高中立体几何

（全一册·必修）

中学数学

重点
难点
基点

3.56

高中一年级

李申榜 主编

中学数学

重点 难点 基点

高中立体几何（全一册·必修）

主　编　李申榜

分册主编　胡自强

编　　者　胡自强

刘习之

傅会理

张碧华

湖南师范大学出版社

【湘】新登字011号

中学数学重点难点基点

高中立体几何

（全一册·必修）

主　　编：李申榜
本册主编：胡自强
编　　者：胡自强　刘习之
　　　　　傅会理　张碧华
责任编辑：木　子

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　湖南省长沙市华中印刷厂印刷
787×1092　32开　6.5印张　151千字
1993年7月第1版　1996年4月第5次印刷
印数：58451—68550
ISBN7—81031—298—7/G·127
定价：5.20元

前　言

本套丛书作为中学生课程辅导读物，旨在配合中学数学教师帮助学生更好地理解、消化教材的内容，起到落实“双基”、培养能力的作用.

我们根据多年从事教学、教研实践所积累的经验，依照教材的章节顺序，从教学重点、自学难点、训练基点三个方面对教材内容进行了深入的挖掘. 教学重点中根据数学教学大纲精神以表格的形式列出了知识点和应达到的认知层次，对本单元的知识结构进行了图解，并对要点进行了简要分析；自学难点中针对学生在学习过程中概念的模糊处、知识的难懂处、应用的易错处进行了深入浅出的讲解；训练基点中对本单元知识的应用进行了归类，例举了题型，并提供了巩固本单元知识的若干训练题和形成性测试题. 每章之后配有一套总结性测试题，用以反馈教与学的信息. 训练题、测试题的答案附在书后.

由于时间仓促，本书难免存在不足之处，诚望广大师生批评指正.

主编者

1993 年 4 月

目　录

第一章　直线和平面

第一节　平面

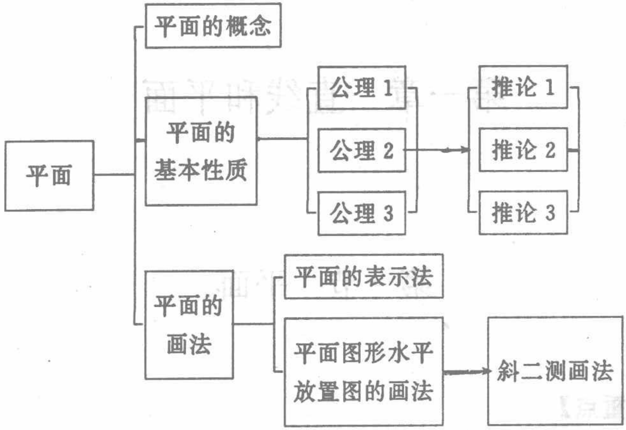
【教学重点】

一、教学目标

节　次	知　识　要　点	认知层次			
		了解	理解	掌握	熟练运用
1.1 平面	平面的概念	✓			
	平面的画法和记法			✓	
1.2 平面的性质	平面的基本性质		✓		
	平面性质的应用			✓	
1.3 平面图形的画法	斜二测画法			✓	

二、内容剖析

(一)知识结构



(二)要点分析

1. 关于平面的概念

(1)平面是现实世界存在着的客观事物形象(如桌面、黑板面、平静的水面等)的数学抽象.它和平面几何中的点与直线一样,是立体几何中最原始的不定义的概念.平面是使认识从“平面内”发展到“平面外”的重要概念,也是把问题从“空间”转化为“平面”的重要概念.并且只有以“平面”这一基本元素为依托,才能构思出各种新的空间形象.

(2)立体几何中所说的“平面”是无限延展着的,是没有边界的,没有厚薄的.如我们画一个平行四边形表示平面时是表示它所在的整个平面,需要时可以把它的边界扩展,正如平面几何中所说的“直线”是可以无限延展的一样.

(3)平面也和直线一样,可以看成是点的集合.从运动的观点看,“点动成线”、“线动成面”,也就是说点的运动的轨迹是线;线运动的轨迹是面,所以平面可以看成是空间点的轨迹或集合.

2. 关于平面的基本性质

平面的基本性质是研究空间图形时进行推理论证的理论基础，是把空间图形问题转化为平面图形问题的重要依据.平面的基本性质是通过三条公理来叙述的：

公理1说明的是直线与平面的位置关系中直线在平面内的情形.它给出了直线在平面内的定义，这是判定直线是否在平面内的依据，也是判定一个点是否在一个平面内的依据；同时，通过直线上两点的任意性，描述了平面的无限延展性，因此它又是鉴别一个面是否是平面的标准.例如木工师傅用曲尺检查物体表面是否是水平的面就是这个道理.

公理2说明的是两个平面的位置关系中平面与平面相交的情形.它不仅揭示了两个相交平面的交线的特征，也揭示了平面与其他曲面相交的区别：只有两个相交面都是平面时它们的交线才一定是直线；在两个相交面中，只要有一个面不是平面，它们的交线就可能不是直线.如平面与圆柱面相交，它们的交线可能是直线，也可能是圆和椭圆.这条公理还从点、线、面的相互联系上描述了平面具有这样一个性质：如果两个平面相交于一点，那么它们就一定交于一条直线，且这条直线必定通过这个交点.因此公理2为相交平面的作图提供了具体方法.

公理3给出了确定平面位置的主要方法.它从点与平面的相互关系上肯定了这样一个性质：经过不在同一直线上的三点的平面不仅是存在的，而且是唯一的.

在提出三个公理之后，以三条公理为基础，通过推理，又给出了三条推论.这三条推论揭示了确定平面的三条途径，从而完整地给出了空间确定平面的依据.

3. 关于水平放置的平面图形的直观图的画法

把空间图形画在一个平面上（纸上或黑板上），使它既富有立体感，又能表达出图形各主要部分的位置关系和度量关系的

图形称为直观图.立体几何中要学习两种直观图的画法,即斜二测法与正等测法.由于第一章不涉及圆的问题,因此首先只学习斜二测法,到第二章画圆柱、圆锥、圆台时再学习正等测法.用斜二测法画直观图的方法,课本也是分两步进行的,这里先介绍水平放置的平面图形的画法,到第二章画棱柱的直观图时,再介绍空间图形的画法.

斜二测法的轴测投影的特点是投影线和投影面斜交,正面反映真实形状.课本第6面的三条规则就是具体的画法.用斜二测法画直观图有三项基本不变:

(1)原图中的共线点,在直观图中仍是共线点;原图中的共点线,在直观图中仍是共点线;

(2)原图中的平行线,在直观图中仍是平行线;

(3)原图中的平行线段(或共线线段)的比,仍等于直观图中对应线段的比.

因此,原图中的全等和相似的关系在直观图中仍然保持不变.直观图立体感比较强,初学时容易接受.

一般地说,正确的图形对理解问题很有帮助,因此画好直观图是学习立体几何必须掌握的基本功,一开始画图就要严格要求,养成良好的习惯.

【自学难点】

一、模糊处

1. 为什么用平行四边形表示的平面是无限延展的?

首先我们要了解,立体几何中表示平面是采用“用有限的图形表示的无限的平面”的方法.如同“直线”可以根据问题的需要画成长或短的线段一样,表示平面的平行四边形的边界也可以根据需要加以扩展或缩小,所以用平行四边形表示的平面是无

限延展的.

事实上,如果一条直线上有两个点在一个用平行四边形表示的平面内,根据公理 1,这条直线上所有的点都会在这个平面内.而直线是无限伸展的,如果这个平面是有限的,那么无限直线上的所有的点,怎么能都在有限平面内呢?所以用平行四边形表示的平面必须是无限延展的.

2. 怎样理解“有且只有一个”?

在公理 2、公理 3 及三个推论中都涉及到“有且只有一个”这一术语,顾名思义,它包括如下两层含义:其一是“有”——说明图形的存在性;其二是“且只有一个”——说明图形的唯一性.简言之,“有且只有一个”——说明图形既存在,且是唯一的.

值得强调的是:数学中的“只有一个”并不促证符合条件的图形一定存在,所以不能用“只有一个”来代替“有且只有一个”.符合某一条件的图形既然存在,而且只能有一个,就说明这个图形完全是确定的,因此“有且只有一个”和“确定”是同义词.例如,我们如果仅说“有一个平面”,只说明存在一个平面,而不能说只有一个平面.如果说“只有一个平面”,那就是说有的话,顶多只有一个,但不保证平面存在.

二、难懂处

1. 怎样证明“三个推论”?

三个推论的结论都是“有且只有一个平面”,即都要证明平面的存在性与唯一性.对于存在性的证明,就是要证明能够作出一个符合要求的平面;对于唯一性的证明,一般采用两种方法:第一种方法证明符合要求的平面有两个是不可能的;第二种方法证明如果符合要求的平面有两个,那么这两个平面一定重合.课本第 3 面对于唯一性的论证,是用两种方法综合起来的说明.现在我们以推论 1 为例给出证明,供读者自学时参考.

已知：直线 a 和直线 a 外一点 A.

求证：过 a 和 A，有且只有一个平面.

证明：①先证明存在性. 如图 1-1-1，在直线 a 上任取两点 B、C.

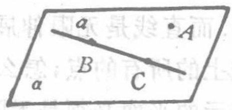


图 1-1-1

∵点 A 在直线 a 外，

∴A、B、C 三点不在同一条直线上.

于是，经过 A、B、C 三点有一个平面 α(公理 3).

又∵点 B、C 都在平面 α 内，

∴直线 a 在平面 α 内(公理 1).

因此平面 α 是过直线 a 与点 A 的平面.

②再证明唯一性. 假设经过直线 a 与点 A 还有另一个平面 β.

∵B、C 两点都在直线 a 上，

∴B、C 两点也在平面 β 内，

即平面 β 经过 A、B、C 三点.

这样，过不在一直线上的三点 A、B、C 除了有一个平面 α 外，还有一个平面 β，这与公理 3 相矛盾. 因此过直线 a 与点 A 不可能另有一个平面 β，即只能有一个平面 α.

由①和②可知：过直线 a 和直线 a 外一点 A，有且只有一个平面.

说明：在存在性的证明中，在直线 a 上任取两点 B、C，"任取"两字是十分重要的；在唯一性的证明中，还可用第二种方法，即证明平面 α 和 β 重合.

2. 关于空间点的共面与空间直线的共面

要证明空间点的共面，主要理论依据是公理 3 及其推论. 我们知道：过空间一点、两点、或者同一直线上的三点都可作无数

个平面，只有不在同一直线上的三点才确定一个平面. 那么过空间四点能确定几个平面呢？这样的问题是比较复杂的，课本里关于点共面的问题最多也只涉及四个点.

对于空间四个点的共面问题，要通过划分来进行比较，并分别讨论：

(1)如果空间四个点 A、B、C、D 正好在一条直线上，显然这四点同在一个平面内. 但是，因为经过一条直线的平面有无数个，所以在同一直线上的四点虽然在同一平面内，但经过这样的四个点却不能确定一个平面.

(2)如果空间四个点中有三点在同一直线上，而第四个点不在这条直线上，那么根据公理 3 的推论 1，经过这样的四个点可以确定一个平面.

(3)如果空间四个点 A、B、C、D 中，没有任何三点在同一直线上，那么根据公理 3，经过其中任意三点都可以确定一个平面. 假设 A、B、C 三点确定一个平面 α，这时又可分为两种情形：①如果点 D 在平面 α 内，那么这样的四点就确定一个平面 α；②如果点 D 不在平面 α 内，那么这四点就不在同一个平面 α 内，即不存在同时经过这样四个点的平面.

关于空间直线的共面问题，课本里一般是涉及三条直线的共面问题（如习题一第 6、7 题），最多只要涉及四条直线共面的讨论（如习题一第 8 题）. 要证明空间四条直线共面，情况也是比较复杂的，必须学会分析与讨论.

例　已知空间四条直线 a、b、c、d 不共点但两两相交，证明这四条直线必在同一个平面内.

分析：根据题设条件，a、b、c、d 不共点，但两两相交，它们的相互位置有两种情形：①无任何三条直线共一点，如图 1-1-2；②有某三条直线共一点，如图 1-1-3.

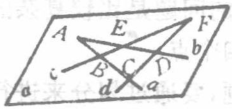


图 1-1-2

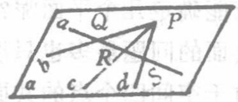


图 1-1-3

证明：对分析的两种情形分别予以证明.

①设 $a\cap b=A$，根据推论 2，由 a、b 可确定平面 α，则

$$\left.\begin{array}{l} a\cap c=B\Rightarrow B\in a\subset\alpha \\ b\cap c=E\Rightarrow E\in b\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow B、E\in\alpha\Rightarrow c\subset\alpha.$$

同理可证 $d\subset\alpha$. 因此 a、b、c、d 在同一个平面 α 内.

②设 $b\cap c\cap d=P$，$a\cap b=Q$，$a\cap c=R$，$a\cap d=S$，根据推论 2，由 a、b 确定平面 α，

则 $$\left.\begin{array}{l} P\in b\subset\alpha \\ R\in a\subset\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow P、R\in\alpha\Rightarrow c\subset\alpha.$$

同理可证 $d\subset\alpha$，因此 a、b、c、d 在同一个平面 α 内.

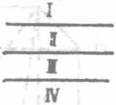
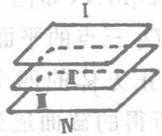
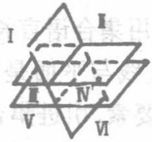
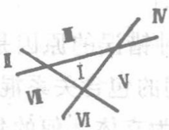
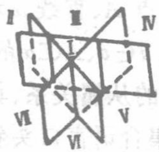
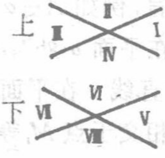
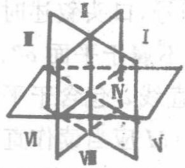
3. 平面划分空间问题

平面划分空间为多少部分的问题，要求我们富于空间想象. 一个平面或者两个平面划分空间为多少部分不难想象出来，如果是三个或三个以上平面划分空间为多少部分就比较困难了.

例 三个平面把空间最多分成几个部分？最少分成几个部分？还可能分成几个部分？

解：解答这种问题的钥匙就是与“在平面内用直线划分平面”的方法相类比. 通过类比可以发现：三个平面把空间最多可以分成 8 个部分，最少分成 4 个部分，还可能分成 6 个或 7 个部分(见三个平面划分空间表).

三个平面划分空间表

<table>
<tr><th>在平面内用直线划分平面</th><th>在空间中用平面划分空间</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

三、易错处

1. 由于对平面的概念理解不深产生的错误

例如，过正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 的三点 M、N、D_1 的截面（M、N 分别是棱 AB、BC 的中点），不少学生都误认为是一个三角形 $\triangle D_1MN$（如图 1-1-4）. 实际上，过 M、N、D_1 三点的平面是无限延展的，因此它与正方体的四个侧面都应当相交，相交所得的截面应当是一个五边形 $MNED_1F$（如图 1-1-5）.

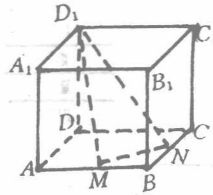


图 1-1-4

2. 使用集合语言符号的错误

点、直线与平面是构成空间图形的三个基本要素. 引进集合概念以后，平面也和直线一样，可以看成是一个点集. 因此课本借用了集合概念的符号语言，这对于空间图形位置关系的论证和叙述更为简便，但也容易出现错误：

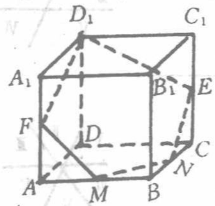


图 1-1-5

(1)集合符号书写的错误. 例如，已知空间有点 A、直线 a 和平面 α，书写时容易出现 $a\in\alpha$、$A\subset\alpha$ 的错误. 产生这种错误的原因是对元素与集合之间的从属关系、集合与集合之间的包含关系混淆不清.

(2)集合语言口头叙述的不当. 因为立体几何的集合符号是借用的符号，口头叙述时应当用几何语言. 例如 $A\notin\alpha$ 不应当读作“点 A 不属于平面 α”，应读作“点 A 在平面 α 外”；$a\subset\beta$ 不应当读作“直线 a 包含于平面 β”，应读作“直线 a 在平面 β 内”. 又如 $a\cap\beta=M$ 应当读作直线 a 与平面 β 相交于点 M 等.

3. 在推理中用特殊代替一般的错误

例 证明与同一直线相交的所有平行线都在同一平面内.

错解：如图 1-1-6，设 $a/\!/b/\!/c$，它们都与 l 相交，交点为 A_1、A_2、A_3. $\because a\cap l=A_1$，$\therefore a$ 与 l 可以确定一个平面 α. 又 $\because A_2\in l$，

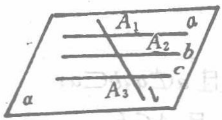


图 1-1-6

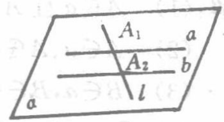


图 1-1-7

$\therefore A_2\in\alpha$. 而 $a /\!/ b$，且 $A_2\in b$，$\therefore b\subset\alpha$（若 $b\not\subset\alpha$，则 a 与 b 异面与 $a /\!/ b$ 矛盾），即 b 在平面 α 内，同理可证 c 也在平面 α 内.

分析：上面是以三条与 l 相交的平行线在同一平面内的证明代替与 l 相交的所有平行线在同一平面内是不全面的. 正确的证法应如图 1-1-7. 设与 l 相交的平行线中的一条为 a，且 $a\cap l=A_1$. 另设其他平行线中的任意一条为 b，且 $b\cap l=A_2$. $\because a$ 与 l 可以确定平面 α，又 $A_2\in l$，$\therefore A_2\in\alpha$，而 $b /\!/ a$，且 $A_2\in b$，$\therefore b\subset\alpha$（若 $b\not\subset\alpha$，则 a、b 异面与已知 $a /\!/ b$ 矛盾），即 b 也在平面 α 内. 由于所取平行线中 b 的任意性，就证明了与 l 相交的所有平行线都在同一平面内.

【训练基点】

一、题型例举

（一）基础练习题

例 1 用集合符号表示语句：

（1）点 A 在平面 α 内，但不在平面 β 内；

（2）直线 a 过不在平面 α 内的点 A，且 a 不在平面 α 内；

（3）直线 a、b 过不在平面 α 内的点 B，且 a 不在平面 α 内，b 在平面 α 内；

（4）直线 a 与平面 α 交于点 A，直线 a 在平面 β 内，平面 α 与 β 交于直线 b，且 b 过点 A.

分析：本题是将立体几何语句改写成集合符号表示的语句，

在改写时要注意想象出几何语句所表示的空间图形.

解:(1) $A\notin\alpha$ 且 $A\notin\beta$;

(2) $A\in a$、$A\notin\alpha$,且 $a\not\subset\alpha$;

(3) $B\in a$,$B\in b$,但 $B\notin\alpha$,且 $a\not\subset\alpha$,$b\subset\alpha$;

(4)$a\cap\alpha=A$,$a\subset\beta$,$\alpha\cap\beta=b$,且 $A\in b$.

例 2 判断题(正确的在括号内画"√",错误的在括号内画"×")

(1)两条直线确定一个平面. ( )

(2)点 A 在平面 α 内,也在直线 a 上,则直线 a 在平面 α 内. ( )

(3)平面 α 和平面 β 相交于不同在一条直线上的三个点 A、B、C. ( )

分析:(1)两条直线能否确定平面,应看这两条直线的位置关系,不给出位置关系要分情况讨论后才得出结论.(2)直线 a 上若有两个点在平面 α 内,则直线 a 就在平面 α 内,而此题只有一点在平面 α 内.(3)两个平面的公共点一定在一条直线上.

解:(1)两条相交直线或平行直线都可确定一个平面,除此之外的任何两条直线不能确定平面,故画"×".(2)画"×".(3)α 和 β 的公共点一定在一条直线上,故 α 和 β 交于不同在一直线上的三点 A、B、C 是错的,画"×".

例 3 选择题 已知空间四边形 $ABCD$(空间四条线段顺次首尾连接),E、F、G、H 分别在 AB、BC、CD、DA 上,且 $EFGH$ 是平面四边形,则如下结论成立的是( ).

(A)EH、FG 必定平行;

(B)EH、FG 必定相交;

(C)EH、FG 如果相交,交点必在直线 BD 上;

(D)EF、HG 必定平行.