彭清鵬譯

微分積分學

中華書局印行

原序

鄙人曩者不揣固陋與學友籐田理學士共編初等微分積分學刋以問世數年以來日在學校從事敎授數學相長粗有所得爰更纂述此書以爲初學研究之資

本書以理昭趣博爲主故譬解務求明晰而理論不尙艱深至於應用舉例尤詳末附微分方程式一編更足補尋常微積學書之所未備而爲從事理工學者先路之導學者苟能詳覽而熟習之則窮理致用均可以是爲基倘亦所謂約而易操者歟

日本明治四十一年二月編者識

目　錄

第一編　微分學

第二編　積分學

第三編 微分方程式

微分積分學

第一編

微分學

第一章

學語之說明及極限

1. 函數 有A B兩數若A數變化而B數因之變化且其變化有一定規則者則謂A為B之函數或謂B為A之函數

例如有式 $$A=3B$$

設A為3則B為1 A加5為3+5則B因之變為$\frac{3+5}{3}$其值由一定之規則而變故A為B之函數反之B亦為A之函數又如有

$$A^2=B+7$$

B加6則變為B+6設A變為A_1則

$$A_1^2=B+13$$

而A之値為$\pm\sqrt{B+13}$較前$\pm\sqrt{B+7}$增加或減少兩數之函數關係例以下列各種符號紀之

$$A=F(B) \quad A=f(B) \quad A=\phi(B) \quad A=\psi(B)\ldots\ldots$$

此等符號均取諸函數原語之首一字F為羅馬字ϕ ψ等為希臘字然任取其他文字如

$$B=G(A) \quad B=H(A) \quad B=h(A) \quad B=g(A)\ldots\ldots$$

等亦無不可

如上所舉或置A於括弧內或置B於括弧內毫無差異惟通例各立名稱以為區別如下所述

變數 例如解析幾何學初步所載直線方程式

$$y=mx+K$$

$$\left.\begin{array}{l} m:\text{角係數} \\ K:\text{截片} \end{array}\right\}\text{用直交軸}$$

m與K為決定直線之基礎乃不變之數反之x與y為流通座標y變則x因之而變x變則y亦從之而變二者性質各殊故區別之名x與y為變數名m與K為常數

如上所說凡一式中數値得變者名為變數通例以Alpha-bet之末位文字紀之反之數値不變者以不在末位之文字紀之

以上直線方程式若用函數之形紀之則爲

$$y=f(x)$$

然使變爲　$x=\dfrac{y-K}{m}$　之形

則亦可以下式表之 $x=\phi(y)$

此二函數之形雖異而其關係則相同也

上式 $y=f(x)$ 在以 x 爲標準而表示 y 即 x 變化之時 y 亦從一定之法則而變化也反之 $x=\phi(y)$ 意在以 y 之值爲標準而表示 x 之值此二式形式上相異之所在也

$y=f(x)$ 之式以 x 爲標準而表示 y 故可名 x 爲自變數(自由變動之意) y 爲被變數(因他而變之意)亦可謂 x 爲主變數 y 爲從變數

$x=\phi(y)$ 以 y 爲標準而表示 x 故可稱 y 爲自變數 x 爲被變數

故如前所揭

$$A=F(B)$$

之式中 B 爲自變數 A 爲被變數

$$B=G(A)$$

之式中則 A 爲自變數 B 爲被變數

2. 函數之例

今設x為自變數y為被變數而舉初等程度函數之例如

$$y=x^2 \quad y=4^x \quad y=\log x \quad y=\sin x$$

$$y=2\sqrt{ax} \quad y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

等均是也

設有$y=ax^2+bx+c$之二次三項式其形為$y=f(x)$若使y為自變數則變為

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}$$

3. 函數之分類

(i) 形式上之分類

x與y兩變數結合之關係苟如前2節所示y孤立於左方而等號之右為含x之式則謂y為x之**陽函數**反之如前節最後所示之

$$ax^2+bx+c-y=0 \text{ 或如 } ay^2-2bxy+cx^2+h=0$$

集合於等號之一邊而他一邊為0者則y為x之**陰函數**

此等名稱之區分由於函數形式之差異而於其本來性質無關故可將陽函數變為陰函數又可從陰函數求得陽函數

此等函數例以下式紀之

$$\text{陽函數}: y = f(x)$$

$$\text{陰函數}: f(x,y) = 0$$

(ii)　運算上之分類

x與y集合於等號一邊成$f(x,y)=0$之形此時之關係若爲x與y及常數由加減乘除開方而結合之有限項則名代數函數如下列各式均是

$$y=8x^3-7x^2+16x-13$$

$$y=\frac{3x^2+7x+6}{\sqrt{x+5}+3}$$

$$y=\frac{3x+11}{7x^3+5x-2}$$

$$y=\sqrt{x^2+7}$$

代數函數以外之函數悉名爲超越函數其最簡者如指數函數三角函數及對數函數逆三角函數均是即 $\sin x, \cos x, \tan x \ldots\ldots \sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x \ldots\ldots e^x, \log x \ldots\ldots$ 等是也

4.　極限　例如有等比級數

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots$$

其有限項之和由等比級數之公式可知爲

$$\frac{1-(\frac{1}{2})^{m+1}}{1-(\frac{1}{2})} \quad m\text{項之和}$$

然使問此級數無限項之和爲何數則題意應如何解釋不可不察也

夫誠取無限之項一一相加此窮年累月不得訖事者吾人無由知其結果故所謂無限項之和者不過謂由是遞推其所得可與某數甚相近耳即上式而言相加之次數愈多則其和愈近於2故

$$\frac{1-(\frac{1}{2})^{m}}{1-(\frac{1}{2})}$$

式中m至無限大之時其極限值爲2以下二式紀之

$$Lt_{m=\infty}\frac{1-(\frac{1}{2})^{m}}{1-(\frac{1}{2})}=2 \text{ 又 } Lim_{m=\infty}\frac{1-(\frac{1}{2})^{m}}{1-(\frac{1}{2})}=2$$

Lt 與 Lim 爲意味相同之略字

設有分數

$$\frac{x}{1+x}$$

問 x 增至無限大之時其極限值幾何

依數學之定理凡小於1之分數若分子與分母加同正數則其值較前近於1故上式之 x 漸增則其分數值次第與1相近今爲表示其漸近之形狀將上式變之如次

$$1-\frac{1}{1+x}$$

此時 x 漸增則從1內所減之數漸小至其極限則1與分數之差可至任何小故可書之如次

$$Lt_{x=\infty}\frac{x}{1+x}=1$$

其值之變化情狀如次表

x 之值	分數之值
0	0
1	.5
2	.66....
3	.75
4	.8
5	.833....
9	.9
99	.99
999	.999
9999	.9999
.....	.....

玆更就三角函數說明之設有下式

$$\frac{\sin\theta}{\theta}\qquad \theta:\text{用弧度法}$$

θ漸次減少之時其分數值漸次近於1此由初等三角之圖解所知也

今將$\sin\theta$以θ展開之則

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{\lfloor 3}+\frac{\theta^5}{\lfloor 5}-\frac{\theta^7}{\lfloor 7}+\cdots\cdots$$

故

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=1-\frac{\theta^2}{\lfloor 3}+\frac{\theta^4}{\lfloor 5}-\frac{\theta^6}{\lfloor 7}+\cdots\cdots$$

可見θ愈小則右邊愈近於1

以極限之記號紀之則

$$Lt_{\theta=0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

由以上例解可知極限之意味玆括而言之如下

極限之定義　函數之自變數接近於一定值(或無限大)之時其函數值與某一定值之差得至任何小則此定值爲是時函數值之極限

例如

$$\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^m}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$$

m為自變數其一定值為∞則函數之極限值為2

如
$$\frac{x}{1+x}$$

x為自變數其一定值為∞函數之極限值為1

如
$$\frac{\sin\theta}{\theta}$$

θ為自變數其一定值為0函數之極限值為1

5. 極限值之例解

(1)
$$Lt_{x=\infty}\frac{2x+1}{5x+3}$$

假如x為∞則分母子均為∞似不能求其比然使其分母子為∞之情狀不同(即如前節所云其為∞之遲速有異)則亦可由問題而決定其比

試將上式用除法求之則得式如次

$$\begin{array}{r|l|l} 5x+3 & 2x+1 & \frac{2}{5} \\ & 2x+\frac{6}{5} & \\ \cline{2-2} & -\frac{1}{5} & \end{array}$$

其商為$\frac{2}{5}-\frac{\frac{1}{5}}{5x+3}$於其商式之中設$x=\infty$則得極限值為$\frac{2}{5}$

$$Lt_{x=\infty}\frac{2x+1}{5x+3}=\frac{2}{5}$$

通例將分母子各以x除之得

$$\frac{2+\frac{1}{x}}{5+\frac{3}{x}}$$

設$x=\infty$可知其極限值為$\frac{2}{5}$

(2) $$Lt_{x=2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

設$x=2$則分母子均為0似不能決其值然其值別有在即其分母子接近於0之遲速不等也試實行除法則得$x+2$故$x=2$之時其值為4

是其分數實際為4但由於分母子均以0乘之故一見如不定耳

通例
$$\frac{x^2-4}{x-2}=(x+2)\frac{x-2}{x-2}=x+2$$

$$\therefore\quad Lt_{x=2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

(3) $$Lt_{x=2}\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$$

因
$$\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}=\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+5)}$$

$$\therefore\quad Lt_{x=2}\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}=Lt_{x=2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(x+5)}$$

$$=Lt_{x=2}\frac{x-3}{x+5}=-\frac{1}{7}$$

(4) $$Lt_{x=\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}$$

$$\frac{\tan x}{\sec x}=\frac{\sin x}{\cos x}\cos x=\sin x$$

$$\therefore\quad Lt_{x=\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{\sec x}=Lt_{x=\frac{\pi}{2}}\sin x=1$$

申言之$\tan x$爲無限大之遲速與$\sec x$爲無限大之遲速相等也

(5) $$Lt_{x=\infty}\frac{2x^2+5x+4}{8x+3}$$

實行除法則得

$$\begin{array}{r|l|l}
8x+3 & 2x^2+5x+4 & \dfrac{x}{4}+\dfrac{17}{32} \\
 & 2x^2+\dfrac{3x}{4} & \\
\hline
 & \dfrac{17}{4}x+4 & \\
 & \dfrac{17}{4}x+\dfrac{51}{32} & \\
\hline
 & \dfrac{77}{32} &
\end{array}$$

$$\therefore \text{分數之值}=\frac{x}{4}+\frac{17}{32}+\frac{\frac{77}{32}}{8x+3}$$

$x=\infty$ 之時其值增大至 ∞ 無相近之一定值

或

$$Lt_{x=\infty}\frac{2x^2+5x+4}{8x+3}=Lt_{x=\infty}\frac{2x+5+\frac{4}{x}}{8+\frac{3}{x}}=\infty$$

即分子為 ∞ 之遲速較之分母為 ∞ 遲速大至無限也

(6) $$Lt_{x=\infty}\sqrt[x]{3}$$

此式改為$3^{\frac{1}{x}}$則因x增大而$\frac{1}{x}$近於0故$x=\infty$之極限為$3^{0}=1$故所要之答為1而

$$Lt_{x=\infty}\sqrt[x]{3}=1$$

更借對數式證明之

$$y=3^{\frac{1}{x}}$$

$$\log y=\frac{1}{x}\log 3$$

$$\therefore\quad Lt_{x=\infty}\log y=\log 3\left(Lt_{x=\infty}\frac{1}{x}\right)=0$$

$$\therefore\quad Lt_{x=\infty}y=e^{0}=1$$

(7) $$Lt_{x=\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

x增大至無限之時若極限值存在則設想x恒為正整數而增大於極限值亦毫無影響故由正整數冪之二項法定理得