相 似 形

主编：杨大淳

北京广播学院出版社

相似形

主　编：杨大淳
副主编：袁智国、杜其湘
编　者：耿俊杰、李文英
杨家林、周秀敏
石景林

北京广播学院出版社

1989年2月

相 似 形

杨大淳、袁智国、杜其湘

北京广播学院出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京广播学院印刷厂印刷

ISBN 7-81004-115-0/05

787×1092毫米1/32　4印张　90千字

1989年2月第1版1939年2月第1次印刷

印数4000册　　定价1.50元

前　言

数学是中学阶段重要的基础学科，在科学技术日益更新，教学改革不断发展的新时期，数学教学起着特殊的作用。它是基础的基础，是培养学生思维能力创造能力的有效课程。

教师如何教好这门课，学生如何学好这门课，是师生共同关心的问题。我们几位教师根据自己多年的实践体会，参照了中学数学教学中的可取的经验，以教学大纲为指针，与教材内容相适应，编写了这套丛书。近年来，数学练习题，可谓多矣，各种测试题也是名目繁多，不可胜数。但教改的宗旨是减轻负担，提高质量。教学不能以多取胜，练习切忌陈陈相因，繁琐重复的练习，使人不得要领，岂能提高学习效益？学生的学习如能拨云见日，以少胜多，在山重水复之中，寻求到柳暗花明的新境界，这就必然要找到一条可行之路。这条路，应当是既符合教材知识的逻辑联系，又掌握学生思维发展的客观规律，使学生由浅入深由近知远，逐步悟见其知，学生在掌握规律，运用规律的同时，还可不断提出创造性的见解，以新颖，科学，简洁的思考和解题发展兴趣，提高能力。

自学是中学生学习的重要手段，是为今后获取知识必备的能力，这套丛书，在培养学生自学能力，开启他们的数学灵感，做出一些尝试，同时也有利于学生在学习中建立自己的知识系统和结构。对于在校学生或知识青年的自学，对于青年教师的教学，应有一定的参考价值。

为编写这套丛书，我们特邀中学数学界有影响的老教师杨大淳先生为主编，对于初中数学教材中的难点、重点，内在联系，以及精选的习题，点拨的要点，作了多方面讨究，但我们限于教学水平，理论修养，实践经验之不足，疏漏之处在所难免，敬希同仁不吝指正。

参加编写的有袁智国，杜其湘，李文英，耿俊杰，杨家林，周秀敏，石景林。

编　　者

目　　录

相 似 形

在平面几何中已经学过的三角形、四边形所接触到的几何图形不是研究全等关系，就是研究量与量之间的相等关系或不等关系，如三角形全等，以及全等三角形对应边相等，对应角相等，又如利用各种特殊四边形的性质证明某些边相等或角相等。这些图形不论是三角形或各种四边形都是由实际物体中抽象出来的，但在实际中还会遇到大量的形状相同，大小不相等的图形，比如放大(或缩小)了的照片；同一地区按照不同比例尺绘制的地图；国旗上大五角星和小五角星等等。象这些形状相同，大小成比例的图形叫相似形。几何学即是研究图形性质的学科，当然要研究这些相似的几何图形的相互关系。

第一章　成比例的线段

一、线段的比

1. 线段的度量

为了要知道校园内一段路的长度，我们就用米为单位去量它，这里所谓的量就是把米尺一端和这路的一端对齐，然后把这米尺紧紧沿着路面，一米一米的比较，最后得到路长。例如52米，这也就是路是1米的52倍。用几何观点来看米尺中的单位1米和路长可以分别看做是线段a和l。这样量

路的过程就是求线段l含线段a多少倍的过程，这里线段a叫做长度单位，线段 l 是被度量的线段，最后量得的结果叫做量数。量数后面注明了长度单位才是长度，如前面实例中的“52”是量数而“52米”才是长度。

用长度单位a量线段l和用米为长度单位量路长，毕竟有所不同。用米为单位量路长是一件十分简单的事，但绝不能把线段的度量问题也看成很简单的问题。比如用长度单位a去截线段l是否一定截得尽？截不尽怎么办？度量线段所得的量数究竟是怎样的数？这就需要我们详细的精确的研究它们。

用线段a为长度单位，线段AB是要度量的线段，从端点A起连续截取等于a的线段AA_1、A_1A_2、A_2A_3、…这样截取的结果总会出现下面两种情况：

(1)截了m次以后(m为正整数)正好截尽如图1·1中$AB=6a$这时量数是正整数。

图 1.1

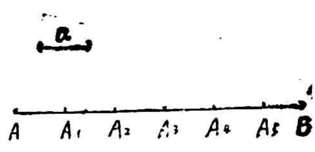

图 1.2

(2)截了 m 次以后，得到了小于a的剩余线段如图1·2中$AB=5a+A_5B$(A_5B小于a)

再用线段a的 $\frac{1}{10}$ 作长度单位来度量剩余线段，这时还会出现上述的两种情况：一种是恰好量尽，这时量数是一个正有限小数；另一种是又出现小于 $\frac{1}{10}a$ 的剩余线段，这样

再用 $\frac{1}{100}a$，$\frac{1}{1000}a$…做长度单位分别去量每次都有剩余部份，其最后结果还是会有两种情况：①某一次恰被量尽②总会有剩余。在总有剩余的这种情况下，所得的量数则可能是正循环小数或正无限不循环小数(即正无理数)。因此我们可以得到下面的结论"用确定长度单位去度量任意线段所得的量数一定是一个确定的正实数"。

2.两条线段的比

在已知两个实数m、n欲求m是n的多少倍或m是n的几分之几．我们就要用n去除m即 $m\div n=\frac{m}{n}$ 所得的商叫做m和n这两个数的比，表达为$\frac{m}{n}$ 或$m:n$，其中m叫比的前项。n叫比的后项，相除所得商叫比值。

这两个数的比的概念可以推广到两条线段的比，我们知道要量一条线段的长度，要先确定长度单位，例如我们用1厘米的线段为长度单位，来度量两条线段AB、CD所得的量数分别是15和8，那末就可得到$AB:CD=15:8$或 $\frac{AB}{CD}=\frac{15}{8}$。这里$AB$、$CD$分别是比的前项、后项，15、8分别是15∶8这个比的前项、后项，而$1\frac{7}{8}$则是比值。再如上例如果改用1毫米的线段为长度单位来度量这两条线段，那么所得量数的比是：

$$AB:CD=150:80=15:8=1\frac{7}{8}.$$

由上述两个例子可以得出：用同一个长度单位去量两条

线段所得的两个量数的比叫这两条线段的比。也可以看出求两条线段的比与所采用的长度单位没有关系，而且它们的比值总是一个正数。

例 1：在比例尺为 $\frac{1}{100000}$ 的地图上AB 两地的距离是25·4厘米，求AB两地的实际距离？

解法一：设AB两地的实际距离为x公里

$\because 25.4$厘米$=0.000254$公里

$\therefore \frac{0.000254}{x}=\frac{1}{100000}$

$\therefore x=0\cdot000254\times100000=25\cdot4$

答：AB两地实际距离为25·4公里.

解法二：设AB两地的实际距离为x厘米

$$\frac{25.4}{x}=\frac{1}{100000}$$

$\therefore x=2540000$ （答案必须符合实际情况）

答：AB两地实际距离为25·4公里.

例2：延长线段AB到C使$BC=2AB$(图1·3)

求：(1)$AC:AB$、(2)$AB:BC$、(3)$AC:BC$

解：$\because BC=2AB$

$\therefore$ (1)$AC:AB=3:1$

(2)$AB:BC=1:2$

(3)$AC:BC=3:2$

图 1.3

练 习 一

1.已知线段$a=5\ cm$、$b=20mm$求：$\frac{a}{b}=?$

2.反向延长线段AB到C使$AC=AB$.

求（1）$BC:AB$（2）$AB:AC$（3）$AC:BC$.

3.求正方形的一边长与它的对角线的长的比值？（1）用根式表示（2）精确到0.01.

4.求等边三角形的高与边长的比值？

5.求等腰直角三角形斜边上的高与一条直角边的比？

6.两地的实际距离是45000米，画在地图上的距离是5厘米.

（1）求这张地图的比例尺是多少？

（2）若地图上AB两地距离为18厘米，求AB两地的实际距离是多少米？

（3）若CD两地的实际距离是9000米，求画在地图上的距离是多少？

7.求等边三角形的一条中线与一条中位线的比？

8.线段AB被点C分成$AC:CB=3:2$

求（1）AC和AB的比？（2）求AB和CB的比

9.如果线段 $AB=12$厘米，延长AB到C，问延长几厘米后可以得到$AC:BC=5:2$？

10.把一条长56厘米的线段分成$1:2:3$的三段，求每一个分点把全线段分成的两部份的比？

3. 成比例的线段

在算术中我们已经学过关于比例的概念，即：两个数a和b的比，等于另外两个数c和d的比、那么我们说四个数a、b、c、d组成一个比例：$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$或$a:b=c:d$。其中a、d叫比例的外项，b、c叫比例的内项，d叫做a、b、c的第四比例项。在$a:b=$

b:c的比例式中b叫做a和c的比例中项，c叫做a、b的第三比例项。四个数成比例的概念可以推广到四条线段组成比例的概念。

用毫米为长度单位量(图1·4)中两个矩形的长为a和b，宽c和d，得到$a=30$、$b=20$、$c=15$、$d=10$。

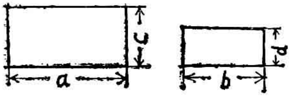

图 1.4

这样，就可以得出：

$$\frac{a}{b}=\frac{30}{20}=1.5;\quad \frac{c}{d}=\frac{15}{10}=1.5$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ 或 } a:b=c:d$$

由此可以得到成比例线段的概念即：

如果线段a和b的比等于线段c和d的比那么这四条线段叫做成比例线段。

例1：如(图1·5)所示三个矩形中，哪两个矩形的长和宽是成比例的线段，其中$AB=6$厘米、$BC=8$厘米、$A'B'=$

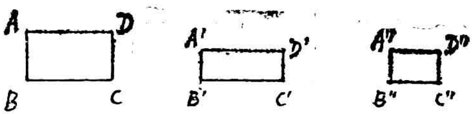

图 1.5

4厘米、$B'C'=8$厘米、$A''B''=4.5$厘米、$B''C''=6$厘米。

解：根据已知条件可以得到：

$$\frac{AB}{A''B''}=\frac{6}{4.5}=\frac{4}{3};\quad \frac{BC}{B''C''}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{AB}{A''B''}=\frac{BC}{B''C''}$$

例2：在图1·6中D、E、F分别是$\triangle ABC$的AB、BC、AC边上的中点。求证：DE、AC、FE、AB是成比例的线段。

已知：D、E、F分别是$\triangle ABC$中AB、BC、AC各边中点.

求证：$\dfrac{DE}{AC}=\dfrac{EF}{AB}$

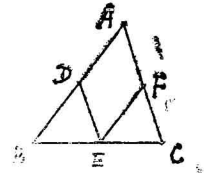

图 1.6

证明：$\because D$、E、F分别是$\triangle ABC$中AB、BC、AC各边中点

$\therefore AC=2DE$、$AB=2EF$

$\therefore \dfrac{DE}{AC}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{EF}{AB}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{DE}{AC}=\dfrac{EF}{AB}$.

4.比例的性质

因为，两条线段的比是用同一长度单位度量所得的量数的比，由于线段成比例是它们的量数所成的比例，所以，关于数的比和比例的各种性质，完全可以适用于线段的比和成比例的线段。

关于数的比和比例有下面一些性质(这里所有的字母都不等于零，以后用于线段时，代表正数).

①比例基本性质

如果$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，那么$ad=bc$；反过来，如果$ad=bc$，那么$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，就是：

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \iff ad=bc}$$

这里符号“$\Leftrightarrow$”表示从左端可以推出右端，并且从右端可以推出左端，读作“等价于”。

证明：$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

在等式两边同乘以bd得：

$$ad=bc$$

反之；a、b、c、d都不等于零，则可以把一个积的两个因式做为外项，另一个积的两个因式做为内项，就可以组成比例。

为了不出错误和得到需要的比例式，在组成比例式时先写出下面形式“$\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$”再按上述原则将$a$、$b$、$c$、$d$添在相应的部份，即已知$ab=cd$可得出 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；$\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ 等八种不同形式的比例式。

根据比例基本性质还可推出以下比例性质定理。

②反比定理

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；那么 $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$。

证明：$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$　$\therefore ad=bc$

把等号两边再除以ac得：

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{a}.$$

③更比定理

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$；那么 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ 或 $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$。

证明：$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{c}{d}\cdot\frac{b}{c} \text{ 或 } \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{a}=\frac{c}{d}\cdot\frac{d}{a}$$

$$\therefore \frac{a}{c}=\frac{b}{d} \text{ 或 } \frac{d}{b}=\frac{c}{a}.$$

④合比定理

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

证明：$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

通分相加得 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

⑤分比定理

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 那么 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

证明：$\because \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

通分相减得 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

⑥合分比定理

如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\neq 1$ 那么 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

证明：$\because \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$

根据合比定理得 $\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{c+d}{d}$ （1）

根据分比定理得 $\dfrac{a-b}{b}=\dfrac{c-d}{d}$ （2）

$\because \dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\neq 1$

$\therefore$（1）÷（2） $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{c+d}{c-d}$

⑦等比定理

如果 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\cdots=\dfrac{m}{n}$

那么 $\dfrac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\dfrac{a}{b}$ $(b+d+\cdots+n\neq 0)$.

证明：设 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\cdots=\dfrac{m}{n}=k$

那么 $a=bk,\ c=dk,\cdots,m=nk$

$$\frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n}=\frac{bk+dk+\cdots+nk}{b+d+\cdots+n}$$

$$=\frac{(b+d+\cdots n)k}{b+d+\cdots+n}=k=\frac{a}{b}.$$

这就是说：几个相等的比的前项之和与后项之和的比等于其中每一个比。

例1. 线段$MN=5$厘米，C是MN上一点，D是MN延长线上一点，且$MC:CN=MD:DN=3:2$求C、D两

点间的距离。（图1·7）

解：设$NC = x$厘米，$MC = (5 - x)$厘米

$\therefore MC : NC = (5 - x) : x = 3 : 2$

$\therefore x = 2 \quad \therefore NC = 2$厘米

设$ND = y$厘米，$MD = MN + ND = (5 + y)$厘米

$\because MD : DN = (5 + y) : y = 3 : 2$

$\therefore y = 10 \quad \therefore ND = 10$厘米

$\therefore CD = NC + ND = 12$厘米。

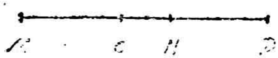

图 1.7

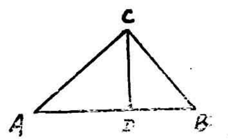

图 1.8

例2.在图1·8中已知 $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{CB}{AC}$

$CB = 3.0$厘米，$BA = 5.6$厘米，$CA = 5.0$厘米

求：BD和AD的长

解：$\because \dfrac{BD}{DA} = \dfrac{CB}{AC}$

由合比定理得：

$$\frac{BD + DA}{DA} = \frac{CB + AC}{AC}$$

即：$\dfrac{BA}{AD} = \dfrac{CB + AC}{AC}$

将$CB = 3.0 \; BA = 5.6 \; CA = 5.0$代入上式得