 理论和 Nekhoroshev 理论是现代摄动理论的重要内容之一. 它们源于天体力学中对运动轨道的深入研究.

众所周知, 天体力学的中心问题之一是寻找周期或拟周期轨道. 从技术角度来看, 周期轨道的研究相对容易, Poincaré 在 1892 年建立了著名的 Poincaré 定理, 说明天体系统中周期轨道的存在性. 拟周期轨道的研究比较困难, 这主要是因为证明存在性问题时遇到了著名的 "小除数问题". KAM 理论就是为了克服小除数问题而建立的.

KAM 理论是研究保守动力系统轨道永恒稳定的强有力工具. 这里的稳定性指的是 Lagrange 稳定, 即轨道的有界性. 从上一节可以看出, 这一理论不能研究系统所有轨道的稳定性问题. 对于 $y_*\in G\backslash G_\infty$, 轨道 $x=\partial N_0(y_*)/\partial yt+x_0(\mathrm{mod}1)$, $y=y_*$ 在扰动下, 就可能是不稳定性的. 事实上, Arnold 通过例子说明确实存在那样的轨道, 当时间趋于无穷时, 轨道可以通向无穷远处. 现在人们称之为 Arnold 扩散现象. Arnold 扩散现象说明, 近可积 Hamilton 系统一般是不稳定的. 退而求其次, 能否证明近可积 Hamilton 系统的运动轨道在一个 "相当长" 的时间内是稳定的?

1977 年, Nekhoroshev 对近可积 Hamilton 系统建立了一个轨道长时间稳定性定理[Ne1]. 记 ε 是扰动参数. 他证明, 近可积 Hamilton 系统的所有运动轨道的作用变量部分在指数长时间 $\exp(c\varepsilon^{-a})$ 内, 不发生明显的变化, 漂移尺度为 ε^b. 这里, a,b,c 为常数, a 和 b 称为稳定指数. 这一工作说明, 尽管近可积系统的运动轨道可能是不稳定的, 并且会发生 Arnold 扩散现象, 但扩散的速度是相当缓慢的. 称运动轨道这样的性质为 Nekhoroshev 稳定性, 也称为有效稳定性. 自 Nekhoroshev 稳定性理论建立以来, 随着人们利用这一理论成功解释了经典物理中的一些现象和规律, 这一理论受到了高度的重视, 并成为动力系统和数学物理研究的热门课题之一[GZ1,Lo1,LN1,Pö4].

考虑变量为 y 和 x, 参数为 ε 的一个动力系统, 其中 $y\in G\subset\mathbf{R}^m$, $x\in T^n$, $\varepsilon\in\mathbf{R}$. 这里 y 一般称为慢变量, x 一般称为快变量.

定义 1.2.1 记系统的轨道为 $(y(t),x(t))$, $t\in\mathbf{R}$ 或 $t\in\mathbf{Z}$. 存在正常数 a,b,c

和 ε_0, 这些常数与轨道和扰动参数无关, 使得若 $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ 且 $|t|<\exp(c\varepsilon^{-a})$ 时, 从 (y_0,x_0) 点出发的轨道 $(y(t),x(t))$ 满足 $\|y(t)-y_0\|\leqslant c\varepsilon^b$, 则称动力系统具有指数为 a 和 b 的 **Nekhoroshev 稳定性**. $T(\varepsilon)=\exp(c\varepsilon^{-a})$ 称为**稳定时间**, $R(\varepsilon)=c\varepsilon^b$ 称为**稳定半径**.

KAM 理论和 Nekhoroshev 理论应用的前提条件是动力系统应该满足某种非退化性假设. 对于 KAM 理论, 这个条件要保证频率映射具有可逆性, 一般是可积系统的 Hamilton 函数 N 满足下面的条件之一:

1. 非退化性条件

$$\det\left(\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right)\neq 0;$$

2. 等能非退化性条件

$$\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 N}{\partial y^2} & \dfrac{\partial N}{\partial y}\\ \left(\dfrac{\partial N}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} & 0\end{pmatrix}\neq 0;$$

3. Bruno 条件

$$\max_G \operatorname{rank}\left\{\frac{\partial N}{\partial y},\frac{\partial^2 N}{\partial y^2}\right\}=n;$$

4. Rüssmann 条件[Rü1]

$$\operatorname{rank}\left\{\frac{\partial N}{\partial y},\frac{\partial^\alpha}{\partial y^\alpha}\left(\frac{\partial N}{\partial y}\right)\middle|\,\forall\alpha\in\mathbf{Z}_+^n,\ |\alpha|\leqslant n-1\right\}=n.$$

对于 Nekhoroshev 理论, 要求可积系统满足某种几何性条件, 例如, 陡性条件、拟凸性条件和射流条件. 任意给定 $y\in G$, 用 λ 表示过 y 点的超平面, 其维数 $\dim\lambda\neq 0$. 用 $\operatorname{grad}(H|_\lambda)$ 表示 H 的梯度 $\operatorname{grad}H$ 在平面 λ 上的投影. 记

$$m_{y,\lambda}(\eta)=\min_{y'\in\lambda,\|y'-y\|=\eta}\|\operatorname{grad}(H|_\lambda)_{y'}\|.$$

定义 1.2.2[Ne1] 如果存在常数 $c>0$, $\delta>0$ 和 $\alpha>0$ 使得

$$\max_{0\leqslant\eta\leqslant\xi} m_{y,\lambda}(\eta)>c\xi^\alpha,\qquad \forall\xi\in(0,\alpha],\tag{2.1}$$

则称函数 H 在平面 λ 的 y 处是**陡的**, c 和 δ 被称为**陡性系数**, α 称为**陡性指数**. 如果上面的常数 c, δ 和 α, 对于任意过 y 点的超平面 λ, 不等式 (2.1) 都成立, 称函数 H 在 y 处是**陡的**.

定义 1.2.3[LN1]　对于任意 $y \in G$, 如果函数 N 满足下面的两个条件:

$$\left\| \frac{\partial N}{\partial y} \right\| > c,$$

$$\left| \left(\xi, \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \xi \right) \right| \geqslant c \|\xi\|^2, \qquad \forall \xi \in \left\{ \xi \,\middle|\, \frac{\partial N}{\partial y} \xi = 0 \right\},$$

则称函数 N 是**拟凸的**.

现在认为陡性是保证系统具有 Nekhoroshev 稳定性的最基本条件. 不难看出拟凸函数是“最陡”的陡性函数. 由于陡性函数的数学表示非常复杂, 在考虑 Nekhoroshev 稳定性时需要对作用变量的定义区域和环面的频率集合进行共振块分解, 这导致了 Nekhoroshev 的证明非常复杂, 并且稳定指数的表达式不够简洁. 20 世纪 80 年代, Benettin, Gallavotti, Galgani 和 Giorgilli 等研究了拟凸函数, 并最终获得该类近可积 Hamilton 系统的最佳稳定指数 $1/(2n)$, 其中 n 为 Hamilton 系统的自由度数, 细节见 [BGG1, BG1, Gi1, GG1].

从技术的角度看, KAM 理论和 Nekhoroshev 理论的共同之处在于, 都需要构造快速 Newton 迭代程序, 但前者的迭代是无限次的, 而后者是有限次的. 除此之外, 由于有限次迭代原则上不导致小除数, 因此, Nekhoroshev 理论不需要进行测度估计. 从轨道的性态看, KAM 理论考虑轨道的永恒稳定性问题, Nekhoroshev 理论研究的是轨道的大时间尺度的稳定性, 因而前者考虑“大部分轨道”, 后者研究所有轨道. 现在, 人们称应用 KAM 理论和 Nekhoroshev 理论及其方法获得的轨道稳定性为 KAM 稳定性.

§1.3　广义 Hamilton 系统

在这一节中, 我们将不加证明地介绍本书中所用到的近可积系统的基本概念和基本结论, 详细的论述见 Arnold 的专著[Ar3,AKN1] 或参考 Hairer, Lubich 和 Wanner 的书[HLW1] 以及李继彬、赵晓华和刘正荣的书[LZL1].

Hamilton 系统　考虑由 Hamilton 函数 $H(y, x)$ 生成的系统

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \tag{3.1}$$

其中 $y \in \mathbf{R}^n$ 是作用变量, $x \in T^n$ 是角变量. (3.1) 称为**Hamilton 系统**. 为了方便起见, 从现在开始, 对于两个 n 维向量 y 和 x, 用 yx 或 (y, x) 表示它们的内积.

对于 (3.1) 的每一个轨道 $(y(t), x(t))$, 由于

$$\dot{H}(y(t), x(t)) = \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} = 0, \tag{3.2}$$

因此,

$$H(y(t), x(t)) = \text{常数}.$$

这说明系统的每一个运动轨道位于 H 的某一水平面上. 物理上, H 是能量函数. 数学上, 也称 H 是系统 (3.1) 的一个首次积分.

注意到, 系统 (3.1) 满足

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial H}{\partial x}\right) = 0,$$

从微分方程定性理论可知, 作为映射, 其运动轨道是保体积的.

辛映射 设 $g: U \to \mathbf{R}^{2n}$ 是可微映射, $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ 是一个开集. 记

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 Id 是 n 阶单位矩阵. 当然, 也可以取为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $(y, x) \in U$, 记 $z = (y, x)$.

定义 1.3.1 如果可微映射 g 满足, 对于每个 $z \in U$,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}} J \frac{\partial g}{\partial z} = J,$$

则称 g 是辛的.

对于非线性辛映射, 下面我们给出辛性的几何意义. 考虑 $2n$ 维开集 U 的 2 维子流形 M. 假设 $M = \psi(K)$, $K \subset \mathbf{R}^2$ 是一个紧集, 并且 ψ 是连续可微的一一映射. 记

$$\Omega(M) = \iint_K \left(\frac{\partial \psi}{\partial s}\right)^{\mathrm{T}} (s,t) J \frac{\partial \psi}{\partial t}(s,t) \mathrm{d}s\mathrm{d}t \tag{3.3}$$

表示 M 的有向面积. 根据微分流形的基本知识, 可以证明公式 (3.3) 不依赖于坐标卡的选取. 当 $n = 1$ 时, ψ 可取作恒等映射, 这时 (3.3) 表示通常意义下的面积.

引理 1.3.1 如果映射 $g: U \to \mathbf{R}^{2n}$ 是辛的, 则 g 是保面积的, 即, 对于任意 U 的 2 维子流形,

$$\Omega(g(M)) = \Omega(M).$$

证明 记 $(y, x) = \psi(s, t)$. 流形 $g(M)$ 可以被映射 $g \circ \psi$ 参数化. 由于

$$\frac{\partial (g \circ \psi)}{\partial (s,t)}(s,t) = \frac{\partial g}{\partial (y,x)}(\psi(s,t)) \frac{\partial \psi}{\partial (s,t)}(s,t),$$

并且 g 是辛的, 于是, 我们有

$$\Omega(g(M)) = \iint_K \left(\frac{\partial(g\circ\psi)}{\partial s}\right)^{\mathrm{T}}(s,t)J\frac{\partial(g\circ\psi)}{\partial t}(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \Omega(M).$$

这样, 完成了引理 1.3.1 的证明.

记 Hamilton 系统 (3.1) 的相流 $\phi^t(z_0) = (y(t,z_0), x(t,z_0))$, $z_0 = (y_0, x_0)$, 其中 $y(t,z_0)$, $x(t,z_0)$ 是 (3.1) 带有初值 $y(0) = y_0$, $x(0) = x_0$ 的解.

定理 1.3.1(Poincaré, 1899) 假设 $H(y,x)$ 是 $U \subset \mathbf{R}^{2n}$ 上的二次连续可微的函数, 则对于每个固定的 t, (3.1) 的相流 ϕ^t 在其定义域上是一个辛变换.

证明 从常微分方程定性理论知, $\partial\phi^t/\partial z_0$ 是 (3.1) 的变分方程

$$\dot{\Psi} = J\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(\phi^t(z_0))\Psi \tag{3.4}$$

的解. 根据 $J^{\mathrm{T}} = -J$ 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(\frac{\partial\phi^t}{\partial z_0}\right)^{\mathrm{T}} J\left(\frac{\partial\phi^t}{\partial z_0}\right)\right) &= \left(\frac{\partial\phi^t}{\partial z_0}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(\phi^t(z_0))J^{\mathrm{T}}J\left(\frac{\partial\phi^t}{\partial z_0}\right)\\ &\quad+\left(\frac{\partial\phi^t}{\partial z_0}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}(\phi^t(z_0))\left(\frac{\partial\phi^t}{\partial z_0}\right) = 0.\end{aligned}$$

因此,

$$\left(\frac{\partial\phi^t}{\partial z_0}\right)^{\mathrm{T}} J\left(\frac{\partial\phi^t}{\partial z_0}\right) = \left(\frac{\partial\phi^0}{\partial z_0}\right)^{\mathrm{T}} J\left(\frac{\partial\phi^0}{\partial z_0}\right) = J$$

对所有有定义的 z_0 成立. 这表明 (3.1) 的相流是辛变换.

定理 1.3.2 令 $\psi\colon U \to V$ 是坐标变换, 使得 ψ 和 ψ^{-1} 是连续可微的, 其中 $V \subset \mathbf{R}^{2n}$ 是开子集. 如果 ψ 是辛的, 则在新的变量 $Z = \psi(z)$ 下, Hamilton 系统 (3.1) 变成一个新的 Hamilton 系统

$$\dot{Z} = J\mathrm{grad}\,K(Z), \quad K(Z) = H(z); \tag{3.5}$$

反过来, 如果 ψ 把每一个 Hamilton 系统通过 (3.5) 变成另一个 Hamilton 系统, 那么 ψ 是辛的.

证明 由于

$$\dot{Z} = \frac{\partial\psi}{\partial z}(z)\dot{z}, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}(z)\mathrm{grad}\,K(Z) = \mathrm{grad}\,H(z),$$

系统 (3.1) 变成

$$\dot{Z} = \frac{\partial\psi}{\partial z}(z)J\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}(z)\mathrm{grad}\,K(Z). \tag{3.6}$$

因此, 如果 ψ 是辛的, ψ 将 (3.1) 变成 (3.5); 反过来, 若 ψ 将每一 Hamilton 系统变成一个新的 Hamilton 系统, 那么 ψ 满足

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(z)J\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^{\mathrm{T}}(z)=J,$$

说明 ψ 是辛映射.

广义 Hamilton 系统 为了定义广义 Hamilton 系统, 首先要给出广义 Poisson 括号的概念. 设 $U\subset\mathbf{R}^m$ 是一个开集.

定义 1.3.2 对于任意函数 $F,G\in C^\infty(U)$, 定义一种新的运算, 称之为广义 Poisson 括号运算, 记为 $\{F,G\}$, 表示一个新的光滑函数, 满足下面性质:

(1) 双线性: 任意常数 $k,\mu\in\mathbf{R}$, 和任意 $F,G,H\in C^\infty(U)$, 有

$$\{kF+\mu G,H\}=k\{F,H\}+\mu\{G,H\};$$

(2) 反对称性: $\{F,G\}=-\{G,F\}$;

(3) Leibniz 法则: $\{F\cdot G,H\}=F\cdot\{G,H\}+G\cdot\{F,H\}$;

(4) Jacobi 恒等式:

$$\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}+\{H,\{F,G\}\}=0.$$

对于任意 $z\in U$, 记 $J_{ij}(z)=\{z_i,z_j\}$. 由广义 Poisson 括号的定义, m 阶矩阵 $J(z)=(J_{ij}(z))$ 是一个反对称矩阵, 称为**结构矩阵**. 反过来, 一个反对称矩阵 $J(z)$, 如果满足条件

$$\sum_{l=1}^{m}\left(J_{il}(z)\frac{\partial J_{jk}(z)}{\partial z_l}+J_{jl}(z)\frac{\partial J_{ki}(z)}{\partial z_l}+J_{kl}(z)\frac{\partial J_{ij}(z)}{\partial z_l}\right)=0, \tag{3.7}$$

$i,j,k=1,2,\cdots,m$, 可通过 $\{F,G\}=\mathrm{grad}^{\mathrm{T}}F\,J(z)\mathrm{grad}\,G$ 定义广义 Poisson 括号运算. 对于光滑函数 F, 称 $J(z)\mathrm{grad}\,F$ 为函数 F 的 **Hamilton 向量场**.

具有广义 Poisson 括号结构的流形 U, 称为 Poisson 流形, 记为 $(U,\ \{\cdot,\cdot\})$, 在不引起混淆的情况下, 简记为 U.

下面, 为简洁起见, 我们考虑 $U=G\times T^n$ 的情况, 其中, 设 $\overline{G}\subset\mathbf{R}^l$ 是有界连通域, T^n 是 n 维环面, $m=l+n$. 记 $z=(y,x)\in G\times T^n$. 考虑结构矩阵为 $J(z)$ 的 Poisson 流形 $G\times T^n$.

定义 1.3.3 对于函数 $H\in C^1(G\times T^n)$, 称系统

$$\dot z=J(z)\mathrm{grad}\,H \tag{3.8}$$

为**广义 Hamilton 系统**. H 称为 **Hamilton 函数**.

引理 1.3.2 设 $\varphi: U \to \mathbf{R}^m$ 是一个微分同胚, 则 φ 把结构矩阵变成结构矩阵.

证明 设 $J(z)$ 为 Poisson 流形 U 的结构矩阵, 并且在 φ 下其变为矩阵 $\tilde{J}(\tilde{z})$, $\tilde{z} = \varphi(z)$. 令 $F(z)$, $G(z)$ 是在 z 坐标下任意两个光滑函数, 则其 Poisson 括号

$$H(z) = \{F, G\}(z) = \sum_{i,j=1}^{m} J_{ij}(z) \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_j}, \tag{3.9}$$

在 φ 变换下, $F(z)$, $G(z)$, $H(z)$ 分别记为 $\tilde{F}(\tilde{z})$, $\tilde{G}(\tilde{z})$, $\tilde{H}(\tilde{z})$, 即

$$\tilde{F}(\tilde{z}) = F(z), \quad \tilde{G}(\tilde{z}) = G(z), \quad \tilde{H}(\tilde{z}) = H(z). \tag{3.10}$$

由 Poisson 括号的定义和 (3.10) 得

$$\sum_{i,j=1}^{m} J_{ij}(z) \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_j} = \sum_{l,k=1}^{m} \tilde{J}_{lk}(\tilde{z}) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{z}_l} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{z}_k}. \tag{3.11}$$

另一方面, 也有

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{m} J_{ij}(z) \frac{\partial F}{\partial z_i} \frac{\partial G}{\partial z_j} &= \sum_{i,j=1}^{m} J_{ij}(z) \sum_{l,k=1}^{m} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{z}_l} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{z}_k} \frac{\partial \tilde{z}_l}{\partial z_i} \frac{\partial \tilde{z}_k}{\partial z_j} \\ &= \sum_{l,k=1}^{m} \left(\sum_{i,j=1}^{m} J_{ij}(z) \frac{\partial \tilde{z}_l}{\partial z_i} \frac{\partial \tilde{z}_k}{\partial z_j} \right) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{z}_l} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \tilde{z}_k}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

根据 (3.10) 和 (3.11),

$$\tilde{J}_{l,k}(\tilde{z}) = \sum_{i,j=1}^{m} J_{i,j}(\varphi^{-1}(\tilde{z})) \frac{\partial \tilde{z}_l}{\partial z_i} \frac{\partial \tilde{z}_k}{\partial z_j}, \qquad l, k = 1, 2, \cdots, m. \tag{3.13}$$

根据 (3.13), $\tilde{J}(\tilde{z})$ 是反对称矩阵. 由于 $J(z)$ 满足 (3.7), 从 (3.13) 可以验证 $\tilde{J}(\tilde{z})$ 也满足 (3.7). 因此, $\tilde{J}(\tilde{z})$ 是一个结构矩阵. 引理 1.3.2 证毕.

定义 1.3.4 设 U 是一个辛流形, $J(z)$ 是其结构矩阵. 变换 $\varphi: U \to \mathbf{R}^m$ 称为 Poisson 变换, 如果对于任意 $z \in U$, φ 满足

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^{\mathrm{T}} J(z) \frac{\partial \varphi}{\partial z} = J(z), \qquad \forall z \in U. \tag{3.14}$$

定理 1.3.3 如果 $J(z)$ 是 Poisson 括号的一个结构矩阵, 则 (3.8) 的流 ϕ^t 是一个 Poisson 变换.