现代数学基础

36 索伯列夫空间

王明新

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

现代数学基础

36

索伯列夫空间

■ 王明新

SUOBOLIEFU KONGJIAN

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书作为一本研究生教材或参考书，较系统地介绍了各向同性的整指数（整数阶）索伯列夫（Sobolev）空间，实指数（分数阶）Sobolev 空间，关于 x 与 t 异性的 Sobolev 空间，Morrey 空间、Campanato 空间和BMO 空间。书中内容深入浅出，文字通俗易懂，并配有适量难易兼顾的习题。

本书可作为微分方程、动力系统、泛函分析、计算数学与相关理工科专业研究生的教材和教学参考书，亦可作为数学、工程等领域的青年教师和科研人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

索伯列夫空间 / 王明新编著 . — 北京 : 高等教育出版社，2013.5

ISBN 978-7-04-037037-9

Ⅰ. ①索… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①索伯列夫空间 – 研究生 – 教材 Ⅳ. ① O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 041470 号

策划编辑	赵天夫	责任编辑	赵天夫	封面设计	赵　阳	版式设计	马敬茹
责任校对	胡晓琪	责任印制	毛斯璐				

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京中科印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm× 1092 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	15.75	版　　次	2013 年 5月第 1 版
字　　数	240 千字	印　　次	2013 年 5月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	49.00 元

物 料 号　37037-00

前言

作为一本研究生教材或教学参考书, 本书较系统地介绍了各向同性的整指数(整数阶)索伯列夫(Sobolev)空间, 实指数 (分数阶) Sobolev 空间, 关于 x 与 t 异性的 Sobolev 空间, Morrey 空间、Campanato 空间和 BMO 空间.

Sobolev 空间是由多个实变量弱可微函数组成的一些特殊可积空间的统称, 它们都是 Banach 空间. 虽然这些空间的原型早已出现, 但对其进行系统研究并使之成为一套理论, 是 20 世纪 30 年代初由苏联数学家 S. L. Sobolev 完成的. Sobolev 空间理论不但是一个非常有趣的数学分支, 其重要性是它在其他数学分支中的应用. 它不仅是偏微分方程近代理论的基础, 也是与分析学相关的其他数学分支的重要基础和必备工具, 是与分析学相关的各研究方向的研究生必修课.

所谓 Sobolev 空间理论, 就是研究这些函数空间的基本性质: 自反性、可分性、稠密性 (逼近)、延拓、嵌入定理、内插不等式和边界迹(迹定理), 而嵌入定理则是其核心内容.

本书的定位是为研究生和青年学者提供一本 Sobolev 空间理论的基础教材和参考书, 力求用较短的篇幅, 集中介绍那些业已证明的最常用而又最重要的内容. 由于偏微分方程是推动 Sobolev 空间理论

发展的主要动力, 本书的选材侧重于在偏微分方程的研究中应用较多的内容. Sobolev 空间有许多重要的推广, 除了第四章的 Morrey 空间、Campanato 空间和 BMO 空间之外, 本书没有涉及 Sobolev 空间的其他推广, 如 Lions 的迹空间、Besov 空间、Orlicz 空间、Orlicz-Sobolev 空间、BV 空间、Lorentz 空间等. 有兴趣的读者可以参见 R. A. Adams 的专著 [1] 及 R. A. Adams 和 J. J. F. Fournier 的专著 [2].

本书的第一章是预备知识. 首先介绍若干记号和几个重要的初等不等式. 由于 L^p 空间和 Hölder 空间是两个最简单和最基本的 Sobolev 空间, 也是建立其他类型的 Sobolev 空间的基础, 所以在 1.3 节和 1.4 节, 我们复述这两个空间的基本性质. Sobolev 空间中许多重要性质 (估计, 不等式等) 的推导, 大多都是先针对 "性质较好" 的函数 (光滑函数), 而后利用逼近 (稠密性) 过渡到原来的函数, 因而逼近是 Sobolev 空间研究中的一个常用方法. 把一个函数磨光, 是用光滑函数逼近一般可积函数的有效途径. 本章的 1.5 节介绍磨光函数及其性质. 截断方法是把问题局部化的一个重要手段, 它既能有效地保留原问题的局部性质, 又能避免邻域外各种因素的影响. 把问题局部化以后, 往往还需要把局部结果整合以得到整体结果, 而单位分解就是整合局部到整体的一个重要方法. 在第 1.7 节, 我们介绍截断与单位分解. Sobolev 空间中出现的导数几乎都是弱导数, 这是一种介于古典导数与广义导数之间的一种导数, 也是古典导数的推广. 在本章的最后一节, 我们介绍弱导数及其基本性质.

第二章是各向同性的整指数 (整数阶) Sobolev 空间, 这是 Sobolev 空间理论的最基本部分. 学完本章, 读者就可以了解该理论的基本思想和方法. 为了便于讲授和学习, 在不影响其基本思想的前提下, 我们只对 "适当好" 的开集的情况 (边界有适当的光滑性, 有时还要求是有界的, 甚至要求是有界区域), 给出每个定理的严格证明. 对于一般情况以及嵌入定理的反例, 单独作为一节, 只列出主要结果而省略了证明过程.

本章首先介绍各向同性的整指数 Sobolev 空间的定义和初等性质. 前面已经提到, 逼近是 Sobolev 空间中的常用手法, 在第 2.2 节, 我们根据集合的性质, 借助于磨光介绍三种逼近. 我们知道, 一个函数如果能够用 C_0^∞ 函数来逼近, 那么研究起来就非常方便, 很多经典的分析工具都可以被利用. 对于开集 Ω, 一般而言 $\mathring{W}_p^k(\Omega) \neq W_p^k(\Omega)$, 因此 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数不一定能用 $C_0^\infty(\Omega)$ 函数来逼近. 但是我们知道 $\mathring{W}_p^k(\mathbb{R}^n) = W_p^k(\mathbb{R}^n)$, 所以 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 中的函数可以用 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数来逼近. 因而, 能否把 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数延拓到 $\mathbb{R}^n$ 使之属于 $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ 并保留其原有性质, 成为非常关键的技术问题. 在第 2.3 节我们详细介绍这种延拓方法. 给定一个函数 $u \in C(\overline{\Omega})$, 我们知道 u 在 $\partial\Omega$ 上的值. 给定一个函数 $u \in W_p^k(\Omega)$ $(k \geqslant 1)$, 如何确定 u 在 $\partial\Omega$ 上的值呢? 在函数空间以及偏微分方程的研究中, 通常会涉及 $W_p^k(\Omega)$ 中的函数在 $\partial\Omega$ 上的"广义取值". 这就是我们将在第 2.4 节介绍的边界迹. 在第 2.5 节, 我们介绍空间 $W_p^1(\Omega)$ 的基本性质. 第 2.6 节至第 2.9 节和第 2.11 节是 Sobolev 空间的最核心部分 —— Sobolev 不等式、Poincaré 不等式、嵌入定理和内插不等式, 这是重点讲授的内容. 第 2.10 节继续介绍迹定理, 主要介绍从空间 $W_p^k(\Omega)$ 到 $L^q(\partial\Omega)$ 的嵌入. 在第 2.12 节, 我们给出空间 $H^{-1}(\Omega)$ 的刻画. 第 2.13 节是嵌入定理的补充和反例, 第 2.14 节是空间 $W_p^k(\Omega)$ 的另一个重要性质 —— Banach 代数. 在本章的最后一节, 我们补充介绍几个嵌入常数与集合 Ω 无关的例子.

第三章介绍各向同性的实指数 (分数阶) Sobolev 空间. 先利用 Fourier 变换引入空间 $H^s(\mathbb{R}^n)$, 并介绍其基本性质, 再介绍空间 $H^s(\Omega)$ 和 $W_p^s(\Omega)$. 基本思路和处理方法及途径与第二章相同.

第四章简单介绍 Sobolev 空间的三种推广 —— Morrey 空间、Campanato 空间和 BMO 空间. 它们刻画了 Hölder 连续函数的积分特征, 为研究函数的 Hölder 连续性提供了重要工具.

研究发展方程的解, 需要含有时间 t 的 Sobolev 空间. 一般来说, 在一个发展方程中, 关于空间变量 x 与时间变量 t 的最高阶导数的阶

数是不同的. 因此, 我们不能把 x 和 t 同等看待, 需要引入 x 与 t 异性的 Sobolev 空间. 在第五章, 我们介绍与二阶抛物型方程的研究相关的一类 x 与 t 异性的 Sobolev 空间, 其基本思路和处理方法及途径与第二章相同.

通过本书的学习, 读者不仅可以了解和掌握 Sobolev 空间的基本理论和结果, 为自己今后的学习和研究做好必要的应用知识准备, 同时还可以学习和掌握许多重要的数学思想和技巧.

本书的部分内容参考了国内外出版的一些教材和专著, 请参阅所附的参考文献. 作者用本书的讲义在东南大学、徐州师范大学和哈尔滨工业大学为研究生讲授过多次, 并得到东南大学优秀研究生教学用书建设立项的资助, 同时该课程还被评为东南大学优秀研究生课程. 本书的出版得到国家自然科学基金 (No.11071049) 和哈尔滨工业大学科研基金的资助. 李慧玲博士和陈文彦博士都讲授过本书的讲义, 东南大学、徐州师范大学和哈尔滨工业大学学习该课程的研究生及青年教师, 对本书的初稿都提出了许多宝贵的意见和修改建议, 在此一并致谢. 鉴于作者学识有限, 疏漏和不足之处在所难免, 还望读者予以批评指正.

作 者

2012 年 12 月

现代数学基础　图书清单

注：书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x

	书号	书名	著译者
1	21717-9	代数和编码（第三版）	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析（第二版）	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论（第二版）	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程（第二版）	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 —— 抽象调和分析（第二版）	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步（第三版）	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日] 加藤和也、黒川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日] 黒川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	26547-7	微分方程与数学物理问题	[瑞典] 纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论（第二版）	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西] F. Xavier、潮小李 编著

续表

	书号	书名	著译者
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论 (修订版)	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论——从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林
33	34525-4	现代芬斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新

目录

第一章　预备知识

作为预备知识, 本章介绍若干记号, 几个重要不等式, 空间 $L^p(\Omega)$ 的几个重要性质, Hölder 空间, 函数的磨光, 截断与分解和弱导数.

1.1　若干记号

贯穿本书的始终, 区域这个术语表示连通开集, $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间. 除非特别说明, Ω 总表示 $\mathbb{R}^n$ 中的开集.

用 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的点, 其范数记为 $|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$. 用 $x\cdot y=\sum_{i=1}^n x_iy_i$ 表示 x 与 y 的内积. 通常把 $\mathbb{R}^1$ 简记为 $\mathbb{R}$. 便于应用, 有时也把 $\mathbb{R}^n$ 中的点 x 写成 $x=(x',x_n)$, 其中 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$. 记 $\mathbb{R}_+^n=\big\{x\in\mathbb{R}^n: x_n>0\big\}$, $\overline{\mathbb{R}_+^n}=\big\{x\in\mathbb{R}^n: x_n\geqslant 0\big\}$. 设 $p>0$, 称 $p'=p/(p-1)$ 为 p 的共轭指数.

用符号 "a.e." 表示 "几乎处处", 用符号 "$\forall$" 表示 "任意的" 或 "所有的".

对于给定的 $r>0$ 以及点 x, 记 $B_r(x)$ 是以 x 为球心、以 r 为半径的球. 当 $x=0$ 时, 通常简记 $B_r=B_r(0)$.

给定一个集合 Ω, 用 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界, $\overline{\Omega}=\partial\Omega\cup\Omega$ 表示 Ω 的闭

包, Ω^c 表示 Ω 的余集. 对于点 x 和集合 A, 分别用 $\operatorname{dist}(x,\Omega)$ 和 $\operatorname{dist}(A,\Omega)$ 表示点 x 到集合 Ω 和集合 A 到集合 Ω 的距离:

$$\operatorname{dist}(x,\Omega)=\inf_{y\in\Omega}\|x-y\|,\quad \operatorname{dist}(A,\Omega)=\inf_{x\in A}\operatorname{dist}(x,\Omega).$$

对于 $\varepsilon>0$, 记 $\Omega_\varepsilon=\big\{x\in\Omega:\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)>\varepsilon\big\}$.

对于 $\mathbb{R}^n$ 中的两个集合 A 和 B, 其中 A 是有界集, B 是开集. 如果 $\overline{A}\subset B$, 则称 A 紧包含于 B, 记成$A\Subset B$, 或者 $B\Supset A$.

给定集合 $A\subset\mathbb{R}^n$. 对于向量 (点) $h\in\mathbb{R}^n$ 和子集 $A'\subset A$ 以及定义在 A 上的函数 u, 用 $u^h(x)=u(x+h)$ 表示 u 关于 h 的平移; 用 $u|_{A'}$ 表示 u 在 A' 上的限制. 函数

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

称为集合 A 的特征函数.

假设 Ω 是一个可测集, 用 $|\Omega|$ 表示 Ω 的测度. 对于给定的 $u\in L^1(\Omega)$, 用

$$⨍_\Omega u(x)\mathrm{d}x:=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)\mathrm{d}x$$

表示 u 在 Ω 上的平均. 有时又把 $⨍_\Omega u(x)\mathrm{d}x$ 简写成 u_Ω.

给定一个函数 u, 定义它的正部 $u^+(x)$ 与负部 $u^-(x)$:

$$u^+(x)=\begin{cases}u(x), & u(x)\geqslant 0,\\ 0, & u(x)<0,\end{cases}\qquad u^-(x)=\begin{cases}0, & u(x)>0,\\ u(x), & u(x)\leqslant 0,\end{cases}$$

那么, $u=u^++u^-$, $|u|=u^+-u^-$.

设 Ω 是开集, u 是定义在 Ω 上的函数. 集合

$$\operatorname{spt}\{u\}=\overline{\big\{x\in\Omega:u(x)\neq 0\big\}}$$

称为 u 的支集. 当 $\operatorname{spt}\{u\}\Subset\Omega$ 时, 就称 u 在 Ω 内具有紧支集, 有时也简称 u 具有紧支集.

设 k 是非负整数 (k 也可以是 ∞). 用 $C_0^k(\Omega)$ 表示空间 $C^k(\Omega)$ 中所有具有紧支集的函数构成的集合, 有时也把 $C_0^k(\Omega)$ 写成 $C_c^k(\Omega)$. 再定义空间

$$C_b^k(\Omega)=\left\{u\in C^k(\Omega): D^\alpha u \text{ 在 } \Omega \text{ 内有界}, \forall\ |\alpha|\leqslant k\right\}.$$

设 α_i 是非负整数, $i=1,\cdots,n$, 数组 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 被称为多重指标, 称数 $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ 为 α 的长度. 通常简记

$$\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!.$$

给定两个多重指标 α 和 β. 如果对于所有 $1\leqslant i\leqslant n$, 都有 $\beta_i\leqslant\alpha_i$, 则称 $\beta\leqslant\alpha$. 这时, $\alpha-\beta$ 也是一个多重指标, 并且 $|\alpha-\beta|+|\beta|=|\alpha|$. 当 $\beta\leqslant\alpha$ 时, 简记

$$\binom{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}=\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}.$$

对于 $x\in\mathbb{R}^n$ 和多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, 记 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$, 这是一个次数为 $|\alpha|$ 的单项式. 记 $D_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, 用 $D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n}$ 或者 $\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}$ 表示一个阶数为 $|\alpha|$ 的微分算子. 给定一个函数 u, 导数 $D^\alpha u=\frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}:=\partial^\alpha u$ 称为 u 的 α 阶导数 (如果右端有意义). 对于在 x 附近 $|\alpha|$ 次可微的函数 u 和 v, 下面的 Leibniz 公式成立:

$$D^\alpha(uv)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta uD^{\alpha-\beta}v.$$

对于 $f\in L^p(\Omega)$, $g\in W_p^k(\Omega)$, 通常简记 $\|f\|_{p,\Omega}=\|f\|_{L^p(\Omega)}$, $\|g\|_{k,p,\Omega}=\|g\|_{W_p^k(\Omega)}$. 如果所讨论的问题中集合 Ω 是固定的, 又简记 $\|f\|_p=\|f\|_{L^p(\Omega)}$, $\|g\|_{k,p}=\|g\|_{W_p^k(\Omega)}$.

设 X 是 Banach 空间, X' 是它的对偶空间. 用 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示 X 与 X' 之间的对偶积.

1.2 几个初等不等式

定理 1.2.1 设 $p\geqslant 1$, 那么对于任意的数 a 和 b, 有

$$(|a|+|b|)^p\leqslant 2^{p-1}\big(|a|^p+|b|^p\big). \tag{1.2.1}$$