叶伯诚　孙庆元　赵兴乐　主编
莫　叶　　　　　袁益让　主审

高等专科学校教学用书

高等数学

下　册

天津教育出版社

高 等 数 学

下 册

主　编　叶伯诚　孙庆元　赵兴乐
副主编　陈　鹏　江占文　李光芹
杨资付　姚克澜

天津教育出版社
1989·天津

内 容 提 要

本书主要依据1989年国家教委颁布的师专物理专业用《高等数学》教学大纲，并参考化学、生物、地理和高等工业专科各专业的《高等数学》教学大纲编写而成. 上册包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分，微分方程、无穷级数共七章，下册包括空间解析几何、多元函数的微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、矢量分析与场论初步、线性代数共六章. 内容具有叙述严谨、简明，系统完整，注重各专业的实用性，习题数量适当，深度适宜等优点. 书后附有习题答案，供参考。

此书可作为师专、教育学院、职大、电大、夜大、成人函授的物理、化学、生物、地理等理科专业和机械、电力、电子、化工等大专工科各专业的高等数学教材或参考书.

高 等 数 学
（下 册）
叶伯诚　孙庆元　赵兴乐　主编
•
天津教育出版社出版
（天津市湖北路27号）
太安师专印刷厂印刷
•
850×1168毫米 32开 12印张 301千字
1989年10月第1版 1989年10月第1次印刷
印数 1—8500
ISBN 7—5309—0887—1/O·6
定价 4.80元

序

在教学工作中采用一套合适的教材，对于提高教师的课堂教学效果是极为重要的，同时也使学生便于课前预习，课后复习练习，更能大大地提高学生的学习效果．由赵兴乐、叶伯诚、孙庆元等同志主编的《高等数学》（上、下册），作为师专等院校、理工科各专业的高等数学教材，内容符合1989年国家教委颁布的教学大纲．叙述详细，语言通畅，定理的证明选择恰当，理论联系各专业实际，并附有大量例题与习题，是一套合用的教材．编者积累了多年教学经验，编成此书，直接为教学服务，值得鼓励，特为序．

山东大学数学系　莫叶　袁益让

1989．7．

前 言

《高等数学》(上、下册)主要依据1989年国家教委颁发的师专物理专业用《高等数学》教学大纲，并参考化学、生物、地理和高等工业专科各专业的《高等数学》教学大纲，由全国部分师专和工业专科有多年教学经验的教师共同编写而成。上册包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、微分方程、无穷级数共七章；下册包括空间解析几何、多元函数的微分法、重积分、曲线积分与曲面积分、矢量分析与场论初步、线性代数共六章。可作为师专、教育学院、职大、电大、夜大、成人函授的物理、化学、生物、地理等理科专业和机械、电力、电子、化工等高等工业专科学校的高等数学教材或参考书。

本书突出的特点是简明.根据物理、化学、生物、地理和高等工业专科各专业对数学的需要,精选高等数学内容,概念、定律叙述简明、严谨，简化繁琐推导，注重叙述和应用，体系系统完整。第二个特点是实用性。数学概念尽量由各专业的实际问题引入，加强在各专业上的应用叙述。各专业的典型问题选作例题和习题，所涉及的各专业量的单位均采用国际单位制。例题较多也是本书的一个特点。习题数量适当，深度适宜，且与内容配合紧密。每节后有习题，每章后的小结和复习题供复习用。书后附有习题答案，供参考。

此书可以按顺序讲授；也可以择出第八章和第十三章作为《空间解析几何与线性代数》一门课单独讲授，其余部分即为《数学分析》课，不影响内容的系统性。

参加编写的有（按姓氏笔划）方汉文（宜春师专）、王芝威（包头师专）、王宪玉（泰安市委党校）、史元祜（淮南联合大

学）、刘希普（菏泽师专）、叶伯诚（临沂师专）、江占文（佳木斯师专）、孙庆元（泰安师专）、阎秀忠（吕梁师专）、李光芹（临沂师专）、邹中柱（怀化师专）、陈鹏（淮南师专）、周长桐（泰安师专）、杨资付（西安师专）、赵兴乐（泰安师专）、祝淑媛（宿州师专）、姚克澜（九江师专）、胡雄（上饶师专）、曹朴（南阳师专）、薛敬德（电视大学淮南分校）。副主编各统部分书稿，主编统定全书。

山东大学莫叶教授、袁益让教授主审全书，提出许多宝贵意见，还为本书写了《序》，我们表示衷心的感谢。

由于编写仓促，书中不当之处难免，恳请读者指正，以便今后修订再版。

编者　1989．7．

目　录

第八章　空间解析几何

§8.1　矢量代数初步

一、空间直角坐标系

1．空间直角坐标系　为确定空间中一点的位置，先要建立空间直角坐标系，然后据此建立点与实数组间的对应关系．

两两相互垂直，且具有公共原点的三条数轴就构成了空间直角坐标系．如图8.1所示，公共原点O称为坐标系的原点，简称为坐标原点．三条数轴依次称为x轴（横轴）、y轴（纵轴）和z轴（竖轴），统称为坐标轴．它们的正方向一般应符合右手法则，即若拇指和食指分别指向x轴和y轴的正向时，则中指所指的方向为z轴的正向．每两条坐标轴所确定的平面，称为坐标平面，如x轴与y轴确定xOy平面，y轴和z轴确定yOz平面，z轴和x轴确定zOx平面．三个坐标面将空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限．坐标面内的点不属于任何卦限．八个卦限的编号如图8.2所示．

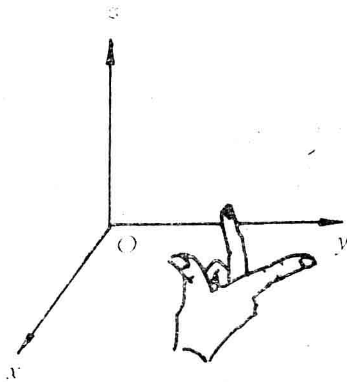

图　8.1

设M为空间一点，过M点作三个平面分别与x轴、y轴、z轴垂直于A、B、C三点，如图8.3．A、B、C三点在x轴、y轴、z轴上的坐标x、y、z，分别称为M点的横坐标、纵坐标和竖坐标．因

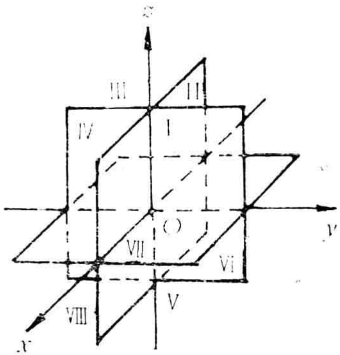

图 8.2

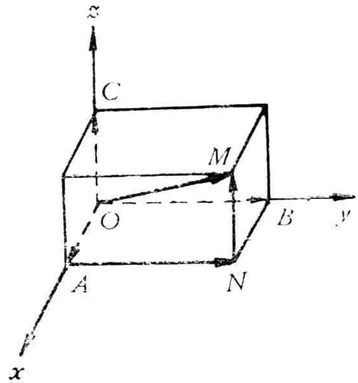

图 8.3

此，对于空间任意一点M，可唯一确定有序实数组（x,y,z），并称之为M点的坐标。

反之，对于已知的有序实数组（x,y,z），依次在x轴、y轴、z轴上取坐标为x、y、z的三点A、B、C. 过此三点分别作垂直于所在坐标轴的平面，则它们相交于唯一的点M.

可见，建立空间直角坐标系以后，空间中的点与有序实数组具有一一对应关系。

2．空间两点间的距离 设$M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$为空间两点，分别过点M_1、M_2作垂直于xOy平面的垂线，设垂足分别为$P(x_1,y_1,0)$，$Q(x_2,y_2,0)$. 再分别过

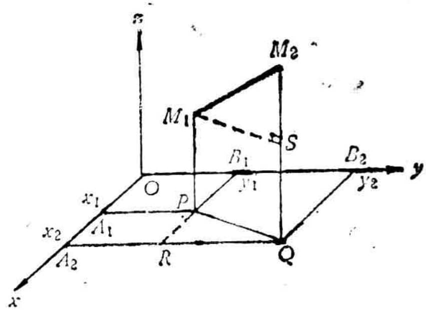

图 8.4

点P、Q作x轴和y轴的垂线PA_1，PB_1；QA_2，QB_2；如图8.4. 设

B_1P 与 QA_2 交于点 R，连接 PQ 并过点 M_1 作 $M_1S \perp M_2Q$ 交 M_2 于点 S。于是有，$|PR|=|x_2-x_1|$，$|QR|=|y_2-y_1|$，$|M_1S|=|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，而 $|M_2S|=|z_2-z_1|$，由直角三角形 M_1SM_2，得

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{|M_1S|^2+|M_2S|^2}$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1)$$

这就是空间两点间的距离公式。

例 1　求点 $M(3,-4,1)$ 到 y 轴的距离。

解　过 M 作 y 轴的垂线，垂足 B 的坐标为 $(0,-4,0)$. $|MB|$ 就是点 M 到 y 轴的距离 d，故得

$$d=|MB|=\sqrt{(3-0)^2+[-4-(-4)]^2+(1-0)^2}=\sqrt{10}.$$

二、矢量概念

在生产实践和科学技术领域中，我们所遇到的量，一般可分为数量和矢量两种。仅用数值确定的量叫数量，如长度、面积、体积、质量、温度、密度等。还有一种量除了数值大小外，还必须指出其方向才能确定，如力、位移、速度、加速度等，这种既有大小又有方向的量称为矢量或向量。

矢量通常用一条有向线段来表示。线段的长度表示矢量的大小，叫做矢量的长度或模；从 A 到 B 箭头所指的方向表示矢量的方向。如图8.5中矢量记作 $\overrightarrow{AB}$，A 叫做矢量的起点，B 叫做终点。为书写简便，有时只用一个小写字母表示，如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 等。印刷时常用不带箭头的黑体字母表示，如 **a**、**b** 等。矢量的模记作 $|\mathbf{AB}|$ 或 $|\mathbf{a}|$。

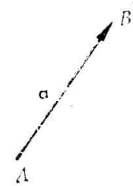

图　8.5

模等于 1 的矢量叫做单位矢量。与矢量 **a** 具有同一方向的单位矢量叫做矢量 **a** 的单位矢量，并记作 $\mathbf{a}^0$。

模等于零的矢量叫做零矢量，零矢量的始点与终点重合，而

方向是不确定的．零矢量记作 **0**．

空间任意两个矢量，当它们的模相等且方向相同时叫做相等矢量．若矢量**AB**和**CD**相等，可记作**AB**＝**CD**（图8.6）．一个矢量在不改变它的长度和方向的前提下，可在空间自由移动，称之为自由矢量．

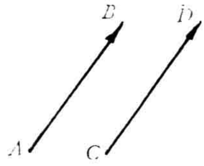

图 8.6

两个模相等、方向相反的矢量叫做相反矢量．矢量**a**的相反矢量用－**a**表示．

两个矢量，若它们位于平行直线上（特别地在一条直线上）叫做共线矢量．平行于同一平面（特别在同一平面上）的矢量叫做共面矢量．

始点在原点的矢量**OM**，可确定M点位置，叫做M点的位置矢量或称矢径．

三、矢量的线性运算

1．矢量的加法与减法　根据物理学中力、速度和加速度的合成法则，定义两个矢量的和如下．

已知两矢量**a**和**b**，任选一点O，作 **OA**＝**a**，**OB**＝**b**，则以**OA**和**OB**为邻边的平行四边形对角线矢量**OC**＝**c**为矢量**a**与**b**的和矢量，记作

$$\mathbf{OA}+\mathbf{OB}=\mathbf{OC},\quad 即\quad \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}.$$

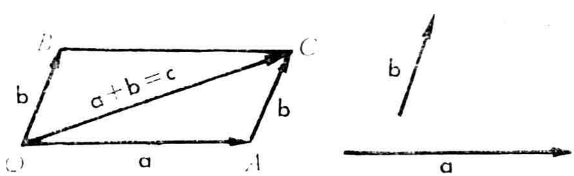

图 8.7

此为矢量加法的平行四边形法则（图8.7）．根据平行四边形

性质，由图8.7可知，$\mathbf{AC}=\mathbf{OB}$，于是可得矢量加法的三角形法则：作$\mathbf{OA}=\mathbf{a}$，以$\mathbf{OA}$终点A为起点，作矢量$\mathbf{AC}=\mathbf{b}$，连接O、C所得矢量$\mathbf{OC}=\mathbf{c}$，就是矢量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$之和.

矢量加法有下列运算律：

(1)交换律　$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$；

(2)结合律　$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$.

由图8.8可知等式两边相加结果相同. 如

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=(\mathbf{OA}+\mathbf{AB})+\mathbf{BC}=\mathbf{OB}+\mathbf{BC}=\mathbf{OC}$$

$$\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{OA}+(\mathbf{AB}+\mathbf{BC})=\mathbf{OA}+\mathbf{AC}=\mathbf{OC}$$

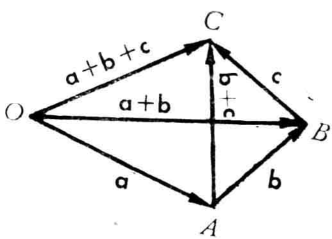

图　8.8

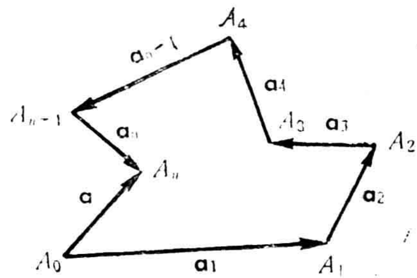

图　8.9

由矢量加法的交换律和结合律，可得任意有限个矢量相加的多边形法则：要求矢量$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、$\cdots\mathbf{a}_n$之和，可将$\mathbf{a}_2$始点平移至$\mathbf{a}_1$终点；继而将$\mathbf{a}_3$始点平移至$\mathbf{a}_2$终点，依此类推直到矢量$\mathbf{a}_n$为止. 此时第一个矢量始点至最后一个矢量的终点的矢量即为矢量$\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、$\cdots$、$\mathbf{a}_n$之和（图8.9），

记作　$$\mathbf{a}=\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n.$$

若最后一个矢量终点与第一个矢量始点重合，则和矢量为零矢量，

即　$$\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n=\mathbf{0}.$$

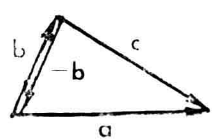

图　8.10

矢量的减法是矢量加法的逆运算. 如图8.10，$\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$ 叫矢量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$之差，由此得差

矢量的作图法：先将矢量a与b平移至同一始点，然后从“减矢量”b的终点到“被减矢量”a的终点所作矢量，就是差矢量a－b。

利用相反矢量，可将矢量减法转化为矢量加法。由图8.10可知，减去一矢量等于加上其相反矢量，

即 $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

同理有 $\mathbf{a}-(-\mathbf{b})=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

例2 试证对角线互相平分的四边形是平行四边形。

证 设四边形$ABCD$的对角线AC、BD交于点O且互相平分（图8.11），由图可见

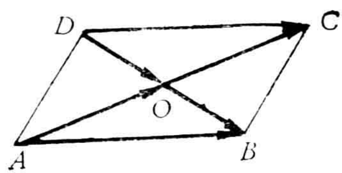

图 8.11

$$\mathbf{AB}=\mathbf{AO}+\mathbf{OB}=\mathbf{OB}+\mathbf{AO}=\mathbf{DO}+\mathbf{OC}=\mathbf{DC},$$

即 $\mathbf{AB}=\mathbf{DC}$ 由矢量相等可知 $\mathbf{AB}\parallel\mathbf{DC}$，且 $|\mathbf{AB}|=|\mathbf{DC}|$，故四边形$ABCD$为平行四边形。

2．数乘矢量 实数λ与矢量a乘积是一矢量，记作$\lambda\mathbf{a}$，它的模是$|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|$；它的方向，当$\lambda>0$时与a相同，当$\lambda<0$时与a相反，当$\lambda=0$时，因$|\lambda\mathbf{a}|=|\lambda||\mathbf{a}|=0$，所以$\lambda\mathbf{a}=\mathbf{0}$，方向不确定。

特别当$\lambda=-1$时，$\lambda\mathbf{a}=(-1)\mathbf{a}$为a的相反矢量，记作$-\mathbf{a}$．

若已知矢量a与它的单位矢量$\mathbf{a}^0$，

则有 $\mathbf{a}=|\mathbf{a}|\mathbf{a}^0$ 或 $\mathbf{a}^0=\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$.

同样可推知，当a、$\mathbf{b}\neq 0$，数$\lambda\neq 0$，若有$\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$，则$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$；反之，若$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$，则存在实数$\lambda$，使得$\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$。

数乘矢量满足下列运算律：

结合律 $\lambda(\mu\mathbf{a})=\mu(\lambda\mathbf{a})=(\lambda\mu)\mathbf{a}$；

分配律 $(\lambda+\mu)\mathbf{a}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$, $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$.

其中λ和μ为实数，证明从略。

例 3 已知$\triangle ABC$三边中点分别为D、E、F，求$\mathbf{AD}+\mathbf{BE}+\mathbf{CF}=$？

解 设$\mathbf{BC}=\mathbf{a}$，$\mathbf{CA}=\mathbf{b}$（图8.12），则

$$\mathbf{CE}=\frac{1}{2}\mathbf{CA}=\frac{1}{2}\mathbf{b},\ \mathbf{BE}=\mathbf{BC}+\mathbf{CE}=\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b},$$

$$\mathbf{AD}=\mathbf{CD}-\mathbf{CA}=-\mathbf{DC}-\mathbf{CA}=-\frac{1}{2}\mathbf{BC}-\mathbf{CA}=-\frac{1}{2}\mathbf{a}-\mathbf{b},$$

$$\mathbf{CF}=\mathbf{CA}+\mathbf{AF}=\mathbf{b}+\frac{1}{2}\mathbf{AB}=\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{BA}$$

$$=\mathbf{b}-\frac{1}{2}(\mathbf{BC}+\mathbf{CA})=\mathbf{b}-\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

$$=\frac{1}{2}\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{a},$$

故 $\mathbf{AD}+\mathbf{BE}+\mathbf{CF}=(-\frac{1}{2}\mathbf{a}-\mathbf{b})+(\mathbf{a}+\frac{1}{2}\mathbf{b})+(\frac{1}{2}\mathbf{b}-\frac{1}{2}\mathbf{a})=\mathbf{0}$.

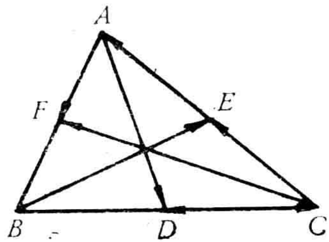

图 8.12

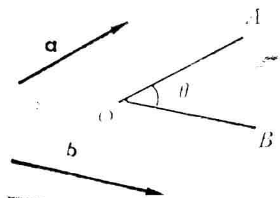

图 8.13

3．矢量在轴上的投影　设$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$为空间两个非零矢量，任选空间一点O，作$\mathbf{OA}=\mathbf{a}$，$\mathbf{OB}=\mathbf{b}$，称射线OA与OB构成的介于0至π间的角为二矢量$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$的 夹 角， 记 作 $\theta=(\mathbf{a},\mathbf{b})$（如图8.13），$0\leqslant\theta\leqslant\pi$．若$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$共线且同向，则$(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$；若反向，则$(\mathbf{a},\mathbf{b})=\pi$；若$\mathbf{a}$与$\mathbf{b}$不共线（不平行），

则有 $$0<(\mathbf{a},\mathbf{b})<\pi.$$

类似地，可规定非零矢量与一轴的夹角或两根轴间的夹角.

已知空间一点A与一轴l，过点A作垂直于轴l的平面α，则称平面α与轴l的交点A'为点A在轴l上的投影（射影），轴l称为投影轴（图8.14）.

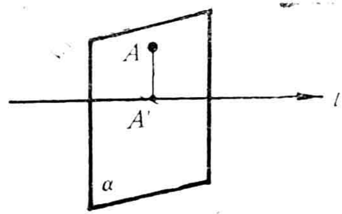

图 8.14

设矢量$\mathbf{AB}$的始点A与终点B在轴l上的投影分别为点A'与B'，则称矢量$\mathbf{A'B'}$为矢量$\mathbf{AB}$在轴l上的投影矢量，投影矢量$\mathbf{A'B'}$对轴l的代数值叫做矢量$\mathbf{AB}$在轴l上的投影，记作$\mathrm{Prj}_l\mathbf{AB}$（图8.15）.

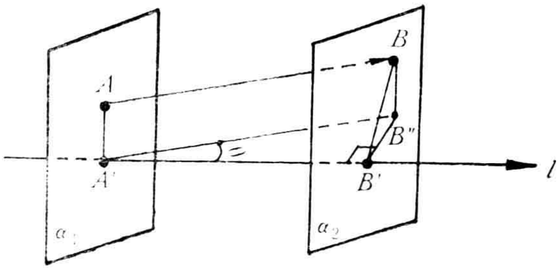

图 8.15

定理 1 矢量$\mathbf{AB}$在轴l上的投影等于矢量$\mathbf{AB}$的模乘以$\mathbf{AB}$与l夹角的余弦

$$\mathrm{Prj}_l\mathbf{AB}=|\mathbf{AB}|\cos(\mathbf{AB},\mathbf{l}). \tag{2}$$

证 如图8.15，$A'B'$为$\mathbf{AB}$在轴l上的投影，过点A'作$\mathbf{A'B''}\parallel\mathbf{AB}$，交平面$\alpha_2$于$B''$点，连$B'$与$B''$. $\mathbf{A'B''}$与l交角θ就是$\mathbf{AB}$与l的交角. 因$A'B'\perp\alpha_2$，所以$A'B'\perp B'B''$. 又因为$\mathbf{AB}$与$\mathbf{A'B''}$平行且相等，故$\mathbf{AB}=\mathbf{A'B''}$，所以

$$\mathrm{Prj}_l\mathbf{AB}=A'B'=|\mathbf{A'B''}|\cos\theta=|\mathbf{AB}|\cos(\mathbf{AB},\mathbf{l}).$$

定理 2 几个矢量的和矢量在轴l上的投影等于各个矢量在轴l上投影之和，即

$$\mathrm{Prj}_l(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\cdots+\mathbf{a}_n)=\mathrm{Prj}_l\mathbf{a}_1+\mathrm{Prj}_l\mathbf{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_l\mathbf{a}_n.$$

证明从略.

这两个定理通常称为投影定理.

4. 矢量的坐标表示　在空间直角坐标系$O-xyz$中，沿x轴、y轴、z轴的正向依次取单位矢量，记作$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$，称为基本单位矢量. 设空间任一给定矢量$\mathbf{a}$，通过平行移动，可将始点放在坐标原点O，作$\mathbf{OM}=\mathbf{a}$，设终点M的坐标为(x,y,z). 过M点作垂直于x、y、z轴的平面，垂足分别为A、B、C，如图8.16. 由矢量加法的多边形法则可知

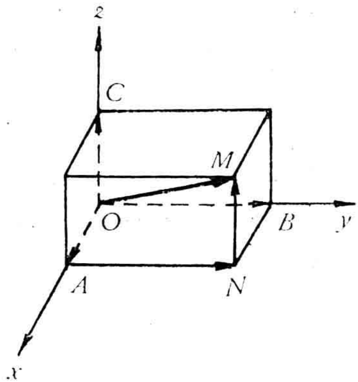

图　8.16

$$\mathbf{OM}=\mathbf{OA}+\mathbf{AN}+\mathbf{NM}.$$

因$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$是沿坐标轴正向的基本单位矢量，

故有
$$\mathbf{OA}=x\mathbf{i},\ \mathbf{OB}=y\mathbf{j},\ \mathbf{OC}=z\mathbf{k}.$$

这三个矢量称为矢量$\mathbf{a}=\mathbf{OM}$在坐标轴上的矢量，其中，x、y、z就是矢量$\mathbf{a}$在坐标轴上的投影，它们也就是点M的三个坐标，

于是
$$\mathbf{a}=\mathbf{OM}=\mathbf{OA}+\mathbf{OB}+\mathbf{OC}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}.$$

有时简记作$\mathbf{a}=\{x,y,z\}$，而称x、y、z为矢量$\mathbf{a}$的三个坐标. 由此可见，当矢量$\mathbf{a}$的始点在坐标原点时，矢量的坐标与其终点的坐标是相同的. 空间每一点都对应着以此点为终点的一个矢径（起点在原点）. 有了上述矢量的坐标表示法，今后凡是对矢量的运算可通过它的坐标间的代数运算来进行. 设λ为一实数，矢量

$$\mathbf{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\ \mathbf{b}=\{b_1,b_2,b_3\},$$

即
$$\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k},\ \mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k},$$

则由矢量加、减法和数乘矢量运算律，