教育部立项建设的高等学校特色专业西北师范大学数学与应用数学专业建设经费资助
国家自然科学基金资助
甘肃省数学与应用数学专业代数课程教学团队建设经费资助
西北师范大学数学与应用数学专业代数课程教学团队建设经费资助

高等代数专题选讲

GAODENG DAISHU
ZHUANTI XUANJIANG

陈祥恩　程　辉　乔虎生　刘仲奎　编著

中国科学技术出版社
CHINA SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

教育部立项建设的高等学校特色专业西北师范大学数学与应用数学专业建设经费资助
国家自然科学基金资助
甘肃省数学与应用数学专业代数课程教学团队建设经费资助
西北师范大学数学与应用数学专业代数课程教学团队建设经费资助

高等代数专题选讲

GAODENG DAISHU ZHUANTI XUANJIANG

陈祥恩　程　辉　乔虎生　刘仲奎　编著

中国科学技术出版社

·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

高等代数专题选讲 / 陈祥恩等编著. —北京：中国科学技术出版社，2013. 5

ISBN 978-7-5046-6336-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第081732号

责任编辑 王晓义
责任校对 赵丽英
责任印制 王 沛

出　　版 中国科学技术出版社
发　　行 科学普及出版社发行部
地　　址 北京市海淀区中关村南大街16号
邮　　编 100081
发行电话 010-62173865
传　　真 010-62179148
投稿电话 010-62103347
网　　址 http://www.cspbooks.com.cn

开　　本 787mm×1092mm　1/16
字　　数 270千字
印　　张 15
版　　次 2013年5月第1版
印　　次 2013年5月第1次印刷
印　　刷 北京京华虎彩印刷有限公司

书　　号 ISBN 978-7-110-6336-8/O・165
定　　价 30.00元

前　言

自 1992 年始，每个秋季学期, 我们都要给西北师范大学数学与应用数学专业及信息与计算科学专业的四年级本科生开设《高等代数专题选讲》课程。其目的是为了巩固和加深学生在《高等代数》课程里所学的知识，同时也为报考研究生的同学提供更多的学习内容和复习材料。本教材是在历年来所用讲义的基础上整理而成的。1998 年，我们承担了教育部面向 21 世纪教改工程项目“西北地区民族高师数学教育面向 21 世纪主干课程代数的教学内容与方法改革研究”，编写本教材也是这一项目的继续和深入。

本教材具有如下特征:

1. 本书的内容由专题组成，每一讲授专题都包含基础理论、典型例题、训练提高三部分。

2. 每一专题的基础理论部分要么是对某个知识点的归纳总结，要么是对某些难点内容深入地讲解。

3. 本书中有一定难度的典型例题，既是相关专业学生学习《高等代数》的参考资料，也是《高等代数》习题课的素材。其典型例题和训练，旨在让学生深入理解内容。

非常感谢西北师范大学数学与统计学院、西北师范大学教务处对本书编写工作的鼓励与支持；本书的编写与出版得到了教育部立项建设的高等学校特色专业西北师范大学数学与应用数学专业建设经费，甘肃省数学与应用数学专业代数课程教学团队建设经费，西北师范大学数学与应用数学专业代数课程教学团队建设经费以及国家自然科学基金(批准号：11261050 和 61163037)的资助，在此一并表示感谢!

由于水平有限，书中定有许多不足之处，敬请读者批评指正，以便再版时对该书做进一步的完善。

作　者

2012 年 11 月于西北师范大学

符 号 表

符 号	意 义
$\mathbf{F}$	任意一个数域
$\mathbf{Z}$	全体整数构成的集合
$\mathbf{Q}$	全体有理数构成的集合
$\mathbf{R}$	全体实数构成的集合
$\mathbf{C}$	全体复数构成的集合
$\deg f(x)$	非零多项式 $f(x)$ 的次数
$\mathbf{F}[x]$	数域 $\mathbf{F}$ 上的关于文字 x 的全体一元多项式的集合
$\mathbf{F}_n[x]$	数域 $\mathbf{F}$ 上的次数不超过 n 的多项式连同零多项式构成的集合
$\mathbf{F}^{m\times n}$ 或 $M_{m\times n}(\mathbf{F})$	元素在数域 $\mathbf{F}$ 中的全体 $m\times n$ 矩阵的集合
$\mathbf{F}^n$ 或 $\mathbf{F}^{n\times 1}$	元素在数域 $\mathbf{F}$ 中的全体 $n\times 1$ 矩阵的集合
I_n	n 阶单位矩阵
$\det A$	方阵 A 的行列式
$(a_{ij})_{m\times n}$	第 i 行第 j 列相交处元素为 a_{ij} 的 $m\times n$ 矩阵
$\mathrm{Tr}\,(A)$	方阵 A 的迹
秩A	矩阵 A 的秩
$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{pmatrix}$	取自矩阵 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_s$ 行及第 $j_1, j_2, \cdots, j_s$ 列相交处的元素按原来的相对位置所构成的 A的子矩阵
A^{T} 或 A'	矩阵 A 的转置
$\dim_{\mathbf{F}} V$ 或 $\dim V$	(数域 $\mathbf{F}$ 上) 向量空间 V 的维数
$f_A(x)$	方阵 A 的特征多项式
$\mathscr{L}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$	由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 所生成的子空间
$W_1 \oplus W_2$	子空间 W_1 与 W_2 的直和
$\mathrm{Ker}\,\sigma$	线性变换 σ 的核
$\mathrm{Im}\,\sigma$	线性变换 σ 的象
$L(V)$	向量空间 V 的全体线性变换构成的集合
ι	恒等变换
$G(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$	欧氏空间中向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 的 Gram 矩阵
$\langle \alpha, \beta \rangle$	欧氏空间中两向量 α 与 β 的内积
$\|\xi\|$	欧氏空间中向量 ξ 的长度
$W^{\perp}$	欧氏空间 (或酉空间) 的子空间 W 的正交补

目　录

第1讲　带余除法与最大公因式

带余除法定理是多项式理论的基础定理之一，它反映了数域 $\mathbf{F}$ 上的一个非零多项式去除 $\mathbf{F}$ 上的另一多项式的方法；由此可以很方便地讨论多项式的整除性及多项式的最大公因式.

1　基础理论

定理 1.1　(带余除法定理) 设 $\mathbf{F}$ 表示任意一个数域，$f(x)$, $g(x)$ 是 $\mathbf{F}[x]$ 中的多项式，且 $g(x) \neq 0$，则存在 $\mathbf{F}[x]$ 中唯一确定的两个多项式 $q(x)$ 和 $r(x)$，使得

$$f(x) = g(x)\, q(x) + r(x).$$

这里 $r(x) = 0$ 或者 $\deg r(x) < \deg g(x)$.

推论 1.2　设 $f(x)$, $g(x)$ 是 $\mathbf{F}[x]$ 中多项式，且 $g(x) \neq 0$，则 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除当且仅当 $g(x)$ 去除 $f(x)$ 所得的余式 $r(x)$ 为零.

用记号 $g(x) \mid f(x)$ 表示多项式 $g(x)$ 能够整除多项式 $f(x)$，记号 $g(x) \nmid f(x)$ 表示多项式 $g(x)$ 不能整除多项式 $f(x)$.

定理 1.3　设 $f(x)$, $g(x) \in \mathbf{F}[x]$. 那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式总是存在的，且若 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，则存在 $\mathbf{F}[x]$ 中的多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$，使得

$$u(x)\, f(x) + v(x)\, g(x) = d(x).$$

一般来说，两个不全为零的多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式有无穷多个，通常我们用 $(f(x),\ g(x))$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高次项系数为 1 的那个最大公因式.

若多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式是 $\mathbf{F}$ 中非零常数 c，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

定理 1.4　设 $f(x), g(x) \in \mathbf{F}[x]$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充要条件是存在 $u(x)$, $v(x) \in \mathbf{F}[x]$，使

$$u(x)\, f(x) + v(x)\, g(x) = 1.$$

定理 1.3 与定理 1.4 都可以推广到多个多项式上去.

定理 1.5　设 $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in \mathbf{F}[x]$，有下列结论成立：

(i) 若 $(f(x),\ g(x)) = 1$, $(h(x),\ g(x)) = 1$，则 $(f(x)\, h(x),\ g(x)) = 1$；

(ii) 若 $h(x) \mid f(x)\, g(x)$, $(f(x),\ h(x)) = 1$，则 $h(x) \mid g(x)$；

(iii) 若 $g(x) \mid f(x)$, $h(x) \mid f(x)$, $(g(x),\ h(x)) = 1$，则 $g(x)\, h(x) \mid f(x)$.

2 典型例题

例 1.1 x^2+kx+1 整除 x^4+lx^2+m 的充要条件是什么?

解: 用带余除法, 可得

$$x^4+lx^2+m=(x^2+kx+1)[x^2-kx+(k^2+l-1)]+k(2-l-k^2)x+(m+1-l-k^2).$$

因此, 当且仅当

$$\begin{cases} k(2-l-k^2)=0, \\ m+1-l-k^2=0. \end{cases}$$

时 $x^2+kx+1 \mid x^4+lx^2+m$. 即当且仅当

$$\begin{cases} k=0, \\ l=m+1 \end{cases} \quad \text{或} \begin{cases} m=1, \\ l=2-k^2 \end{cases}$$

时, $x^2+kx+1 \mid x^4+lx^2+m$.

例 1.2 设 d 与 n 均为正整数, 则 x^d-1 整除 x^n-1 的充要条件是 $d \mid n$.

证明: $(\Longleftarrow)$ 若 $d \mid n$, 令 $n=kd$. 因为

$$x^n-1=(x^d)^k-1=(x^d-1)[(x^d-1)^{k-1}+(x^d-1)^{k-2}+\cdots+x^d+1],$$

所以 $x^d-1 \mid x^n-1$.

$(\Longrightarrow)$ 设 $n=dq+r$, 这里 $0 \leqslant r<d$. 假设 $r \neq 0$.

显然有 $x^n-1=x^{dq+r}-1=x^{dq}x^r-x^r+x^r-1=x^r(x^{dq}-1)+x^r-1$.

因为 $x^d-1 \mid x^n-1$ 且 $x^d-1 \mid x^{dq}-1$ (由充分性), 因此 $x^d-1 \mid x^r-1$, 矛盾. 所以 $r=0$, $d \mid n$.

例 1.3 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为次数至少是 1 的 $\mathbf{F}$ 上多项式. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素, 则存在 $\mathbf{F}[x]$ 中唯一的多项式 $u(x)$ 与 $v(x)$, 使得

$$u(x)\,f(x)+v(x)\,g(x)=1,$$

其中 $\deg u(x)<\deg g(x)$, $\deg v(x)<\deg f(x)$.

证明: 因为 $(f(x),\ g(x))=1$, 由定理 1.4, 存在 $\mathbf{F}[x]$ 中多项式 $s(x)$, $t(x)$, 使得

$$s(x)\,f(x)+t(x)\,g(x)=1.$$

由于 $\deg f(x) \geqslant 1$, $\deg g(x) \geqslant 1$, 故 $g(x)$ 不整除 $s(x)$, $f(x)$ 不整除 $t(x)$. 利用带余除法定理, 可设

$$s(x)=g(x)\,q_1(x)+u(x),\ t(x)=f(x)\,q_2(x)+v(x),$$

其中 $0 \leqslant \deg u(x)<\deg g(x)$, $0 \leqslant \deg v(x)<\deg f(x)$. 所以

$$u(x)\,f(x)+v(x)\,g(x)+[q_1(x)+q_2(x)]\,f(x)\,g(x)=1.$$

若上式成立, 则必有 $q_1(x)+q_2(x)=0$, 否则就有

$$\deg[(q_1(x)+q_2(x))\,f(x)\,g(x)]>\max\{\deg(u(x)\,f(x)),\ \deg(v(x)\,g(x))\},$$

而导致矛盾. 因此有

$$u(x)\,f(x)+v(x)\,g(x)=1.$$

设还有 $u_1(x)$, $v_1(x) \in \mathbf{F}[x]$，使

$$u_1(x)\, f(x) + v_1(x)\, g(x) = 1,$$

且 $\deg u_1(x) < \deg g(x)$, $\deg v_1(x) < \deg f(x)$. 上两式相减得

$$[u(x) - u_1(x)]\, f(x) + [v(x) - v_1(x)]\, g(x) = 0.$$

于是 $g(x) \mid [u(x)-u_1(x)]\, f(x)$，但是 $(f(x),\ g(x)) = 1$. 故 $g(x) \mid [u(x)-u_1(x)]$. 而当 $u(x)-u_1(x) \neq 0$ 时，$\deg[u(x)-u_1(x)] < \deg g(x)$，导致矛盾. 因而只有 $u(x)-u_1(x) = 0$，即 $u(x) = u_1(x)$. 进一步可得 $v(x) = v_1(x)$.

例 1.4　设 $f(x), g(x)$ 是 $\mathbf{F}[x]$ 的多项式，且 $a, b, c, d \in \mathbf{F}$. 若 $ad - bc \neq 0$，则 $(af(x) + bg(x), cf(x) + dg(x)) = 1$ 的充要条件是 $(f(x), g(x)) = 1$.

证明：($\Longrightarrow$) 由已知，存在 $u(x), v(x) \in \mathbf{F}[x]$，使

$$u(x)\,[af(x) + bg(x)] + v(x)\,[cf(x) + dg(x)] = 1,$$

即 $[au(x) + cv(x)]\, f(x) + [bu(x) + dv(x)]\, g(x) = 1$，因此 $(f(x),\ g(x)) = 1$.

($\Longleftarrow$) 反设 $(af(x) + bg(x),\ cf(x) + dg(x)) = d(x) \neq 1$，则有 $d(x) \mid [af(x) + bg(x)]$，$d(x) \mid [cf(x) + dg(x)]$. 利用整除的性质有

$$d(x) \mid [adf(x) + bdg(x) - bcf(x) - bdg(x)] = (ad - bc)\, f(x),$$

$$d(x) \mid [acf(x) + bcg(x) - acf(x) - adg(x)] = (bc - ad) g(x),$$

从而有 $d(x) \mid f(x)$, $d(x) \mid g(x)$，这与 $(f(x),\ g(x)) = 1$ 矛盾. 说明反设错误.

例 1.5　设 m 是整数，$f(x), g(x)$ 是 $\mathbf{F}[x]$ 中非零多项式. 证明 $g^m(x) \mid f^m(x)$ 当且仅当 $g(x) \mid f(x)$.

证明：($\Longleftarrow$) 显然.

($\Longrightarrow$) 设存在 $h(x) \in \mathbf{F}[x]$，使 $f^m(x) = h(x)\, g^m(x)$. 设 $d(x) = (f(x),\ g(x))$，且 $f(x) = f_1(x)\, d(x)$, $g(x) = g_1(x)\, d(x)$，则 $(f_1(x),\ g_1(x)) = 1$. 由互素的性质可得

$$(f_1^m(x),\ g_1^m(x)) = 1.$$

另一方面，

$$f_1^m(x) d^m(x) = f^m(x) = h(x) g_1^m(x) d^m(x).$$

由于 $f(x)$, $g(x)$ 均是非零多项式，因此 $d(x) \neq 0$. 从而有 $f_1^m(x) = h(x)\, g_1^m(x)$，故 $g_1^m(x) \mid f_1^m(x)$. 因此，$g_1(x) = c \neq 0$, $c \in \mathbf{F}$. 于是 $g(x) = cd(x)$, $g(x) \mid f(x)$.

3　训练提高

1.1　设 $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 1, g(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. 求多项式 $u(x), v(x)$，使得 $u(x)\, f(x) + v(x)\, g(x) = (f(x),\ g(x))$.

1.2　假设 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为次数不超过 3 的最高次项系数为 1 的互异多项式，x^4+x^2+1 整除 $f_1(x^3) + x^4 f_2(x^3)$. 试求 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的最大公因式.

1.3　设 $f(x), g(x)$ 为数域 $\mathbf{F}$ 上的多项式. 证明：$(f(x),\ g(x)) = 1$ 当且仅当$(f(x)g(x),\ f(x) + g(x)) = 1$.

1.4 设 $f(x)$, $f_1(x)$, $g(x)$, $g_1(x)$, $d(x) \in \mathbf{F}[x]$, $d(x) = (f(x), g(x))$, 且 $f_1(x)\, d(x) = f(x)$, $g_1(x)\, d(x) = g(x)$. 若 $f_1(x)$, $g_1(x)$ 的次数都大于零，则存在 $\mathbf{F}[x]$ 中多项式 $u(x)$, $v(x)$, 使 $u(x)\, f(x) + v(x)\, g(x) = d(x)$, 这里 $\deg u(x) < \deg f_1(x)$, $\deg v(x) < \deg g_1(x)$.

1.5 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $\mathbf{F}[x]$ 中两个非零多项式. 证明：

(i) 若对 $\mathbf{F}[x]$ 中任意多项式 $h(x)$, 由 $f(x) \mid g(x)\, h(x)$ 都可得到 $f(x) \mid h(x)$, 则

$$(f(x),\ g(x)) = 1;$$

(ii) 若对 $\mathbf{F}[x]$ 中任意多项式 $h(x)$, 由 $f(x) \mid h(x)$, $g(x) \mid h(x)$ 都可得到 $f(x)\, g(x) \mid h(x)$, 则

$$(f(x),\ g(x)) = 1.$$

1.6 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为 $\mathbf{F}[x]$ 中最高次项系数为 1 的多项式，则

$$[f(x),\ g(x)]\,(f(x),\ g(x)) = f(x)\, g(x),$$

其中 $[f(x), g(x)]$ 表示 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最高次项系数是 1 的最小公倍式.

1.7 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是 $\mathbf{F}[x]$ 中非零多项式. 证明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不互素的充要条件是存在 $\mathbf{F}[x]$ 中多项式 $u(x)$, $v(x)$, 满足

$$f(x)\, u(x) + g(x)\, v(x) = 0,$$

这里 $0 \leqslant \deg u(x) < \deg g(x)$, $0 \leqslant \deg v(x) < \deg f(x)$.

1.8 设 $f_0(x)$, $f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x) \in \mathbf{C}[x]$. 若 $(x^n - a) \mid \sum\limits_{i=o}^{n-1} f_i(x^n)x^i$, 则 $(x - a) \mid f_i(x)$.

1.9 设 n, k 为正整数. 若 $(x - a)^k \mid f(x^n)$, $a \neq 0$, 则 $(x^n - a^n)^k \mid f(x^n)$. 当 $a = 0$ 时，此命题还成立吗？为什么？

1.10 设 $g_1(x)$, $g_2(x)$ 是 $\mathbf{F}$ 上的多项式，a, b, c, d 是 $\mathbf{F}$ 中的数，且 $ad - bc \neq 0$, 证明 $(ag_1(x) + bg_2(x),\ cg_1(x) + dg_2(x)) = (g_1(x),\ g_2(x))$. 如何推广？

1.11 设 m, $n \in \mathbf{N}^*$, 试证 $(x^m - 1,\ x^n - 1) = x^d - 1$, 这里 $d = (m, n)$.

1.12 设 $k \leqslant n - 1$. 试证 $(x - 1)^{k+1} \mid a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ 当且仅当

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0, \\ a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n = 0, \\ a_1 + 2^2a_2 + \cdots + n^2a_n = 0, \\ \qquad \cdots\cdots\cdots \\ a_1 + 2^ka_2 + \cdots + n^ka_n = 0. \end{cases}$$

1.13 设 m, n 是正整数，则 $1 + x + x^2 + \cdots + x^m \mid 1 + x^n + x^{2n} + \cdots + x^{mn}$ 当且仅当 $(n,\ m + 1) = 1$.

第2讲 因式分解与多项式的根

在许多应用问题中往往需要讨论多项式的根，而多项式的根与多项式的因式分解又是紧密联系的.

1 基础理论

定义 1 设 $p(x)$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上的非零多项式. 如果 $p(x)$ 不能表示成 $\mathbf{F}$ 上的两个次数都大于零的多项式的乘积，那么 $p(x)$ 是 $\mathbf{F}$ 上的不可约多项式.

定理 2.1 数域 $\mathbf{F}$ 上的每个次数大于零的非零多项式 $f(x)$ 必可分解为若干个 $\mathbf{F}$ 上的不可约多项式的乘积，并且，若

$$f(x) = p_1(x)\,p_2(x)\cdots p_r(x),$$

且

$$f(x) = q_1(x)\,q_2(x)\cdots q_s(x),$$

这里 $p_i(x)$ 和 $q_j(x)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 都是 $\mathbf{F}$ 上的不可约多项式. 那么 $r=s$，且适当地给 $q_1(x),\ q_2(x),\ \cdots,\ q_r(x)$ 重新编号后，可使

$$p_i(x) = c_i\,q_i(x),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r,$$

其中 c_i 都是 $\mathbf{F}$ 中的非零常数.

定理 2.2 数域 $\mathbf{F}$ 上的 $n(\geqslant 0)$ 次多项式在 $\mathbf{F}$ 中最多有 n 个根 (重根按重数计算).

推论 2.3 数域 $\mathbf{F}$ 上的具有无穷多个根的多项式只能是零多项式.

定理 2.4 (代数基本定理) 每个 $n\ (n\geqslant 1)$ 次复系数多项式在复数域内至少有一个根.

推论 2.5 (i) 每个 $n\ (n\geqslant 1)$ 次复系数多项式在复数域内有 n 个根(重根按重数计算).

(ii) 复系数多项式 $p(x)$ 在复数域上不可约当且仅当 $p(x)$ 是一次多项式.

定理 2.6 设 n 次复系数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

的 n 个复根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = -(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n),$$

$$\frac{a_{n-2}}{a_n} = \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n,$$

$$\frac{a_{n-3}}{a_n} = -(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{a_0}{a_n} = (-1)^n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.$$

定理 2.7 设 $f(x)$ 是实系数多项式，α 是一个非实的复数，k 是一个正整数. 则 α 是 $f(x)$ 的 k 重根当且仅当 $\overline{\alpha}$ 是 $f(x)$ 的 k 重根.

推论 2.8 实系数多项式 $p(x)$ 在实数域上不可约当且仅当 $p(x)$ 是一次多项式或 $p(x)$ 为没有实数根的二次多项式.

定理 2.9 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

是一个整系数多项式，$a_n \neq 0$. 如果有理数 $\dfrac{u}{v}$ 是 $f(x)$ 的一个根，这里 u 与 v 都是整数，且 u 与 v 互素，那么

(i) $v \mid a_n, u \mid a_0$;

(ii) 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中，用 $(x - \dfrac{u}{v})$ 去除 $f(x)$ 所得的商是整系数多项式.

定理 2.10 (Eisenstein 判别法) 设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

是一个整系数多项式. 如果存在素数 p 同时满足以下条件：

(i) $p \nmid a_n$;

(ii) $p \mid a_i, 0 \leqslant i \leqslant n-1$;

(iii) $p^2 \nmid a_0$,

那么 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

设 $f(x)$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上的 $n\ (n>0)$ 次多项式. 利用定理 2.1，$f(x)$ 在 $\mathbf{F}$ 上的典型分解式可表示为：

$$f(x) = a p_1^{k_1}(x)\, p_2^{k_2}(x)\ \cdots\ p_r^{k_r}(x),$$

这里 a 是 $f(x)$ 的 n 次项系数，$p_1(x)$, $p_2(x)$, $\cdots$, $p_r(x)$ 是 $\mathbf{F}$ 上的最高次项系数为 1 的两两不同的不可约多项式，k_1, k_2, $\cdots$, k_r 均是正整数.

如果 $f(x)$ 是复系数 $n\ (n>0)$ 次多项式，利用推论 2.5，$f(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 上的典型分解式可表示为：

$$f(x) = a\,(x-\alpha_1)^{k_1}\,(x-\alpha_2)^{k_2}\ \cdots\ (x-\alpha_r)^{k_r},$$

这里 a 是 $f(x)$ 的 n 次项系数；α_1, α_2, $\cdots$, α_r 是 $f(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 中的互不相同的根；k_1, k_2, $\cdots$, k_r 是正整数且 $k_1+k_2+\cdots+k_r = n$.

如果 $f(x)$ 是实系数 $n\ (n>0)$ 次多项式，利用定理 2.7，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的典型分解式可表示为

$$f(x) = a\,(x-\alpha_1)^{k_1}\ \cdots(x-\alpha_s)^{k_s}\,(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\ \cdots\ (x^2+p_tx+q_t)^{l_t}.$$

这里 a 是 $f(x)$ 的 n 次项系数. α_1, $\cdots$, α_s 是 $f(x)$ 的互不相同的实根，$x^2+p_1x+q_1$, $x^2+p_2x+q_2$, $\cdots$, $x^2+p_tx+q_t$ 是互不相同的二次实多项式，且 $p_i^2-4q_i<0\ (i=1, \cdots, t)$;

$k_1, \cdots, k_s, l_1, \cdots, l_t$, 是正整数且 $k_1 + \cdots + k_s + 2(l_1 + \cdots + l_t) = n$.

利用 $f(x)$ 的典型分解式可以解决一些多项式的根的问题.

定理 2.11　设 $p(x)$ 是 $\mathbf{F}$ 上的不可约多项式. 若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，$k \geqslant 1$，则 $p(x)$ 是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式.

定理 2.12　一个次数大于 0 的有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域上可约当且仅当 $f(x)$ 能分解为两个次数均大于 0 的整系数多项式的乘积.

2　典型例题

例 2.1　设 $f(x)$ 为数域 $\mathbf{F}$ 上的最高次项系数是 1 且次数至少是 1 的多项式. 则以下两条彼此等价:

(i) $f(x)$ 是某个不可约多项式的方幂;

(ii) 对 $\mathbf{F}$ 上的任意多项式 $g(x)$，必有 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素或者存在某个正整数 m，使得 $f(x)$ 整除 $g^m(x)$.

证明：(i) $\Longrightarrow$ (ii)：设 $f(x) = p^m(x)$，其中 $p(x)$ 是 $\mathbf{F}$ 上的一个不可约多项式，m 为正整数. 则对任一多项式 $g(x)$，要么 $p(x) \mid g(x)$，要么 $(p(x), g(x)) = 1$. 因而有

$$p^m(x) \mid g^m(x), \text{ 或 } (p^m(x), g(x)) = 1.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i)：反设 $f(x)$ 不是某个不可约多项式的方幂. 设 $f(x)$ 的典型分解式为

$$f(x) = p_1^{k_1}(x)\, p_2^{k_2}(x) \,\cdots\, p_t^{k_t}(x),$$

其中 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_t(x)$ 是 $\mathbf{F}$ 上的最高次项系数为 1 的两两不同的不可约多项式，$k_1, k_2, \cdots, k_t$ 均为正整数. 当 (i) 不成立时，$t \geqslant 2$，这时 $f(x)$ 不与 $p_1(x)$ 互素 (因为二者的最大公因式为 $p_1(x)$，不是非零常数). 且对任意正整数 m，都有 $f^m(x) \nmid p_1^m(x)$ (因为 $f^m(x)$ 总有因式 $p_2(x)$，而 $p_1^m(x)$ 没有因式 $p_2(x)$)，与 (ii) 矛盾.

例 2.2　设 $f(x)$ 是数域 $\mathbf{F}$ 上的次数为 $n(\geqslant 1)$ 的多项式. 如果 $f'(x)$ 整除 $f(x)$，那么 $f(x)$ 有 n 重根.

证明：设 $f(x)$ 的典型分解式为

$$f(x) = a\, p_1^{k_1}(x)\, p_2^{k_2}(x) \cdots p_t^{k_t}(x),$$

其中 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_t(x)$ 是 $\mathbf{F}$ 上的最高次项系数为 1 的两两不同的不可约多项式，$a(\neq 0)$ 是 $f(x)$ 的最高次项系数，$k_1, k_2, \cdots, k_t$ 均为正整数.

由于 $p_j(x)$ 是 $f(x)$ 的 k_j 重因式，因而 $p_j(x)$ 是 $f'(x)$ 的 k_j-1 重因式，$j = 1, 2, \cdots, t$. 又 $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_t(x)$ 两两互素，因此存在 $\mathbf{F}$ 上的多项式 $g(x)$，使

$$f'(x) = p_1^{k_1-1}(x)\, p_2^{k_2-1}(x) \cdots p_t^{k_t-1}(x)\, g(x).$$

假如 $g(x)$ 为次数至少为 1 的多项式，则 $g(x)$ 有不可约因式，设 $q(x)$ 为 $g(x)$ 的最高次项系数为 1 的不可约因式. $q(x) \mid g(x)$, $g(x) \mid f'(x)$, $f'(x) \mid f(x)$，由整除关系的传递性知 $q(x) \mid f(x)$. 因而存在 $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$，使 $q(x) \mid p_i(x)$，故 $q(x) = p_i(x)$，这说明 $p_i(x)$ 为 $f'(x)$ 的至少 k_i 重因式，矛盾. 因此 $g(x)$ 的次数等于 0. 设 $g(x) = c \in \mathbf{F}$, $c \neq 0$，即有

$$f'(x) = c\, p_1^{k_1-1}(x)\, p_2^{k_2-1}(x) \cdots p_t^{k_t-1}(x).$$

由于 $\deg f(x) = \deg f'(x) + 1$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{t} k_i \deg p_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{t}(k_i - 1) \deg p_i(x) + 1$，因而 $\sum\limits_{i=1}^{t} \deg p_i(x) = 1$. 由此可以推出 $t = 1$，且 $\deg p_1(x) = 1$, $k_1 = n$. 令 $p_1(x) = x - b$，则有 $f(x) = a\,(x - b)^n$.

例 2.3 设 $f(x)$ 是实系数多项式，且 $\deg f(x) > 0$. 若对任意实数 c，有 $f(c) > 0$，则存在实系数多项式 $g(x)$, $h(x)$, 使 $f(x) = g^2(x) + h^2(x)$.

证明：由已知，$f(x)$ 无实根，再由定理 2.7 知，$\deg f(x)$ 是偶数，$f(x)$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 中的根共轭成对出现. 不妨设 $f(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 中的全体根为 α_1, $\overline{\alpha_1}$, α_2, $\overline{\alpha_2}$, $\cdots$, α_m, $\overline{\alpha_m}$，则在 $\mathbf{C}$ 上，

$$f(x) = a\,(x - \alpha_1)\,(x - \overline{\alpha_1})\,(x - \alpha_2)\,(x - \overline{\alpha_2}) \cdots (x - \alpha_m)\,(x - \overline{\alpha_m}),$$

其中 a 为 $f(x)$ 的最高次项系数.

由 $f(0) > 0$ 知，$a\alpha_1\overline{\alpha_1}\alpha_2\overline{\alpha_2}\cdots\alpha_m\overline{\alpha_m} > 0$, 即 $a|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2\cdots|\alpha_m|^2 > 0$，所以 $a > 0$. 令 $(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_m) = f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x)$, 这里 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 是实系数多项式. 则 $(x - \overline{\alpha_1})\,(x - \overline{\alpha_2}) \cdots (x - \overline{\alpha_m}) = f_1(x) - \mathrm{i} f_2(x)$. 因此只要令 $g(x) = \sqrt{a}\, f_1(x)$, $h(x) = \sqrt{a}\, f_2(x)$, 即可证得结论成立.

注 2.4 设 α_1, α_2, $\cdots$, α_m 为非零复数，$f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 均为实系数多项式，且 $f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x) = (x-\alpha_1)\,(x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_m)$, 则有 $f_1(x) - \mathrm{i} f_2(x) = (x-\overline{\alpha_1})\,(x-\overline{\alpha_2}) \cdots (x-\overline{\alpha_m})$.

证明：对任意一个实数 a，有 $f_1(a) + \mathrm{i} f_2(a) = (a - \alpha_1)\,(a - \alpha_2) \cdots (a - \alpha_m)$, 对上式左右两端取共轭，并注意到几个复数和的共轭等于这几个复数共轭的和，几个复数积的共轭等于这几个复数共轭的积，可得 $f_1(a) - \mathrm{i} f_2(a) = (a - \overline{\alpha_1})\,(a - \overline{\alpha_2}) \cdots (a - \overline{\alpha_m})$. 这说明多项式 $f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x) - (x - \overline{\alpha_1})\,(x - \overline{\alpha_2}) \cdots (x - \overline{\alpha_m})$ 有无穷多个根，进而它必须是零多项式，因而结论成立.

例 2.5 分别在复数域 $\mathbf{C}$ 和实数域 $\mathbf{R}$ 上将 $x^n - 1$ 分解成不可约因式的乘积.

证明：设 $\alpha = a + b\mathrm{i}$ 是 $x^n - 1$ 在 $\mathbf{C}$ 中的根. 在复平面上 α 可写成三角形式 $\alpha = r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, 其中 r 是非负实数，$0 \leqslant \theta < 2\pi$. 因此

$$\alpha^n = r^n\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = r^n\,(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta) = 1.$$

即

$$\begin{cases} r^n = 1, \\ n\theta = 2k\pi, \quad k \text{ 是整数}. \end{cases}$$

亦即

$$\begin{cases} r=1, \\ \theta=\dfrac{2k\pi}{n}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1. \end{cases}$$

多项式 x^n-1 在复数域 $\mathbf{C}$ 中的 n 个不同的根为:

$$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n},\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

它们称为 n 次单位根. 所以, x^n-1 在 $\mathbf{C}$ 上的典型分解式为

$$\begin{aligned} x^n-1 &= (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\cdots(x-\varepsilon_{n-1}) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1}[x-(\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n})]. \end{aligned}$$

注意到 ε_k 的共轭复数

$$\overline{\varepsilon_k}=\cos\frac{2k\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}=\varepsilon_{n-k},$$

而

$$(x-\varepsilon_k)\,(x-\overline{\varepsilon_k})=(x-\varepsilon_k)\,(x-\varepsilon_{n-k})=x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1$$

是实系数不可约多项式. 所以, x^n-1 在 $\mathbf{R}$ 上的典型分解式为

$$x^n-1=\begin{cases} (x-1)\displaystyle\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1), & \text{当 } n \text{ 为奇数;} \\ (x-1)(x+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{\frac{n-2}{2}}(x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1), & \text{当 } n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

注 2.6　例 2.5 的解答过程中出现的 n 次单位根 ε_k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 具有性质 (令 $\varepsilon=\varepsilon_1$):

(i) $\varepsilon_k^n=1$;　(ii) $\varepsilon_k=\varepsilon_1^k$;　(iii) $\varepsilon_1^l=1 \Longleftrightarrow n\mid l$;

(iv) $(\varepsilon^k)^0$, ε^k, $(\varepsilon^k)^2$, $\cdots$, $(\varepsilon^k)^{n-1}$ 构成 x^n-1 的全体根 $\Longleftrightarrow (k,n)=1$.

例 2.7　分别写出 $f(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1$ 在复数域 $\mathbf{C}$ 和实数域 $\mathbf{R}$ 上的典型分解式.

解: 令 $g(x)=(x-1)\,f(x)=x^{n+1}-1$. 由例 2.5,

$$g(x)=(x-1)\,(x-\varepsilon_1)\,(x-\varepsilon_1^2)\ \cdots\ (x-\varepsilon_1^n),$$

其中 $\varepsilon_1=\cos\dfrac{2\pi}{n+1}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n+1}$. 所以, $f(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 上的典型分解式为:

$$f(x)=(x-\varepsilon_1)\,(x-\varepsilon_1^2)\ \cdots\ (x-\varepsilon_1^n).$$

$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的典型分解式为:

当 n 为偶数时, $f(x)=(x^2-2x\cos\dfrac{2\pi}{n+1}+1)\cdots(x^2-2x\cos\dfrac{n\pi}{n+1}+1)$;

当 n 为奇数时, $f(x)=(x+1)\,(x^2-2x\cos\dfrac{2\pi}{n+1}+1)\cdots(x^2-2x\cos\dfrac{(n-1)\pi}{n+1}+1)$.

例 2.8　设 m, n 是正整数. 证明, 多项式 $f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1$ 与 $g(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$ 互素的充要条件是 m 与 n 互素.

证明: $(\Longrightarrow)$ 证法一: 反设 m,n 不互素, 设 $(m,\ n)=d>1$, 且 $m=m_1d$, $n=n_1d$, 其

中 $1 \leqslant m_1 < m$. 令 $w \neq 1$ 是一个 m 次单位根，则 $w^m = 1$. 从而

$$(w^{m_1})^n = w^{m_1 n_1 d} = (w^m)^{n_1} = 1.$$

即 w^{m_1} 是一个 n 次单位根，且由例 2.5 知，由于 $1 \leqslant m_1 < m$，因此 $w^{m_1} \neq 1$. 所以 w^{m_1} 是 $f(x)$ 的根，同时 w^{m_1} 也是 $g(x)$ 的根，这与 $f(x)$, $g(x)$ 互素矛盾. 所以 m 与 n 互素.

证法二：假如 m 与 n 不互素，令 $(m, n) = d > 1$, 且 $m = m_1 d$, $n = n_1 d$. 设 $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{d} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{d}$，则 $\varepsilon \neq 1$. 由 $\varepsilon = \cos\dfrac{2m_1\pi}{m} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2m_1\pi}{m}$ 知，ε 为 m 次单位根，进而是 $f(x)$ 的根；又由 $\varepsilon = \cos\dfrac{2n_1\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2n_1\pi}{n}$ 知，ε 为 n 次单位根，是 $g(x)$ 的根. 这说明 $f(x)$ 与 $g(x)$ 有公因式 $x - \varepsilon$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathbf{C}$ 上不互素. 进而在任何数域上 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不互素，矛盾.

($\Longleftarrow$) 只需证 $g(x)$ 的任意一个根都不是 $f(x)$ 的根即可. 令 $w = \cos\dfrac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$. 设 w^k $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 是 $g(x)$ 的任意一个单位根. 若有 $f(w^k) = 0$, 则由

$$x^m - 1 = (x-1)\,f(x)$$

知，w^k 也是 m 次单位根，即 $(w^k)^m = 1$. 因此 $n \mid km$, 但 $(n, m) = 1$, 因此 $n \mid k$, 这与 $1 \leqslant k \leqslant n-1$ 矛盾. 这就是说，$g(x)$ 的根不能是 $f(x)$ 的根. 故 $(f(x), g(x)) = 1$.

注 2.9 对数域 $\mathbf{F}$ 上的两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 来说，如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在复数域内没有公共根，那么 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在复数域上是互素的，进而在数域 $\mathbf{F}$ 上也是互素的，因为两个多项式是否互素的性质不随着数域的扩大而改变，只要这两个多项式是较小数域上的多项式就行.

例 2.10 设 $f(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2 + 1$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是互异的整数. 证明，$f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明：用反证法. 假如 $f(x)$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上可约，则存在两个整系数多项式 $g(x)$, $h(x)$，使 $f(x) = g(x)\,h(x)$，其中 $\deg g(x) \geqslant 1$, $\deg h(x) \geqslant 1$. 由

$$(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2 + 1 = g(x)\,h(x) \tag{1}$$

知，$g(a_i)\,h(a_i) = 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 而 $g(a_i)$ 与 $h(a_i)$ 均为整数，因此 $g(a_i) = h(a_i) = 1$ 或 -1, $i = 1, 2, \cdots, n$.

由 (1) 式知，$g(x)$ 与 $h(x)$ 均无实根. 因此由根的存在性定理可知，$g(a_1) = g(a_2) = \cdots = g(a_n)$ 且 $h(a_1) = h(a_2) = \cdots = h(a_n)$. 设 $g(a_i) = h(a_i) = 1$, $i = 1, 2, \cdots, n$. 这说明 $g(x)-1$ 与 $h(x)-1$ 都至少有 n 个根 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 但由 (1) 知，$\deg g(x) + \deg h(x) = 2n$. 因此 $g(x)-1$ 与 $h(x)-1$ 都是 n 次多项式. 令

$$g(x) - 1 = b\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,\cdots\,(x-a_n),$$
$$h(x) - 1 = c\,(x-a_1)\,(x-a_2)\,\cdots\,(x-a_n),$$

其中 b 与 c 均为正整数. 代入 (1)，得

$$
\begin{aligned}
&(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1\\
=&[b(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1][c(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1]\\
=&bc(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+(b+c)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)+1.
\end{aligned}
$$

比较上式两端最高次项系数，得 $bc=1$，进而可推出 $b+c=0$，这是一个矛盾.

若 $g(a_i)=h(a_i)=-1$，$i=1,2,\cdots,n$，类似可得出矛盾.

例 2.11　设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\in\mathbf{F}[x], a_0\neq 0$. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 $f(x)$ 的全部 n 个根 (重根按重数计算).

(i) 求以 $c\alpha_1, c\alpha_2, \cdots, c\alpha_n$ 为全体根的 n 次多项式.

(ii) 当 $a_n\neq 0$ 时，求以 $\dfrac{1}{\alpha_1}, \dfrac{1}{\alpha_2}, \cdots, \dfrac{1}{\alpha_n}$ 为全体根的 n 次多项式.

证明： $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$.

(i) 当 $c=0$ 时，x^n 即为所求的多项式.

当 $c\neq 0$ 时，对任意的 $d\in\mathbf{F}$，有

$$a_0(\frac{d}{c})^n+a_1(\frac{d}{c})^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(\frac{d}{c})+a_n=a_0(\frac{d}{c}-\alpha_1)(\frac{d}{c}-\alpha_2)\cdots(\frac{d}{c}-\alpha_n).$$

即

$$a_0d^n+a_1cd^{n-1}+\cdots+a_{n-1}c^{n-1}d+a_nc^n=a_0(d-c\alpha_1)(d-c\alpha_2)\cdots(d-c\alpha_n).$$

因此多项式

$$a_0x^n+a_1cx^{n-1}+\cdots+a_{n-1}c^{n-1}x+a_nc^n-a_0(x-c\alpha_1)(x-c\alpha_2)\cdots(x-c\alpha_n)$$

有无穷多个根. 因为只有零多项式才有无穷多个根，所以

$$a_0x^n+a_1cx^{n-1}+\cdots+a_{n-1}c^{n-1}x+a_nc^n=a_0(x-c\alpha_1)(x-c\alpha_2)\cdots(x-c\alpha_n).$$

因此，所求的多项式即为 $a_0x^n+a_1cx^{n-1}+\cdots+a_{n-1}c^{n-1}x+a_nc^n$.

(ii) 对任意的 $d\in\mathbf{F}\setminus\{0\}$，有

$$a_0\frac{1}{d^n}+a_1\frac{1}{d^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{1}{d}+a_n=a_0(\frac{1}{d}-\alpha_1)(\frac{1}{d}-\alpha_2)\cdots(\frac{1}{d}-\alpha_n).$$

因此

$$
\begin{aligned}
&a_0+a_1d+\cdots+a_{n-1}d^{n-1}+a_nd^n\\
&=a_0(1-d\alpha_1)(1-d\alpha_2)\cdots(1-d\alpha_n)\\
&=a_0(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n(d-\frac{1}{\alpha_1})(d-\frac{1}{\alpha_2})\cdots(d-\frac{1}{\alpha_n})\\
&=a_n(d-\frac{1}{\alpha_1})(d-\frac{1}{\alpha_2})\cdots(d-\frac{1}{\alpha_n}).
\end{aligned}
$$

这说明多项式

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n-a_n(x-\frac{1}{\alpha_1})(x-\frac{1}{\alpha_2})\cdots(x-\frac{1}{\alpha_n})$$

有无穷多个根. 因为只有零多项式才有无穷多个根，所以

$$a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=a_n(x-\frac{1}{\alpha_1})(x-\frac{1}{\alpha_2})\cdots(x-\frac{1}{\alpha_n}).$$