



高等学校电子与电气工程及其自动化专业
“十二五”规划教材

现代控制理论基础

(第二版)

舒欣梅 龙 驹 宋潇潇 编著

E. & E. E. & E.



西安电子科技大学出版社
<http://www.xduph.com>

高等学校电子与电气工程及其自动化专业“十二五”规划教材

现代控制理论基础

(第二版)

舒欣梅 龙 驹 宋潇潇 编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是针对理工科电气类专业高年级本科生编写的控制领域基础理论教材。全书共分7章。第0章为绪论。第1章介绍了现代控制理论的基础——状态空间描述。第2~4章着重于控制系统分析,介绍了在已知数学模型的情况下,系统的运动规律和能控性、能观性、稳定性等系统基本结构特性。第5章着重于控制系统设计,介绍了状态反馈、极点配置等状态空间设计方法。第6章介绍了最优控制的一些基本理论和方法。本书的一大创新是引入了国际控制界最流行的软件MATLAB辅助分析和设计控制系统的相应内容,这部分内容可以有效巩固理论知识,弥补教学实践中存在的薄弱环节,有利于提高学生的系统分析和综合能力。

本书可作为高等工科院校自动控制及相关专业高年级本科生或研究生教材,也可供相关领域的工程技术人员、科研工作者参考和自学。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础/舒欣梅,龙驹,宋潇潇编著. —2版. —西安:西安电子科技大学出版社,2013.7
高等学校电子与电气工程及自动化专业“十二五”规划教材
ISBN 978-7-5606-3088-5

I. ① 现… II. ① 舒 ② 龙… ③ 宋 III. ① 现代控制理论—高等学校—教材 IV. ① O231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 145680 号

策 划 马乐惠

责任编辑 阎 彬 马乐惠

出版发行 西安电子科技大学出版社(西安市太白南路2号)

电 话 (029)88242885 88201467 邮 编 710071

网 址 www.xduph.com 电子邮箱 xdupfxb001@163.com

经 销 新华书店

印刷单位 西安文化彩印厂

版 次 2013年7月第2版 2013年7月第2次印刷

开 本 787毫米×1092毫米 1/16 印 张 10

字 数 225千字

印 数 4001~7000册

定 价 17.00元

ISBN 978-7-5606-3088-5/O

XDUP 3380002-2

*** 如有印装问题可调换 ***

本社图书封面为激光防伪覆膜,谨防盗版。

高等学校

自动化、电气工程及其自动化、机械设计制造及其自动化专业

“十二五”规划教材编审专家委员会名单

主任：张永康

副主任：姜周曙 刘喜梅 柴光远

自动化组

组长：刘喜梅（兼）

成员：（成员按姓氏笔画排列）

韦力	王建中	巨永锋	孙强	陈在平	李正明
吴斌	杨马英	张九根	周玉国	党宏社	高嵩
秦付军	席爱民	穆向阳			

电气工程组

组长：姜周曙（兼）

成员：（成员按姓氏笔画排列）

闫苏莉	李荣正	余健明
段晨东	郝润科	谭博学

机械设计制造组

组长：柴光远（兼）

成员：（成员按姓氏笔画排列）

刘战锋	刘晓婷	朱建公	朱若燕	何法江	李鹏飞
麦云飞	汪传生	张功学	张永康	胡小平	赵玉刚
柴国钟	原思聪	黄惟公	赫东锋	谭继文	

项目策划：马乐惠

策划：毛红兵 马武装 马晓娟

第二版前言

本书是2008年出版的《现代控制理论基础》的修订本。自第一版出版以来,该书受到广泛欢迎,为多所高等院校选用。

与第一版相比,第二版在保持原书主要风格和内容的基础上,对部分章节及内容进行了一些调整。修正了第一版中的一些错误,增加了贴近工程实际的例题,使论证和实例更好地结合起来。

本书共分7章。第0章为绪论。第1章介绍了现代控制理论的基础——状态空间描述。第2~4章着重于控制系统分析,介绍了在已知数学模型的情况下,系统的运动规律和能控性、能观性、稳定性等系统基本结构特性。第5章着重于控制系统设计,介绍了状态反馈、极点配置等状态空间设计方法。第6章为选学内容,介绍了最优控制的一些基本理论和方法。本书在第1~6章的最后一节,都介绍了国际控制界最流行的软件MATLAB辅助分析和设计控制系统的相应内容,探讨了控制系统模型的建立、控制系统工具箱的使用、现代控制系统频域和时域的分析与设计方法。

本书内容全面、重点突出,着重于基本概念和方法的介绍,尽量减少繁琐的数学推导,并给出一些结合工程实际的例题。在编写方法上,本书注意各章节之间内容的呼应,将论证和实例相结合,内容阐述循序渐进,可读性好,便于自学。另外,本书中MATLAB计算机辅助分析和设计内容的引入,可以有效巩固理论内容,弥补教学实践中存在的薄弱环节,有利于提高学生的系统分析和综合能力。

本书可作为高等工科院校自动控制及相关专业高年级本科生或研究生教材,也可供相关领域的工程技术人员、科研工作者参考和自学。

本书第0~4章由西华大学舒欣梅编写,第5、6章由西华大学龙驹和宋潇潇两位老师共同编写。在本书的修订过程中得到了西华大学电气工程学院王军院长及各位同仁的关心、帮助和支持,在此表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,恳请读者指正。

编者
2013年4月

第一版前言

“现代控制理论基础”课程是自动化、信息和计算机等学科的一门重要的专业基础课，在我国各高校已有 30 多年的开设历史。为了适应当前教材改革形势的需要，作者根据自己的教学经验，按照教育部面向 21 世纪教学改革的大纲要求，编写了本书。

本书共分为 7 章。第 0 章为绪论。第 1 章介绍了现代控制理论的基础——状态空间法。第 2~4 章着重于控制系统分析，介绍了在已知数学模型的情况下，系统的运动规律和能控性、能观性、稳定性等系统基本结构特性。第 5 章着重于控制系统设计，介绍了状态反馈、极点配置等状态空间设计方法。第 6 章介绍了最优控制的基本理论和方法。在每一章的最后，介绍了用国际控制界最流行的软件 MATLAB 辅助分析和设计控制系统的相应内容，探讨了控制系统模型的建立、控制系统工具箱的使用、现代控制系统频域和时域的分析及设计方法。

本书在选材上内容全面、重点突出，着重于基本概念和方法，尽量减少繁琐的数学推导，并给出一些结合工程实际的例题。在编写方法上，注意各章节之间内容的呼应，论证和实例相结合，内容阐述循序渐进，可读性好，便于自学。另外，MATLAB 计算机辅助分析和设计内容的引入，可以有效巩固理论内容，弥补了教学实践上存在的薄弱环节，有利于提高学生的系统分析和综合能力。

本书可作为高等工科院校自动控制及相关专业本科生或研究生的教材，也可供相关领域的工程技术人员、科研工作者参考和自学。

本书由舒欣梅主编，其中第 0~4 章由舒欣梅编写，第 5、6 章由龙驹编写。在本书的编写过程中得到了王军教授、董秀成教授、杨燕翔教授的关心、支持和帮助，在此一并致谢。陕西科技大学的党宏社教授担任本书主审，在此表示感谢！

限于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请指正。

编 者

2007 年 11 月

目 录

第 0 章 绪论	1
0.1 现代控制理论概述	1
0.1.1 控制理论发展历史	1
0.1.2 现代控制理论与经典控制理论的差异	2
0.1.3 现代控制理论的研究内容及其分支	2
0.2 本书的主要内容	3
0.2.1 本书主要内容结构	3
0.2.2 MATLAB 工程软件简介	3
第 1 章 控制系统的状态空间描述	4
1.1 状态空间描述的基本概念	4
1.2 状态空间描述的建立	8
1.3 化高阶微分方程为状态空间描述	13
1.3.1 微分方程中不含有输入信号导数项的情况	13
1.3.2 微分方程中含有输入信号导数项的情况	14
1.4 状态空间方程的线性变换	16
1.4.1 状态向量线性变换	16
1.4.2 化系数矩阵 A 为对角标准形	17
1.4.3 化系数矩阵 A 为约当标准形	21
1.5 传递函数矩阵	24
1.5.1 由状态空间方程转换成传递函数矩阵	24
1.5.2 子系统串并联与闭环系统传递函数矩阵	25
1.6 离散系统的数学描述	28
1.6.1 离散系统状态空间方程	28
1.6.2 脉冲传递函数矩阵	30
1.7 用 MATLAB 进行数学建模和模型转换	31
1.7.1 MATLAB 简介	31
1.7.2 控制系统的数学描述	33
1.7.3 模型的转换	36
1.7.4 模型的连接	39
习题	40
第 2 章 线性系统的运动分析	44
2.1 线性定常系统齐次状态方程的解	44
2.2 状态转移矩阵	45
2.2.1 状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的基本性质	45

2.2.2 状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 的计算方法	46
2.3 非齐次状态方程的求解	52
2.4 线性定常离散系统的运动分析	53
2.4.1 线性定常连续系统的离散化	53
2.4.2 线性定常离散系统的解	55
2.5 MATLAB 在状态方程求解中的应用	56
2.5.1 矩阵指数函数 e^{At} 的计算	56
2.5.2 线性定常非齐次状态方程在典型信号作用下的解	57
2.5.3 连续系统离散化	58
习题	59
第3章 控制系统的能控性和能观性	61
3.1 线性连续系统的能控性与能观性	61
3.1.1 线性系统的能控性定义及判据	61
3.1.2 线性系统的能观性定义及判据	64
3.1.3 对偶性原理	66
3.2 线性离散时间系统的能控性与能观性	67
3.2.1 线性定常离散时间系统的能控性定义及判据	68
3.2.2 线性定常离散时间系统的能观性定义及判据	68
3.2.3 连续系统离散化后的能控性和能观性	70
3.3 能控标准形与能观标准形	71
3.3.1 能控标准形	71
3.3.2 能观标准形	73
3.4 能控性、能观性与传递函数的关系	74
3.5 实现问题	75
3.5.1 能控、能观标准形的实现	76
3.5.2 对角标准形或约当标准形的实现	77
3.5.3 最小实现	79
3.6 线性定常系统的结构分解	80
3.6.1 能控性结构分解	80
3.6.2 能观性结构分解	81
3.6.3 系统按能控性和能观性的标准分解	82
3.7 MATLAB 在系统能控性和能观性分析中的应用	84
3.7.1 状态空间模型能控性、能观性判定	84
3.7.2 用 MATLAB 解决实现问题	85
3.7.3 控制系统的结构分解	87
习题	89
第4章 控制系统的稳定性分析	92
4.1 李雅普诺夫稳定性定义	92
4.1.1 系统的平衡状态	92
4.1.2 李雅普诺夫稳定性的定义	93
4.2 李雅普诺夫第二法	94

4.2.1 预备知识	94
4.2.2 李雅普诺夫第二法稳定性定理	95
4.3 线性定常连续系统的李雅普诺夫稳定性分析	98
4.4 线性定常离散系统的李雅普诺夫稳定性分析	99
4.5 非线性系统的稳定性分析	100
4.6 MATLAB在系统稳定性分析中的应用	102
4.6.1 利用特征根判断稳定性	102
4.6.2 利用李雅普诺夫方程判断稳定性	102
习题	103
第5章 极点配置与观测器的设计	105
5.1 反馈控制结构	105
5.1.1 状态反馈	105
5.1.2 输出反馈	106
5.1.3 状态反馈系统的性质	106
5.2 系统的极点配置	107
5.2.1 能控系统的极点配置	107
5.2.2 镇定问题	110
5.3 解耦控制	111
5.3.1 问题的提出	111
5.3.2 串联解耦	112
5.3.3 状态解耦	113
5.4 观测器及其设计方法	117
5.4.1 观测器的设计思路	117
5.4.2 全维状态观测器的设计	118
5.4.3 降维状态观测器的设计	120
5.5 带状态观测器的反馈系统	123
5.5.1 系统结构	123
5.5.2 系统基本特性	124
5.6 MATLAB在控制系统综合中的应用	126
5.6.1 极点配置	126
5.6.2 状态观测器设计	127
习题	128
* 第6章 最优控制	130
6.1 最优控制问题概述	130
6.1.1 引言	130
6.1.2 最优控制问题的提法	131
6.1.3 性能指标的分类	131
6.2 用变分法求解最优控制问题	132
6.2.1 泛函与变分	132
6.2.2 末值时刻固定、末值状态自由情况下的最优控制	133
6.2.3 末值时刻和末值状态固定情况下的最优控制	135

6.3 极小值原理 136

6.4 用动态规划法求解最优控制问题 138

6.4.1 动态规划法的基本思想 138

6.4.2 最优性原理 139

6.4.3 用动态规划法求解离散系统最优控制问题 139

6.5 线性二次型最优控制调节器 141

6.5.1 二次型最优调节器 141

6.5.2 定常情况下二次型调节器的稳定性 142

6.6 MATLAB在系统最优控制中的应用 142

6.6.1 线性二次型指标最优调节器的设计 142

6.6.2 最优化工具使用简介 143

习题 145

参考文献 148

第0章 绪 论

0.1 现代控制理论概述

控制理论一般分为经典控制理论和现代控制理论两大部分。和其他理论一样,控制理论的发展经历了漫长的过程。

0.1.1 控制理论发展历史

1. 经典控制理论的产生和发展

经典控制理论是20世纪50年代之前发展起来的,起源于第一次工业革命。1868年麦克斯韦(J. C. Maxwell)解决了蒸汽机调速系统中出现的剧烈振荡的不稳定问题,提出了简单的稳定性代数判据。1895年劳斯(Routh)与赫尔维茨(Hurwitz)把麦克斯韦的思想扩展到高阶微分方程描述的更复杂的系统中,各自提出了两个著名的稳定性判据——劳斯判据和赫尔维茨判据,这两个判据基本上满足了20世纪初期控制工程师的需要。为了适应第二次世界大战中控制系统需要具有准确跟踪与补偿能力的要求,1932年奈奎斯特(H. Nyquist)提出了频域内研究系统的频率响应法,1948年伊万斯(W. R. Ewans)提出了复数域内研究系统的根轨迹法。建立在这两者基础上的理论,称为经典控制理论。1947年美国数学家维纳(N. Wiener)把控制论引起的自动化同第二次产业革命联系起来,并于1948年出版了《控制论——关于在动物和机器中控制与通讯的科学》,书中论述了控制理论的一般方法,推广了反馈的概念,为控制理论这门学科奠定了基础。

2. 现代控制理论的产生和发展

随着近代科学技术的进步,空间技术和各类高速飞行器得到快速发展,使得工程系统结构和完成的任务越来越复杂,速度和精度也越来越高。这就要求控制理论能够解决动态耦合的多输入多输出、非线性以及时变系统的设计问题。此外,在实际应用中,常常要求系统的某些性能最优,并且要求系统有一定的环境适应能力。这些新的控制要求是经典控制理论所无法解决的,因此,现代控制理论应运而生。

科技的发展不仅对控制理论提出了挑战,也为现代控制理论的形成创造了条件。现代数学,例如泛函分析、线性代数等,为现代控制理论提供了多种多样的分析工具;而数字计算机为现代控制理论的发展提供了应用的平台。20世纪50年代后期,贝尔曼(Bellman)

等人提出了状态分析法和动态规划法；卡尔曼(Kalman)和布西创建了卡尔曼滤波理论；1961年庞特里亚金提出了极大值原理。这些理论的建立与发展标志着现代控制理论的形成。20世纪60年代以来，现代控制理论快速发展，形成了几个重要的分支学科，如线性系统理论、最优控制理论、自适应控制理论、系统辨识理论等。20世纪70年代末，“大系统理论”、“智能控制理论”和“复杂系统理论”得到发展，现代控制理论进入鲁棒控制理论阶段。

近半个世纪以来，现代控制理论已广泛应用于工业、农业、交通运输及国防建设各个领域。回顾控制理论的发展历程可以看出，它的发展过程反映了人类由机械化时代进入电气化时代，并走向自动化、信息化、智能化时代的前进步伐。

0.1.2 现代控制理论与经典控制理论的差异

现代控制理论与经典控制理论的差异主要表现在研究对象、研究方法、研究工具、分析方法、设计方法等几个方面，具体表现如下：

经典控制理论以单输入单输出系统为研究对象，所用数学模型为高阶微分方程，采用传递函数法(外部描述法)和拉普拉斯变换法作为研究方法和研究工具。其分析方法和设计方法主要运用频域(复域)、频率响应、根轨迹法和PID控制及校正网络。

现代控制理论以多输入多输出系统为研究对象，采用一阶微分方程作为数学模型，研究问题时，以状态空间法(内部描述)为研究方法，以线性代数矩阵为研究工具。其分析方法采用了复域、实域，可控且可观测的方法，设计方法采用了状态反馈和输出反馈。

另外，经典控制理论中，频率法的物理意义直观、实用，但难以实现最优控制；现代控制理论则易于实现最优控制和实时控制。

现代控制理论是在经典控制理论的基础上发展起来的。虽然两者有本质的区别，但对动态系统进行分析研究时，两种理论可以互相补充，相辅相成，而不是互相排斥。对初学者来说，应采用与经典控制理论联系对比的方式进行学习。

0.1.3 现代控制理论的研究内容及其分支

科学在发展，控制论也在不断发展。我们通常讲的现代控制理论指的是20世纪50~60年代所产生的一些重要控制理论，主要包括四个方面：

(1) 线性多变量系统理论。用状态空间法对多输入多输出复杂系统建模，并进一步通过状态方程求解分析，研究系统的能控性、能观性及稳定性，分析系统的实现问题。

(2) 最优控制理论。用变分法、最大(最小)值原理、动态规划原理等求解系统的最优问题，其中常见的最优控制包括时间最短、能耗最少等，以及它们的组合优化问题，相应的有状态调节器、输出调节器、跟踪器等综合设计问题。

(3) 最优估计理论。在对象数学模型已知的情况下，最优估计理论研究的问题是如何从被噪声污染的观测数据中确定系统的状态，并使这种估计在某种意义下是最优的。这往往需要一些专门的处理方法，如卡尔曼滤波技术。

(4) 系统辨识与参数估计。基于对象的输入、输出数据，在希望的估计准则下，找到系统的阶数和参数，建立对象的数学模型。

0.2 本书的主要内容

0.2.1 本书主要内容结构

现代控制理论主要研究线性系统状态的运动规律和改变这种运动规律的可能性与方法,建立和揭示系统结构、参数、行为及性能间的关系。通常,这可以分解为三个问题,即系统数学模型的建立、系统运动规律的分析 and 致力于改变运动规律的系统的设计。基于控制理论的认识规律,本书内容安排如下:

本书共分7章。第0章是绪论。第1章是控制系统的状态空间描述,主要解决系统数学模型的建立问题,介绍系统的状态空间描述及其与传递函数描述间的关系。第2章是线性系统的运动分析,介绍状态转移矩阵及线性系统的解析响应。第3章是控制系统的能控性和能观性,介绍系统的能控性和能观性的定义与各种判据,以及线性系统按能控性和能观性的分解。第4章是控制系统的稳定性分析,介绍李雅普诺夫稳定性的概念和判定问题。第5章是极点配置与观测器的设计,是对系统的设计和综合,介绍使用极点配置改变系统性能的方法和状态观测器的设计问题。第6章作为选学内容,初步介绍系统的最优控制理论。

0.2.2 MATLAB 工程软件简介

除了现代控制理论的理论基础内容外,在本书的第1~6章的最后一节都引入使用MATLAB软件求解控制系统问题的例子。这里对MATLAB软件简略地作一介绍。

美国MathWorks公司推出的MATLAB软件一直是国际科学界应用和影响最广泛的计算机数学软件之一。在控制类学科中,它更是科学研究者首选的计算机软件。它是一种十分有效的工具,能轻松地解决系统仿真及控制系统计算机辅助设计领域内教学与研究中的问题;可以将使用者从繁琐的底层编程中解放出来,把宝贵的时间更多地花在解决科学问题中。近十年来,随着MATLAB软件和Simulink仿真环境在系统仿真、自动控制领域中日益广泛地应用,国外很多高校在教学和研究中都将MATLAB/Simulink作为基本的计算机工具,许多学者都把自己擅长的CAD方法用MATLAB加以实现,出现了大量的MATLAB配套工具箱,如控制系统工具箱(Control System Toolbox)、系统辨识工具箱(System Identification Toolbox)、鲁棒工具箱(Robust Control Toolbox)、最优化工具箱(Optimization Control Toolbox)、信号处理工具箱(Signal Processing Toolbox)等。这些工具箱和功能强大的系统仿真环境Simulink一起,为控制系统的分析设计提供了非常好的工具。

因此,本课程中引入了MATLAB语言,结合相应的课程内容介绍其在控制理论中的分析应用功能,这既有利于读者及时巩固控制理论的知识,又有利于他们学会应用基本的计算仿真工具,提高对各种控制系统、各种控制理论方法的理解和分析综合能力。

第 1 章 控制系统的状态空间描述

研究系统的首要前提是建立系统的数学模型。随所考察问题的性质的不同,一个系统可以有不同的表示方式,也就是有多种类型的模型。系统的数学模型主要有两种形式,即时域模型和频域模型。时域模型常用微分或差分方程组表示;频域模型常用传递函数和频率响应表示。对应于系统的这两种模型,发展和形成了控制理论中的两类不同方法——状态空间方法和复频域方法。

现代控制理论是在经典控制理论的基础上发展起来的,但它们在数学工具、理论基础和研究方法上有本质的区别。经典控制理论主要以传递函数为数学模型,采用复频域分析方法,并在此基础上建立起频率特性和根轨迹等图解设计法。现代控制理论主要以状态空间描述为基础,采用时域分析方法。与传递函数描述相比,用状态空间描述表示物理系统有以下优点:

第一,状态空间描述更适于表示复杂系统,如多输入多输出系统、时变系统等。

第二,除系统输出的信息外,状态空间方程还可提供系统内部状态的情况,并且在分析时可以把初始条件包括进去。

第三,采用状态反馈的系统在一定条件下可以任意配置极点位置,从而得到理想的系统动态性能。

第四,状态空间描述由于采用了矩阵和状态向量的形式而使格式简单统一,因而可以方便地利用计算机运算和求解,实现最优控制。

1.1 状态空间描述的基本概念

状态空间描述是以状态、状态变量、状态空间等概念为基础建立起来的,其实质是将系统运动方程写成一阶微分方程组的方法。下面我们给出相关概念的定义。

1. 状态

任何一个系统在特定时刻都有一个特定的运动状况。运动状况可以用一组独立的状态来描述。以直线运动的质点为例,每一时刻的位置和速度就是它的状态。

2. 状态变量

状态随时间的变化可以用状态变量来表征。状态变量具有如下特点:

(1) 只要知道状态变量的初值、输入量和描述动态系统的微分方程,就能完全确定系统的未来状态和输出响应。

(2) 状态变量是为完全表征系统行为所必需的系统变量,减少状态变量将破坏表征的

完全性,而增加状态变量将是完全表征系统行为所不需要的。

因此,状态变量指的是完全表征系统运动状态的最小个数的一组变量。一个用 n 阶微分方程式描述的系统,有 n 个独立的状态变量,常写作 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 。当这 n 个独立变量的时间响应都求得时,系统的运动状态也就被揭示无遗了。如前面质点运动的例子,状态变量就是质点的位置函数和速度函数。

需要注意的是,状态变量是描述系统内部动态特性行为的变量。它可以是能直接测量或观测的量,也可以是不能直接测量或观测的量;可以是物理的,也可以是没有实际物理意义的抽象的数学变量。另外,描述一个系统的状态变量可以有多种不同的选择方式,究竟选哪一组变量作为系统的状态变量,可以视情况而定。

3. 状态向量

完全描述给定系统行为的 n 维状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 可以看做是向量 $\mathbf{x}(t)$ 的 n 个分量,向量 $\mathbf{x}(t)$ 就称为状态向量,记作

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

或

$$\mathbf{x}^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

4. 状态空间

以选择的一组 n 维状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为基底而构成的 n 维正交空间,称为状态空间。系统在任何时刻的状态都可以用状态空间中的一点来表示。状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 在状态空间中的变化形成一条轨迹,称为状态轨线。

5. 状态空间方程

当一个动态系统的状态变量确定后,由系统状态变量构成的一阶微分方程组称为系统状态空间方程,简称状态方程。

假设有一个 n 阶的多输入多输出(MIMO)系统,具有 r 个输入量 $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$, 它的状态方程可写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned} \quad (1-1)$$

式中 $f_1, f_2, \dots, f_n$ 为对应的函数关系。状态方程描绘了系统的动态特性,反映了原有的状态和输入信号共同引起系统状态发生变化这一过程。

6. 输出方程

我们希望能从系统中获得的信息称为输出变量(输出量)。系统输出量与状态变量、输入量的关系写成方程形式就称为输出方程。假设 n 阶的多输入多输出系统具有 m 个输出量 $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$, 输出方程可以表示为

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
 y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\
 &\vdots \\
 y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)
 \end{aligned} \tag{1-2}$$

式中 $g_1, g_2, \dots, g_m$ 为对应的函数关系。输出方程描述了系统外在表现的动态特性, 反映了输出量与系统内部的状态变量和外部输入量之间的对应关系。

7. 状态空间描述

动态系统的状态方程和输出方程的组合, 称为状态空间描述或状态空间表达式。如果定义向量和矩阵如下

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \\
 \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

则状态空间描述可写为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{cases} \tag{1-3}$$

式(1-3)既表征了输入对于系统内部状态的因果关系, 又反映了内部状态对于外部输出的影响, 所以状态空间描述是对系统的一种完全的描述。由于系统状态变量的选择是非唯一的, 因此状态空间描述也是非唯一的。

如果动态系统本身是线性的, 则可得到如下方程

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\
 \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)
 \end{aligned} \tag{1-4}$$

式中, $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$ 、 $\mathbf{D}(t)$ 为矩阵, 且其元素随时间而变化, 这种系统称为线性时变系统。

特别地, 如果矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 、 $\mathbf{B}(t)$ 、 $\mathbf{C}(t)$ 、 $\mathbf{D}(t)$ 中的参数与时间无关, 为固定的常数, 则称该系统为线性定常系统, 此时式(1-4)可写为如下方程

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\
 \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)
 \end{aligned} \tag{1-5}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1r} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mr} \end{bmatrix}$$

在状态空间描述式(1-5)中, $n \times n$ 维方阵 A 称为系数矩阵, 由系统的结构和参数决定, 描述了系统内部状态变量之间的关联情况, 是系统中最重要矩阵, 故也称为系统矩阵; $n \times r$ 维矩阵 B 称为输入矩阵或控制矩阵, 描述了输入量对系统状态变化的影响; $m \times n$ 维矩阵 C 称为输出矩阵, 描述了状态变量和输出变量间的线性关系; $m \times r$ 维矩阵 D 称为直接传递矩阵, 也称关联矩阵, 描述输入对输出的直接影响。在很多系统中不存在这种直接传递关系, 即 $D=0$ 。

8. 状态空间描述的状态结构图

状态空间描述也可以用图形来表示, 即状态结构图。状态结构图是与状态空间描述相对应, 描述系统输入量、状态变量和输出量之间函数关系的一种结构图, 它的建立有助于动态系统的模拟实现。

状态图只由三种基本结构组成: 积分器、加法器和放大器。其符号如图 1-1 所示。

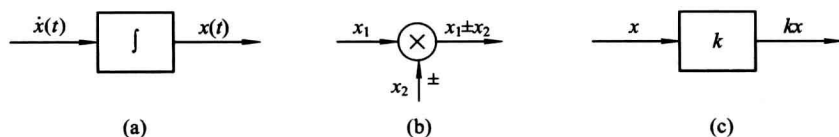


图 1-1 状态结构图中的三种基本结构

(a) 积分器; (b) 加法器; (c) 放大器

对于实际的状态空间模型, 可以根据状态变量、输入变量和输出变量间的信息传递关系, 画出各变量间的结构图。例如对一个二阶系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 3x_2 + 4u \\ y &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

用状态结构图可表示为如图 1-2 所示的形式。

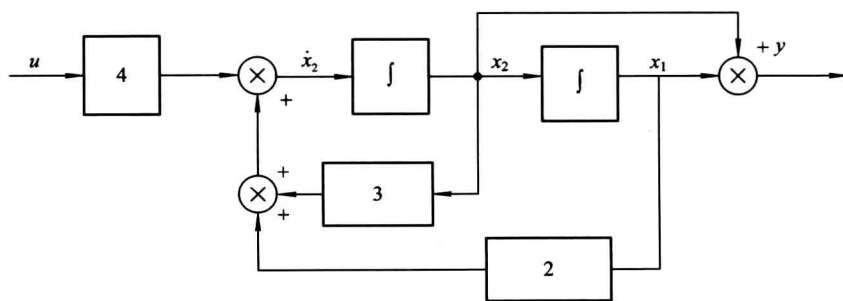


图 1-2 二阶系统的状态结构图

对于状态空间表达式(1-5), 其状态结构图可表示为如图 1-3 所示的形式。