普通高等教育“十一五”国家级规划教材

教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材
电子信息学科基础课程系列教材

数字信号处理习题解答

姚天任 编著

清华大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

教育部高等学校电子电气基础课程教学指导分委员会推荐教材

电子信息学科基础课程系列教材

数字信号处理习题解答

姚天任 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是对作者姚天任编著的、清华大学出版社出版的《数字信号处理》一书全部习题的详细解答，也涵盖了《数字信号处理简明版》(姚天任编著，清华大学出版社出版)的习题。

本书可供使用《数字信号处理》(《数字信号处理简明版》)的师生和读者参考，也可供报考电子信息类专业和其他相关专业研究生的考生作为参考。

图书在版编目（CIP）数据

数字信号处理习题解答/姚天任编著.--北京：清华大学出版社，2013
电子信息学科基础课程系列教材
ISBN 978-7-302-31961-0

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①姚…　Ⅲ.①数字信号处理—高等学校—题解　Ⅳ.①TN911.72-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 078071 号

责任编辑：文　怡
封面设计：常雪影
责任校对：白　蕾
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　**印　　张**：13　**字　　数**：317 千字
版　　次：2013 年 5 月第 1 版　**印　　次**：2013 年 5 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：25.00 元

产品编号：052942-01

前言

数字信号处理研究的是，用数字序列或符号序列表示信号，并对这些序列进行数字处理，以削弱信号中不需要的部分，或滤除信号中混入的噪声和干扰，或突出甚至加强信号的特征参数，使信号变换成容易分析、辨识和利用的形式。

几乎所有大学的电子信息类专业都为本科高年级学生和研究生开设了数字信号处理课程。这门课程具有很强的理论性，要求学生牢固掌握数字信号处理学科的基本理论，深入理解构建学科理论体系的核心概念；这门课程也具有很强的实践性，不仅要求学生学会重要的分析方法，而且要求学生熟练掌握重要的设计技能，并在工程实践中灵活地加以运用。为此，在由作者编著的、清华大学出版社出版的《数字信号处理》教材中，选择了一定数量的典型例题，并在每章末尾布置了较多的习题。

本书是对《数字信号处理》教材全部习题的详细解答。为了与教材中的公式编号相区别，本书中的公式按照习题序号分别编号，例如，在习题 2.15 的解答中出现的各个公式，编号分别为(2.15-1)、(2.15-2)等；本书中插图也按照同样的方法进行编号，只是在编号前用英文字母“P”表示习题解答的插图，以与教材中的插图相区别，例如，习题 4.4 的解答中的插图依次编号为 P4.4-1、P4.4-2 等。本书的习题解答涵盖原教材(简明版)的全部习题。

本书可供使用《数字信号处理》(《数字信号处理简明版》)的师生和读者参考，也可供报考电子信息类专业和其他相关专业研究生的考生作为参考。

对于书中的错漏之处，敬请广大读者批评指正。

姚天任

2013 年 2 月

目录

第1章 习题解答

正文第1章无习题。

第2章 习题解答

2.1 设有一个连续时间信号

$$x(t) = 2\cos(1000\pi t + 0.2\pi) + \sin(1500\pi t - 0.3\pi) - 3\cos(2500\pi t + 0.1\pi)$$

以 $f_s=3000\text{Hz}$ 进行取样。求信号中每个频率成分的角频率、频率、周期和数字频率，并注明单位。

解 将信号写成下列形式

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos(2\pi f_1 t + 0.2\pi) + \sin(2\pi f_2 t - 0.3\pi) - 3\cos(2\pi f_3 t + 0.1\pi) \\ &= 2\cos(\Omega_1 t + 0.2\pi) + \sin(\Omega_2 t - 0.3\pi) - 3\cos(\Omega_3 t + 0.1\pi) \end{aligned}$$

可以看出三个频率成分的频率分别为

$$f_1 = 500\text{Hz}, \quad f_2 = 750\text{Hz}, \quad f_3 = 1250\text{Hz}$$

角频率为

$$\Omega_1 = 1000\pi\text{rad/s}, \quad \Omega_2 = 1500\pi\text{rad/s}, \quad \Omega_3 = 2500\pi\text{rad/s}$$

周期为

$$T_1 = 1/f_1 = 0.002\text{s}, \quad T_2 = 1/f_2 = 0.00133\text{s}, \quad T_3 = 1/f_3 = 0.0008\text{s}$$

数字频率为

$$\omega_1 = \frac{\Omega_1}{f_s} = \frac{\pi}{3}\text{rad}, \quad \omega_2 = \frac{\Omega_2}{f_s} = \frac{\pi}{2}\text{rad}, \quad \omega_3 = \frac{\Omega_3}{f_s} = \frac{5\pi}{6}\text{rad}$$

2.2 已知一个序列的前 7 个取样值为：$x(0)=0, x(1)=0.866, x(2)=0.866, x(3)=0, x(4)=-0.866, x(5)=-0.866, x(6)=0$。还知道它们是对一个连续时间正弦信号取样得到的。你能根据这些数据大致画出连续时间正弦信号的波形吗？答案是唯一的吗？为什么？

解 设连续时间正弦信号为 $x(t)=\sin(2\pi f_0 t)$，以频率 f_s 取样得到序列

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n T_s)$$

其中，$T_s=1/f_s$ 是取样时间间隔。正弦信号是以 2π 为周期的周期函数，即

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) = \sin(2\pi f_0 t + 2\pi m), \quad m \text{ 为整数}$$

因此，得到

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n T_s) = \sin(2\pi f_0 n T_s + 2\pi m) = \sin\left[2\pi\left(f_0 + \frac{m}{nT_s}\right)nT_s\right]$$

令 $k=m/n$（有理数），则上式可表示成

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n T_s) = \sin[2\pi(f_0 + kf_s)nT_s]$$

因此，对形如 $x(t)=\sin[2\pi(f_0+kf_s)t]$ 的所有正弦信号取样都得到序列 $x(n)$。

由 $x(1)=\sin(2\pi f_0T_s)=\sin(2\pi f_0/f_s)=0.866$ 求出

$$\frac{f_0}{f_s}=\frac{\arcsin(0.866)}{2\pi}=\frac{1}{6}$$

例如，设 $f_0=1\text{kHz}$，则 $f_s=6\text{kHz}$。因此，由 $x(t)=\sin[2\pi(1000+6000k)t]$ 定义的所有正弦信号以 $f_s=6\text{kHz}$ 取样都能得到本题给出的序列。这说明，本题的答案不是唯一的。图 P2.2 所示的是 $k=0$ 和 $k=1$ 时，两个正弦信号的波形，它们具有相同的取样序列 $x(n)$。

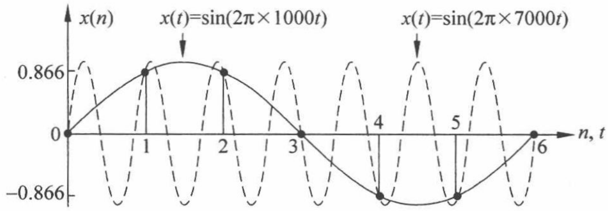

图 P2.2 习题 2.2 的两个正弦信号波形

2.3 画出序列 $x(n)=0.6e^{-0.5n}\cos(n\pi/8)$ 的图形。

解 $x(n)$ 的图形如图 P2.3 所示。

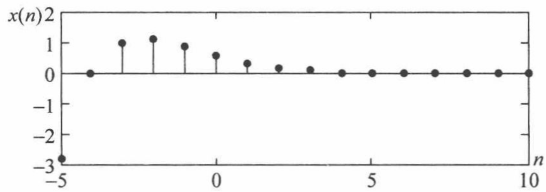

图 P2.3 习题 2.3 的 $x(n)$ 图形

2.4 判断以下两个序列是否为周期序列。如果是，请确定周期的数值。

(1) $x(n)=3\cos\left(\frac{5\pi}{8}n+\frac{\pi}{6}\right)$；(2) $x(n)=2\exp\left(\mathrm{j}\,\frac{1}{8}n+\mathrm{j}\pi\right)$。

解 (1) 对照正弦序列的一般表达式 $x(n)=A\cos(\omega n+\varphi)$ 知道 $\omega=5\pi/8$，因此 $2\pi/\omega=16/5$ 是有理数，所以是周期序列。在 $k=5$ 时，$N=16k/5=16$ 有最小整数值，这就是周期。

(2) 对照复指数序列的一般表达式 $x(n)=\exp[(\sigma+\mathrm{j}\omega)n]$ 知道 $\omega=1/8$，因此 $2\pi/\omega=16\pi$ 是无理数，所以不是周期序列。

2.5 已知两个连续时间正弦信号 $x_1(t)=\sin(2\pi t)$ 和 $x_2(t)=\sin(6\pi t)$，现对它们以 $f_s=8$(次/秒)的速率进行取样，得到正弦序列 $x_1(n)=\sin(\omega_1 n)$ 和 $x_2(n)=\sin(\omega_2 n)$。

(1) 求 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的频率、角频率和周期。

(2) 求 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的数字频率和周期。

(3) 将以下每对信号的周期进行比较：$x_1(t)$ 与 $x_2(t)$，$x_1(n)$ 与 $x_2(n)$，$x_1(t)$ 与 $x_1(n)$，$x_2(t)$ 与 $x_2(n)$。

解 (1) $x_1(t)$ 的频率、角频率和周期：

$$f_1=1\text{Hz},\quad \Omega_1=2\pi\text{rad/s},\quad T_1=1\text{s}。$$

$x_2(t)$ 的频率、角频率和周期：

$$f_2 = 3\text{Hz},\quad \Omega_2 = 6\pi\text{rad/s},\quad T_2 = 1/3\text{s}。$$

(2) $x_1(n)$和$x_2(n)$的数字频率：

$$\omega_1 = \Omega_1/f_s = \pi/4\text{rad},\quad \omega_2 = \Omega_2/f_s = 3\pi/4\text{rad}$$

$x_1(n)$和$x_2(n)$的周期：

$$N_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}k = 8(k=1),\quad N_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}k = \frac{8k}{3} = 8(k=3)$$

(3) 下表列出了要比较的周期。可以看出，正弦信号和对它进行取样得到的序列的周期是两个不同的概念。

$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_1(n)$	$x_2(n)$	$x_1(t)$	$x_1(n)$	$x_2(t)$	$x_2(n)$
1s	1/3s	8	8	1s	8	1/3s	8

2.6 证明线性卷积运算满足交换律、结合律和加法分配律。

证明 (1) 交换律

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k)$$

令 $n-k=t$，得到

$$x(n) * y(n) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x(n-t)y(t) = y(n) * x(n)$$

(2) 结合律

$$\begin{aligned}[x(n) * y(n)] * z(n) &= \sum_{t=-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(t-k)\Big]z(n-t)\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\Big[\sum_{t=-\infty}^{\infty} y(t-k)z(n-t)\Big]\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\Big[\sum_{t'=-\infty}^{\infty} y(t')z(n-k-t')\Big]\end{aligned}$$

令 $w(n) = \sum_{t'=-\infty}^{\infty} y(t')z(n-t') = y(n) * z(n)$，则上式化为

$$[x(n) * y(n)] * z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)w(n-k) = x(n) * w(n) = x(n) * [y(n) * z(n)]$$

(3) 加法分配律

$$\begin{aligned}x(n) * [y(n) * z(n)] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)[y(n-k) + z(n-k)]\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)y(n-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z(n-k)\\ &= x(n) * y(n) + x(n) * z(n)\end{aligned}$$

2.7 已知两个序列 $x(n)=u(n)$和 $y(n)=0.8^n u(n)$：

(1) 根据线性卷积的定义计算它们的线性卷积。

(2) 用列表法计算它们的线性卷积的前 5 个数值。

解 (1) 根据线性卷积定义的计算过程如图 P2.7 所示。

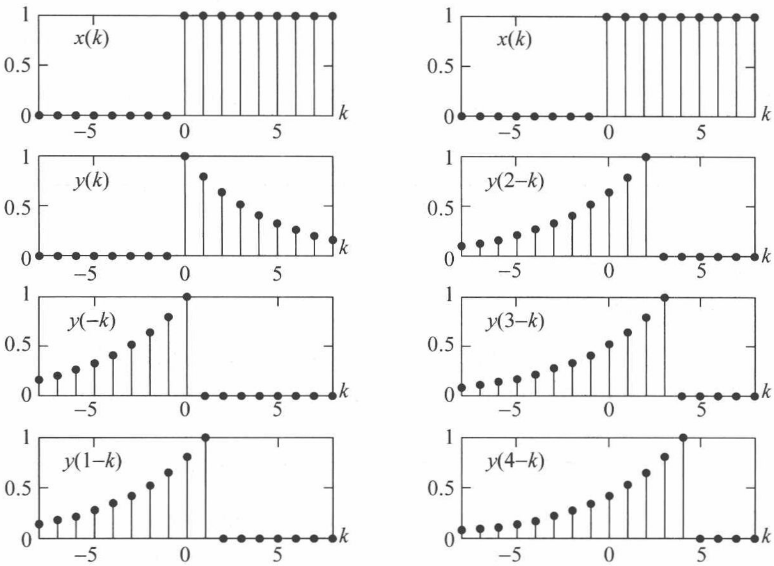

图 P2.7　习题 2.7 中线性卷积定义的计算过程

根据图 P2.7 得出线性卷积的前 5 个数值为

$$\begin{aligned} z(n) &= x(n) * y(n) = [z(0) \quad z(1) \quad z(2) \quad z(3) \quad z(4)] \\ &= [1 \quad 1.8 \quad 2.44 \quad 2.952 \quad 3.3616] \end{aligned}$$

(2) 列表法计算

k	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
$x(k)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$y(-k)$	0.4096	0.512	0.64	0.8	1				
$y(1-k)$		0.4096	0.512	0.64	0.8	1			
$y(2-k)$			0.4096	0.512	0.64	0.8	1		
$y(3-k)$				0.4096	0.512	0.64	0.8	1	
$y(4-k)$					0.4096	0.512	0.64	0.8	1
$z(n)$					1	1.8	2.44	2.952	3.3616

2.8　已知序列 $x(n)=0.5^nR_3(n)$ 和 $y(n)=\cos(0.3n)R_6(n)$，式中 $R_N(n)$ 是宽为 N 的矩形序列。求 $x(n)$ 的自相关序列，$x(n)$ 与 $y(n)$ 的互相关序列。

解　$x(n)$ 的自相关序列：

n	0	1	2	3	4	$R_{xx}(m)$
$x(n)$	1.00	0.50	0.25			1.3125
$x(n-1)$		1.00	0.50	0.25		0.625
$x(n-2)$			1.00	0.50	0.25	0.25

$x(n)$ 与 $y(n)$ 的互相关序列：

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$R_{xy}(m)$
$x(n)$	1.000	0.5	0.25						
$y(n)$	1.000	0.955	0.825	0.622	0.362	0.070			1.684
$y(n-1)$		1.000	0.955	0.825	0.622	0.362	0.070		0.739
$y(n-2)$			1.000	0.955	0.825	0.622	0.362	0.070	0.250

2.9 已知一个序列

$$x(n)=0.2n[u(n)-u(n-8)]+0.6^{n-8}[u(n-8)-u(n-15)]$$

先将它进行 2∶1 抽取得到 $x_d(n)$，然后又对 $x_d(n)$进行 1∶2 填零得到 $x_{int}^0(n)$，最后用内插滤波器 $h(n)$对 $x_{int}^0(n)$进行滤波得到输出序列 $y(n)$，这一过程如图 P2.9-1 所示。设$h(n)=0.5\delta(n)+\delta(n-1)+0.5\delta(n-2)$，试画出 $x(n)$、$x_d(n)$、$x_{int}^0(n)$和 $y(n)$的图形。

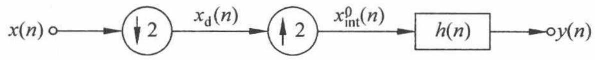

图 P2.9-1 习题 2.9 的抽取-内插滤波系统

解 $x(n)$的前 15 个取样值如下(序号为 $0\leqslant n\leqslant 14$)

$x(n)=[0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1.2,1.4,1,0.6,0.36,0.216,0.1296,0.0778,0.0467]$

$x_d(n)=[0,0.4,0.8,1.2,1,0.36,0.1296,0.0467]$

$x_{int}^0(n)=[0,0,0.4,0,0.8,0,1.2,0,1,0,0.36,0,0.1296,0,0.0467]$

$h(n)=[0.5,1,0.5]$

$x_{int}^0(n)$的相继 3 个取样值用 $h(n)$加权并求和，得到 $x_{int}^0(n)$与 $h(n)$的线性卷积：

$y(n)=[0,0,0.2,0.4,0.6,0.8,1,1.2,1.1,1,0.68,0.36,0.2448,0.1296,0.0881,0.0467]$

$x(n)$、$x_d(n)$、$x_{int}^0(n)$和 $y(n)$的图形如图 P2.9-2 所示。

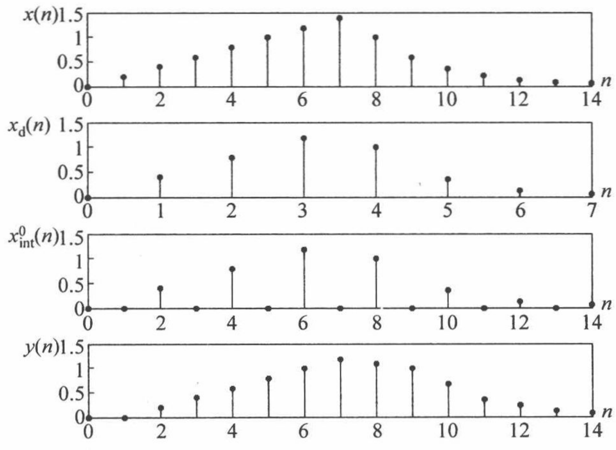

图 P2.9-2 习题 2.9 中 $x(n)$、$x_d(n)$、$x_{int}^0(n)$和 $y(n)$的图形

2.10 求复指数序列 $x(n)=e^{j\omega n}$ 的共轭对称部分和共轭反对称部分。

解 $x_{cs}(n)=\dfrac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]=\dfrac{1}{2}[e^{j\omega n}+e^{j\omega n}]=e^{j\omega n}$

$$x_{ca}(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]=\frac{1}{2}[e^{j\omega n}-e^{j\omega n}]=0$$

2.11 求以下有限长序列的共轭对称部分和共轭反对称部分。

$$x(n)=\{2,2-j,1+3j,4-5j,3+2j,7-3j,6\}$$

序列取样值的下标对应为 $n=-3,-2,-1,0,1,2,3$。

解 $x^*(-n)=\{6,7-3j,3+2j,4-5j,1+3j,2-j,2\}$

$$x_{cs}(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x^*(-n)]=\{4,4.5-2j,2+2.5j,4-5j,2+2.5j,4.5-2j,4\}$$

$$x_{ca}(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x^*(-n)]=\{-2,-2.5+j,-1+0.5j,0,1-0.5j,2.5-j,2\}$$

2.12 将定义在区间 $0\leqslant n\leqslant 6$ 上的以下有限长实序列分解成一个奇对称序列和一个偶对称序列之和。

$$x(n)=0.5^n,\quad 0\leqslant n\leqslant 6$$

解 $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$

其中

$$\begin{aligned}x_e(n)&=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)]=\frac{1}{2}[0.5^n+0.5^{-n}]\\&=[1.0000,1.2500,2.1250,4.0625,8.0313,16.0156,32.0078]\\x_o(n)&=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)]=\frac{1}{2}[0.5^n-0.5^{-n}]\\&=[0,-0.7500,-1.8750,-3.9375,-7.9688,-15.9844,-31.9922]\end{aligned}$$

2.13 判断以下序列是功率信号还是能量信号。

(1) $x_1(n)=\frac{1}{\sqrt{n}}u(n-1)$；(2) $x_2(n)=\frac{1}{n}u(n-1)$

解 (1) $\varepsilon_1=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|x_1(n)|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\to\infty$

$$\begin{aligned}P_1&=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}|x_1(n)|^2=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n}\\&=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{K}\right)\\&=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{(2K+1)K}=0\end{aligned}$$

故 $x_1(n)$是功率信号。

(2) $\varepsilon_2=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|x_2(n)|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

$$P_2=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}|x_2(n)|^2=\lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=1}^{K}\frac{1}{n^2}=0$$

故 $x_2(n)$是能量信号。

2.14 判断系统 $y(n)=x(n)\sin(0.7\pi n+0.2\pi)$是否为线性系统、时不变系统、稳定系统、因果系统。

解 设 $y_1(n)=x_1(n)\sin(0.7\pi n+0.2\pi)$，$y_2(n)=x_2(n)\sin(0.7\pi n+0.2\pi)$

由于 $y(n)=[ax_1(n)+bx_2(n)]\sin(0.7\pi n+0.2\pi)$

$$=ax_1(n)\sin(0.7\pi n+0.2\pi)+bx_2(n)\sin(0.7\pi n+0.2\pi)$$

$$=ay_1(n)+by_2(n)$$

故该系统是线性系统。

由于 $y(n-k)=x(n-k)\sin[0.7\pi(n-k)+0.2\pi]$，而

$$T[x(n-k)]=x(n-k)\sin(0.7\pi n+0.2\pi)\neq y(n-k)$$

所以该系统不是时不变系统。

设 $|x(n)|\leqslant M$，由于

$$|y(n)|=|x(n)|\sin(0.7\pi n+0.2\pi)\leqslant M|\sin(0.7\pi n+0.2\pi)|\leqslant M$$

所以该系统是稳定系统。

因为 $y(n)$ 只取决于现在和过去的输入，所以该系统是因果系统。

2.15 利用 DTFT 的定义逐一证明表 2.1① 所列的 DTFT 的所有性质(例 2-24 已经证明了性质 6)。

证明 (1) 周期性

$$X(e^{j(\omega\pm2\pi k)})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega\pm2\pi k)n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=X(e^{j\omega})$$

(2) 线性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[ax_1(n)+bx_2(n)]e^{j\omega}=a\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)(n)e^{j\omega}+b\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)e^{j\omega}$$

$$=aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

(3) 移位

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-n_0)e^{-j\omega n}=\sum_{n'=-\infty}^{\infty}x(n')e^{-j\omega(n'+n_0)}=e^{-j\omega n_0}X(e^{j\omega})$$

(4) 调制

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[e^{j\omega_0 n}x(n)]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n}=X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

(5) 折叠

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n')e^{-j(-\omega)n'}=X(e^{-j\omega})$$

(6) 乘以 n

例 2-24 已经证。

(7) 复共轭

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)e^{-j\omega n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j(-\omega)n}\right]^*=X^*(e^{-j\omega})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(-n)e^{-j\omega n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n')e^{-j\omega n'}\right]^*=X^*(e^{j\omega})$$

(8) 卷积

① 注：本书中有编号的表均引自主教材中。

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)\right]e^{-j\omega n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n-k)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n-k)e^{-j\omega(n-k)}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)e^{-j\omega k}\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(l)e^{-j\omega l}$$

$$=X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$$

（9）相乘

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)y(n)]e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})e^{-j\theta n}d\theta\right]y(n)e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})d\theta\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)e^{-j(\omega-\theta)n}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

（10）对称性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\,[x(n)]e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)+x^{*}(n)]e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{*}(n)e^{-j\omega n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^{*}(e^{-j\omega})] \tag{2.15-1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\,[x(n)]e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)-x^{*}(n)]e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{*}(n)e^{-j\omega n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^{*}(e^{-j\omega})] \tag{2.15-2}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{cs}(n)e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)+x^{*}(-n)]e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{*}(n')e^{j\omega n'}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})+X^{*}(e^{j\omega})]$$

$$=\mathrm{Re}\,[X(e^{j\omega})] \tag{2.15-3}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_{ca}(n)e^{-j\omega n}=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)-x^{*}(-n)]e^{-j\omega n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^{*}(n')e^{j\omega n'}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[X(e^{j\omega})-X^{*}(e^{j\omega})]$$

$$= \mathrm{jIm}[X(e^{j\omega})] \tag{2.15-4}$$

对于实序列 $x(n)$，有

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(-\omega)n}\right]^* = X^*(e^{-j\omega})$$

由上式得到

$$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]$$
$$\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] = -\mathrm{Im}[X(e^{-j\omega})]$$
$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$
$$\arg[X(e^{j\omega})] = \arg[X(e^{-j\omega})]$$

实序列的共轭对称序列 $x_{cs}(n)$ 即偶序列 $x_e(n)$，共轭反对称序列 $x_{ca}(n)$ 即奇序列 $x_o(n)$，因此，由式(2.15-3)和式(2.15-4)分别得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)e^{-j\omega n} = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] \tag{2.15-5}$$

和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o(n)e^{-j\omega n} = \mathrm{jIm}[X(e^{j\omega})] \tag{2.15-6}$$

2.16 利用 z 变换的定义逐一证明表 2-2 所列的 z 变换的所有性质。

证明 (1) 线性

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[ax_1(n)+bx_2(n)]z^{-n} = a\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1(n)z^{-n} + b\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2(n)z^{-n}$$
$$= aX_1(z) + bX_2(z)$$

(2) 序列移位

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-n_0)z^{-n} = \sum_{n'=-\infty}^{\infty}x(n')z^{-(n'+n_0)} = z^{-n_0}\sum_{n'=-\infty}^{\infty}x(n')z^{-n'} = z^{-n_0}X(z)$$

(3) 乘以指数序列

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[a^n x(n)]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(a^{-1}z)^{-n} = X(a^{-1}z)$$

(4) 序列折叠

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(-n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n')(z^{-1})^{-n'} = X(z^{-1})$$

(5) 复共轭序列

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^*(n)z^{-n} = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(z^*)^{-n}\right]^* = X^*(z^*)$$

(6) 与 n 相乘

$$\frac{d}{dz}X(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\frac{d}{dz}z^{-n}$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)(-nz^{-n-1}) = -z^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx(n)z^{-n}$$

由此得到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)z^{-n} = -z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}X(z)$$

(7) 初值定理

对于因果序列：$x(n)=0, n<0$

$$\lim_{z\to\infty}X(z) = \lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} = \lim_{z\to\infty}\Big[x(0) + \sum_{n=1}^{\infty}x(n)z^{-n}\Big] = x(0)$$

对于逆因果序列：$x(n)=0, n>0$

$$\lim_{z\to 0}X(z) = \lim_{z\to 0}\sum_{n=-\infty}^{0}x(n)z^{-n} = \lim_{z\to 0}\Big[x(0) + \sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}\Big] = x(0)$$

(8) 终值定理

$$(z-1)X(z) = zX(z) - X(z) \tag{2.16-1}$$

根据序列移位性质，$zX(z)$是 $x(n+1)$的 z 变换，所以由式(2.16-1)得到

$$(z-1)X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n+1)-x(n)]z^{-n} \tag{2.16-2}$$

对于因果序列，式(2.16-2)可改写为

$$(z-1)X(z) = \lim_{n\to\infty}\sum_{n=-1}^{n}[x(n+1)-x(n)]z^{-n} \tag{2.16-3}$$

$X(z)$在单位圆上只有在 $z=1$ 处可能有一阶极点，函数$(z-1)X(z)$能够抵消这个可能的极点，因此，$(z-1)X(z)$的收敛域包括单位圆，即在$|z|\geqslant 1$ 范围内式(2.16-3)都成立，所以，允许对等式两端取极限 $z\to 1$，即

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 1}(z-1)X(z) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{n=-1}^{n}[x(n+1)-x(n)]\\ &= \lim_{n\to\infty}\{[x(0)-0]+[x(1)-x(0)]+\cdots+[x(n+1)-x(n)]\}\\ &= \lim_{n\to\infty}x(n+1) = \lim_{n\to\infty}x(n)\end{aligned} \tag{2.16-4}$$

由于 $X(z)$在 $z=1$ 上的留数为

$$\mathrm{Res}[X(z),1] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(x) \tag{2.16-5}$$

所以式(2.16-4)表示的终值定理也可以表示为

$$\lim_{n\to\infty}x(n) = \mathrm{Res}[X(z),1] \tag{2.16-6}$$

(9) 序列卷积

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)*y(n)]z^{-n} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k)\Big]z^{-n}\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}y(n-k)z^{-n}\Big]\\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)z^{-k}Y(z), R_{y-}<|z|<R_{y+}\\ &= X(z)Y(z),\quad \max[R_{x-},R_{y-}]<|z|<\min[R_{x+},R_{y+}]\end{aligned}$$

(10) 复卷积定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)y(n)]z^{-n} = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C[X(v)v^{n-1}\mathrm{d}v]y(n)z^{-n}$$

$$=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(v)v^{-1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}\mathrm{d}v \tag{2.16-7}$$

在收敛域 $R_{y-}<|z/v|<R_{y+}$ 内，上式中的和式为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}y(n)\left(\frac{z}{v}\right)^{-n}=Y\left(\frac{z}{v}\right)$$

故式(2.16-7)可表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)y(n)]z^{-n}=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(v)v^{-1}Y\left(\frac{z}{v}\right)\mathrm{d}v$$

(11) 复序列的实部

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Re}\,[x(n)]z^{-n}&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)+x^*(n)]z^{-n}\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}+\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{n}\right)^*\right]\\&=\frac{1}{2}[X(z)+X^*(z^*)]\end{aligned}$$

(12) 复序列的虚部

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Im}\,[x(n)]z^{-n}&=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)-x^*(n)]z^{-n}\\&=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}-\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{n}\right)^*\right]\\&=\frac{1}{2}[X(z)-X^*(z^*)]\end{aligned}$$

(13) Parseval 定理

利用前面已经证明过的性质(10)复卷积定理和性质(5)复共轭序列，得到

$$W(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[x(n)y^*(n)]z^{-n}=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(v)v^{-1}Y^*\left(\frac{z^*}{v^*}\right)\mathrm{d}v \tag{2.16-8}$$

由于收敛域为 $R_{x-}R_{y-}<|z|<R_{x+}R_{y+}$，且收敛域应包含单位圆，即应当满足关系 $R_{x-}R_{y-}<1<R_{x+}R_{y+}$，这说明 $|z|=1$ 在收敛域内，即 $W(z)$ 在单位圆上收敛，因此 $W(z)|_{z=1}$ 存在，由式(2.16-8)得到

$$W(1)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)y^*(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C X(v)v^{-1}Y^*\left(\frac{1}{v^*}\right)\mathrm{d}v$$

2.17 逐一推导表 2-3 所列的所有简单 z 变换公式。

解 (1) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n)z^{-n}=\delta(0)=1$，没有极点，所以收敛域是整个复平面。

(2) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=\frac{1}{1-z^{-1}}$，$|z^{-1}|<1$ 或 $|z|>1$

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{a^n[u(n)-u(n-N)]\}z^{-n}&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n)(az^{-1})^n-\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n-N)(az^{-1})^n\\&=\frac{1}{1-az^{-1}}-(az^{-1})^N\sum_{n=-\infty}^{\infty}u(n')(az^{-1})^{n'}\end{aligned}$$