初等数学研究汇编

第一辑

（高中数学讲与练）

武汉大学校友会中学数学分会编

初等数学研究汇编

武汉大学出

初等数学研究汇编

第一辑

（高中数学讲与练）

武汉大学校友会中学数学分会编

前　言

本书根据国家中学数学教学大纲，结合中学数学教学实际在对现行高中数学教材内容进行系统综合整理，特别是在总结了作者长年从事中学数学教学工作的经验的基础上，按现行教材章节顺序以课型编写而成。

全书分上、下两册。上册包括代数、三角。下册包括立体几何、解析几何。每章分若干课，每课由“要求”、“例题”、“习题”三部分构成。一章结束附有自测题一份，供本章检测效果之用。“要求”中指出本课知识要点或需要特别注意之处。“例题”选材源于教材，高于教材，力求目的明确、题型典型新颖、难易适中且围绕高中数学知识的重难点及关键问题，并安排有一定的坡度。解后的“注”指出规律，着眼于思维变通以求举一反三之效。“习题”中配备有主、客观命题适量，既重落实双基夯实基础，又重基本技能技巧的训练，使本书覆盖面宽，既重传统常规又力图灵活开拓，富有感发，书末附有答案与提示以备读者核对参考。

本书可作高中数学知识系统复习之教材及各年级数学系统总结之参考书，也是广大数学爱好者自学高中数学的复习资料，作为初等数学研究汇编之一对中学数学教师亦不失研究价值。

参加本书撰写的作者还有霍金保、许华强、李忠旺、贺玉生、宋宜德、陆远鸿、吴玲玲等老师。全书由蒋文虎老师绘图。作者虽潜心于中学数学教学研究，但难免有不妥之处，欢迎广大读者批评指正。

致 读 者

值此《初等数学研究汇编（第一辑）》出版之际，我们感到有几句未尽的话要加以申述的。

首先，关于本书的结构，要求参照苏联科学出版社出版的、由##知识出版社翻译出版的《中学数学手册》的系统，但必须约束在国家教委颁布的中学数学教学大纲和高等学校入学考试大纲的范围之内。其次，鉴于近代数学发展迅速，有些概念要作适当的更新；还必须认真分析初等数学的内在联系，正确确定重点；同时，在认真分析学生认知结构的基础上，确定难点。这一切都必须在紧密结合中学数学教学法原则的基础上进行。

我们深切希望在培养学生德、智、体全面发展，启迪学生的智力开发，锻炼学生的逻辑思维能力方面有所贡献。基于这一点，书名仍采用《初等数学研究汇编》。有不少省内外中教系统的教师不断来稿来函支持我们的工作，借此机会仅向他们表示深切的谢意。

武 汉 大 学 出 版 社

1989年9月26日

目录

代数篇

三角篇

第 一 章

幂函数、指数函数、对数函数

第一课 集合与映射

要 求

1 正确理解集合、子集、交集、并集、补集、空集、全集的概念，两集合相等、包含与被包含的意义，并掌握集合的一些简单性质。

2 正确理解映射、一一映射、逆映射的概念。

例 题

1．设$A=\{1, 2\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，问A与B是什么关系？并用列举法写出B。

解 ∵x代表A的子集，又A的子集都是B的元素，

∴$A\in B$

而$B=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

2．设$I=\{$小于8的非负整数$\}$，$A=\{$6的正约数$\}$，$B=\{x|x^3-5x^2+6x=0\}$，验证：

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

解 容易写出$I=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$，

$A=\{1, 2, 3, 6\}$，$B=\{0, 2, 3\}$，

故 $\overline{A}=\{0, 4, 5, 7\}$，$\overline{B}=\{1, 4, 5, 6, 7\}$。因此，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{4, 5, 7\}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{0, 1, 4, 5, 6, 7\}$，$\overline{A\cap B}=\overline{\{2, 3\}}=\{0, 1, 4, 5, 6, 7\}$，$\overline{A\cup B}=\overline{\{0, 1, 2, 3, 6\}}=\{4, 5, 7\}$，

显然，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

注 对于全集I，集合A，B，都有

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}，\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}.$$

3. 某年级先后举行数理化三科竞赛，学生中至少参加一科的：数学203人，物理179人，化学165人；参加两科的：数学、物理143人，数学、化学116人，物理、化学97人；三科都参加的：89人，求参加竞赛的学生总数。

解 设A、B、C分别表示参加数学、物理、化学每一科竞赛的学生集合，并用n（S）表示有限集合S的元素的个数，如图。则

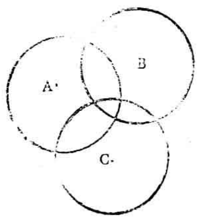

图1—1

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$=203+179+165-143-97-116+89$$

$$=280.$$

答：参加竞赛的学生总人数是280。

4. 已知$N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$，$M=\{3, 5, 7, 9, \cdots\}$，求证：映射$f: N\to M$使M中的元素$m=2n+1$和N中的元素n对应，是一一映射.

证明 任取n_1、$n_2\in N$，且$n_1\neq n_2$，则有$2n_1+1\neq$

$m_1\in M$，$2n_2+1=m_2\in M$；且$m_1\neq m_2$（$\because m_1-m_2=2(n_1-n_2)\neq 0$）。另一方面，任取$m'\in M$，必有$\frac{m'-1}{2}\in N$（$m'$是大于1的奇数），使得$2\cdot\frac{m'-1}{2}+1=m'$。令$n'=\frac{m'-1}{2}$则$n'\in N$，使得$2n'+1=m'$。

综上所述，映射f：$N\to M$使M中的元素$m=2n+1$和N中的元素n对应，是一一映射。

注　必须按照教材中一一映射的定义，分两个方面证明这类问题。

5．已知$A=\{1,2,3,\cdots\}$，$B=\left\{\frac{1}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{7},\cdots\right\}$一一映射$f$：$A\to B$使B中的元素$y=\frac{2x-1}{2x+1}$和A中的元素x对应，求此映射的逆映射。

解　由$y=\frac{2x-1}{2x+1}$，得$2xy+y=2x-1$，

$(2y-2)x=-y-1$．

$\because y\neq 1$，$\therefore x=\frac{y+1}{2-2y}$．

故所求的逆映射为f^{-1}：$B\to A$，使A中的元素$x=\frac{y+1}{2-2y}$和B中的元素y对应。

习　题　一

1．一元选择题

（1）集合$\{0\}$与$\varnothing$的关系是（　　）

（A）$\{0\}=\varnothing$；　　（B）$\{0\}\in\varnothing$；

（C）$\varnothing\in\{0\}$；　　（D）$\varnothing\subseteq\{0\}$。

（2）设$I=\{$实数$\}$，$M=\{x|x\geqslant 1\}$，

$N=\{x|0\leqslant X<5\}$，则$\overline{M\cap N}$是（　　）

（A）$\{x|1\leqslant x<5\}$；（B）$\{x|x\geqslant 5\}$；

（C）$\{x|x<1\}$；　　（D）$\{x|x<1$或$x\geqslant 5\}$.

（3）设A＝{正方形}，B＝{菱形}　C＝{矩形}，D＝{平行四边形}，其中D是全集，则（　　）

（A）$(A\cup B)\cup C=D$；　　$A\cup(\overline{B}\cup\overline{C})=D$；

（C）$(\overline{A\cup B})\cup C=D$；　　（D）$A\cup(\overline{B\cup C})=D$.

2．填空题

（1）设$A=\{x|x=2n, n\in N\}$，$B=\{x|x=8n, n\in N\}$，$C=\{x|x=4n-2, n\in N\}$，则$(A\cup C)\cap B$＝____________

（2）设I＝{实数}，$M=\{x|x\geqslant 1\}$，$N=\{x|x<0\}$，则$\overline{M\cup N}$＝____________

（3）已知$I=R$，$A=\{x||x-1|>4\}$，$B=\{x|-3<x<5\}$，则$\overline{A}\cup\overline{B}$＝____________

3．判断集合$A=\{x|x=\cos\frac{n\pi}{8}, n\in Z\}$与集合$B=\{y|y=\sin\frac{(2m-3)\pi}{6}, m\in Z\}$之间的关系.

4．已知$A=\{1, 2, 3, 4, 5,\}$，$B=\{2, 9, 28, 65, 126\}$，一一映射$f: A\longrightarrow B$，使B中的元素$y=x^3+1$和A中的元素x对应．求此映射的逆映射.

5．某旅行团在了解本团成员中有多少人去过上海、西安或重庆时，发现每个人都至少去过其中一个地方。而去过上海和西安的有4人，去过西安和重庆的有3人，去过上海和重庆的有6人，去过上海或西安的有18人，去过西安或重庆的有11人，去过上海或重庆的有16人，而三个地方都去过的有2

人。问全团共有多少人？

第二课　函数

要　求

1　正确理解函数、反函数概念，深刻理解构成函数的三个组成部分中，核心是对应法则。

2　掌握反函数的求法，能熟练地求出函数的定义域，并能掌握求函数值域的某些方法。

例　题

1．已知$f(x)=kx^2+b$,求$f(a)$，$f(\frac{1}{x})$，$f[f(x)]$

解　$f(a)=ka^2+b$,

$$f(\frac{1}{x})=k(\frac{1}{x})^2+b=\frac{k}{x^2}+b$$

$$f[f(x)]=k[f(x)]^2+b$$

$$=k(kx^2+b)^2+b$$

$$=k^2x^4+2k^2bx^2+kb^2+b$$

2．下列函数$f(x)$与$g(x)$是否表示同一函数，为什么？

（1）$f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

（2）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

（3）$f(x)=x$，$g(x)=\sqrt[3]{x^3}$．

解　（1）不是同一函数，因为它们的定义域不同．

（2）不是同一函数，因为它们的对应法则不同，（$g(x)$

$=|x|$）

（3）是同一函数，因为$g(x)=x$。

注　函数是由“定义域”、“值域”以及“定义域到值域上的对应法则”三部分构成的，其中任何一部分不同，都不是能说是同一函数。

3．已知$f(x)=\begin{cases}x+1 & (x>0)\\ \pi & (x=0)\\ 0 & (x<0),\end{cases}$ 求$f(-2)$，$f\{f[f(-1)]\}$。

解　$f(-2)=0$，$f\{f[f(-1)]\}=f[f(0)]=f(\pi)=\pi+1$。

注　顺序是由里到外求值。

4　求下列函数的反函数，并求出反函数的定义域和值域：

（1）$y=x^2+1\ (x\geqslant 0)$；

（2）$y=-\sqrt{-2x+2}$。

解　（1）由$y=x^2+1$，可得$x=\sqrt{y-1}$，故函数$y=x^2+1\ (x\geqslant 0)$的反函数是$y=\sqrt{x-1}$，反函数的定义域是：$x\geqslant 1$，值域是：$y\geqslant 0$。

（2）由$y=-\sqrt{-2x+2}$，可得$x=-\frac{1}{2}y^2+1$，故函数$y=-\sqrt{-2x+2}$的反函数是$y=-\frac{1}{2}x^2+1$，反函数的定义域是：$x\leqslant 0$，值域是$y\leqslant 1$。

5　求下列函数的定义域、值域：

（1）$y=\sqrt{x^2+2x+4}$；

（2）$y=\dfrac{1}{2+x-x^2}$；

（3）$y=x^2$，$x\in(-3,1)$。

解 （1）$\because x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geqslant 3$，

$\therefore y=\sqrt{x^2+2x+4}$ 的定义域是：$x\in R$，域值是：$y\geqslant\sqrt{3}$。

（2） $\because 2+x-x^2=-(x-2)(x+1)\neq 0$，

$\therefore x\neq 2$ 且 $x\neq -1$。

$$\therefore y=\frac{1}{2+x-x^2}\therefore y\neq 0$$

由原函数式得 $yx^2-yx-2y+1=0$。

$\because x$ 为实数，$y\neq 0$，

$\therefore \triangle=y^2+4y(2y-1)\geqslant 0$。

解得 $y<0$ 或 $y\geqslant\frac{4}{9}$。

$\therefore y=\frac{1}{2+x-x^2}$ 的定义域是 $x\neq 2$ 且 $x\neq -1$ 的一切实数，值域是：$y<0$ 或 $y\geqslant\frac{4}{9}$。

（3）当 $x=-3$ 时，$y=9$，当 $x=1$ 时，$y=1$，从函数 $y=x^2$ 的图象可知：$0\leqslant y<9$，故函数 $y=x^2$，$x\in(-3,1]$ 的定义域是：$x\in(-3,1]$，值域是：$y\in[0,9)$。

注 通过求函数的最大值或最小值得到函数的值域；通过观察函数的图象得到函数的值域等，是求函数值域的基本方法之一。

习 题 二

1．一元选择题

（1）如果 $f(x+1)=x^2-5x+4$，则 $f(x)$ 等于（ ）

（A）$x^2-7x+10$；　　（B）$x^2-7x-10$；

(C) $x^2+7x-10$;　　(D) x^2-4x+6.

(2) 设函数$y=f(x)$的定义域是正实数集，且具有性质$f(xy)=f(x)+f(y)$，又已知$f(8)=3$，则$f(\sqrt{2})$等于(　　)

(A) 1;　(B) -1;　(C) $\frac{1}{2}$;　(D) $-\frac{1}{2}$.

(3) 下列各对函数中，图象完全相同的是(　　)

(A) $y=2\lg x$和$y=\lg x^2$;

(B) $y=|\sin x|$和$y=\sin|x|$;

(C) $y=\frac{x}{x}$和$y=1$;

(D) $y=\frac{|x-1|}{x-1}$和$y=\begin{cases}-1, & x\in(-\infty, 1)\\ 1, & x\in(1, +\infty)\end{cases}$.

2. 填空题

(1) 设函数$f(x)$的定义域是$[0, 2]$，则函数$f(x^2)$的定义域是__________

(2) 函数$y=(x-1)^2$ $(x\leqslant 1)$的反函数是_____

(3) 设$f(x)=x^2+4x-3$，则$f(x+1)=$_____

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}}$

(2) $y=\frac{1}{x^2-|x|}$

(3) $y=\sqrt{\lg x}+\lg(5-2x)$.

4 求下列函数的值域：

(1) $y=\frac{x}{x+1}$ $(x\neq-1)$.

(2) $y=\sqrt{16-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$;

(3) $y=\sqrt{x^2-49}$ $(x\leqslant -7)$.

5　关于x的函数$y=2x^2+3mx+2m$的最小值是m的几次函数？这个关于m的函数，当m取何值时有最大值？它的最大值是多少？

第三课　函数的奇偶性、单调性

要　　求

能正确理解函数奇偶性、单调性等概念，并能判断某些函数的奇偶性和单调性

例　　题

1. 讨论下列各函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^5(x^2+1)$；

(2) $f(x)=\lg(1+x)+\lg(1-x)$；

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$

解　(1) $\because f(-x)=(-x)^5[(-x)^2+1]$

$$=-x^5(x^2+1)=-f(x),$$

$\therefore f(x)$是奇函数.

(2) $\because f(-x)=\lg[1+(-x)]+\lg[1-(-x)]$

$$=\lg(1+x)+\lg(1-x)=f(x)$$

$\therefore f(x)$是偶函数.

(3) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$的定义域为$A=\{x|x\in R$，且$x\neq$

$-2\}$。取$x=2$时，$-x=-2$，而$-2\notin A$，这时$f(-x)$无意义，故$f(x)$既不是奇函数，也不是偶函数。

2．若$y=f(x)$是增函数，求证：它的反函数也是增函数．

证明　设$y=f(x)$的反函数是$x=f^{-1}(y)$，$y=f(x)$的定义域为A，值域为B。

在B中任取y_1, y_2，且$y_1<y_2$．则在A中必存在x_1, x_2，使得$x_1=f^{-1}(y_1)$，$x_2=f^{-1}(y_2)$，因为$y=f(x)$是增函数，所以如果$x_1=x_2$，那么必有$y_1=y_2$，与题设$y_1<y_2$矛盾；如果$x_1>x_2$，那么必有$y_1>y_2$，与题设$y_1<y_2$矛盾．故只有$x_1<x_2$。因此，$x=f^{-1}(y)$是增函数。

注　若$y=f(x)$是减函数，则它的反函数也是减函数。

3．求函数$y=2^{\sqrt{-x^2+2x+8}}$的单调区间．

解　$\because -x^2+2x+8\geqslant 0$，$\therefore x\in[-2, 4]$．

$\because -x^2+2x+8=-(x-1)^2+9$，

$\therefore$当$x\in[-2, 1)$时，$-x^2+2x+8$递增，从而$y=2^{\sqrt{-x^2+2x+8}}$递增；当$x\in[1, 4]$时，$-x^2+2x+8$递减，从而$y=2^{\sqrt{-x^2+2x+8}}$递减。故所求单调区间为$[-2, 1)$、$[1, 4]$．

4　求证$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -x^2-2x-3 & (x<0) \end{cases}$是奇函数。

证明　$f(x)$的定义域为R。

当$x=0$时，$-x=0$．

$\because f(x)=0$，$f(-x)=0$，$\therefore f(-x)=-f(x)$。

当$x>0$时，$-x<0$；故

$$f(-x)=-(-x)^2-2\cdot(-x)-3$$
$$=-(x^2-2x+3)=-f(x).$$

当$x<0$时，$-x>0$；故

$$f(-x)=(-x)^2-2\cdot(-x)+3$$
$$=-(-x^2-2x-3)=-f(x).$$

因此，对任意$x\in R$，都有$f(-x)=-f(x)$，$f(x)$是奇函数。

5．已知$y=(2k+1)x+b$在$x\in R$上是减函数，试确定k的范围。

解　设$x_1<x_2$，x_1、$x_2\in R$，则$y_1>y_2$，

故$y_1-y_2=[(2k+1)x_1+b]-[(2k+1)x_2+b]>0$，

即$(2k+1)(x_1-x_2)>0$。

$\because x_1-x_2<0$，$\therefore 2k+1<0$，$k<-\frac{1}{2}$。

注　利用减函数的定义，是确定k的范围的关键。

习　题　三

1．一元选择题

（1）函数$y=3^{4-5x-x^2}$是增函数的区间为（　　　）

（A）$(-\infty,-\frac{5}{2}]$；　（B）$(-\infty,\frac{5}{2}]$；

（C）$(-\frac{5}{2},+\infty)$；　（D）$(\frac{5}{2},+\infty)$。

（2）下列函数中，既是区间$(0,\frac{\pi}{2})$上的增函数，又是以π为周期的偶函数的是（　　　）

（A）$y=x^2$（$x\in R$）；　（B）$y=|\sin x|$（$x\in R$）；

（C）$y=\cos 2x$（$x\in R$）；　（D）$y=e^{\sin 2x}$（$x\in R$）。

（3）已知函数$f(x)=ax^3+b\sin x+1$，其中a、b都是常数，且$f(1)=5$，则$f(-1)$的值为（　　　）

（A）5；　（B）3；　（C）0；　（D）-3。

2。 填空题

（1）函数_____的图象与函数$y=2^x$的图象关于y轴对称。

（2）函数$y=\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-5x-6}$是减函数的区间为_____

（3）已知函数$f(x)=ax^3+bx-7$，其中a、b都是常数，且$f(13)=25$，则$f(-13)=$______

3。 求证： 函数$y=\frac{1}{1+x^2}$在区间（0，$+\infty$）上是减函数。

4。 判断函数$y=\frac{x(a^x-1)}{a^x+1}$（$a>0$且$a\neq 1$）的奇偶性。

5。 设$-1\leqslant x\leqslant 1$，$0<a<2$，a为常数，求函数$y=x^2+ax+3$的最大值和最小值。

第四课　幂函数

要　求

正确理解幂函数的概念，正确运用幂函数的性质