工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材立项项目

线性代数

赵美霞 ◎ 主编
李昌兴 ◎ 副主编
苟素 柳晓燕 潘芳芳 张小蹦 ◎ 编著

Linear Algebra

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育"十二五"规划教材立项项目

线性代数

赵美霞 ◎ 主编
李昌兴 ◎ 副主编
苟素 柳晓燕 潘芳芳 张小蹦 ◎ 编著

Linear Algebra

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 赵美霞主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2013.2
ISBN 978-7-115-28719-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①线性代数 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第195115号

内容提要

本书按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程（线性代数）教学基本要求”，结合编者多年的教学经验及编写同类教材的体会编写而成。全书共8章，第1章～第5章以线性方程组理论为主线展开，课程的基本内容起点低、坡度适中，与中学新的数学课程标准衔接得较好，其主要内容包括：行列式、矩阵及其运算、线性方程组与向量组的线性相关性、相似矩阵、二次型。在确保教学基本要求的前提下，适当降低了知识难度。第6章线性空间与线性变换是对基本内容的综合应用。第7章通过生动的实例介绍了线性代数在经济管理、工程技术、信息科学等方面的应用。第8章简要介绍了MATLAB软件以及在线性代数中的应用。

本书可作为普通高等院校理工、经管等专业学生的“线性代数”课程教材，也可作为其他非数学类专业学生、在职人员、硕士研究生入学考试备考人员的参考用书。

线性代数

◆ 主　　编　赵美霞
　副 主 编　李昌兴
　编　　著　荀　素　柳晓燕　潘芳芳　张小蹦
　责任编辑　贾　楠

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京昌平百善印刷厂印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：15　　2013年2月第1版
　字数：357千字　　2013年2月北京第1次印刷

ISBN 978-7-115-28719-9

定价：29.80元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前　言

线性代数是高等院校理、工、农、经、管等专业学生必修的一门公共基础课程，是教育部提出的理工科大学生必备的三大数学基础课程之一，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。它的知识已渗透到自然科学、工程技术、经济与社会科学的各个领域，尤其在计算机、通信、电子等学科领域，其重要性和实用性日渐显现。为了适应我国高等教育由“精英教育”转向“大众化教育”的新形势和新特点，按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程（线性代数）教学基本要求”，根据 21 世纪“线性代数”课程教学内容与课程体系改革发展的要求，结合我校教学改革和精品课程建设的经验，满足普通高等院校教学的实际需要，我们编写了本教材。

本书结合编者多年的教学经验及编写同类教材的体会编写而成。在编写过程中，保持了传统线性代数教材结构严谨、逻辑性强等特点，积极吸收国内外同类教材的精华，并融入近年来教学改革的新理念和新成果，在内容选取、结构安排、知识应用等方面做了一些探索。力求做到系统完整、内容简练、语言准确、通俗实用。在内容选取上，严格按照教学大纲的基本要求，以必需、够用为原则；在编排次序上，尽量做到由浅入深，循序渐进，便于自学；在叙述论证上，条理清晰，重点突出，概念讲解详尽，推理简单明了。在保持该课程的系统性和科学性的前提下，适当弱化严格抽象的理论推导，以直观扼要的说明或例证，使学生易于抓住理论推导的基本思路及实质，侧重学生基本能力的培养和提高。本书着重突出以下特色。

1．起点低、坡度适中。第 1 章～第 5 章以学生熟悉的线性方程组理论为主线，展开线性代数课程的基本内容，与中学新的数学课程标准具有较好的衔接。

2．层次分明、内容丰富、适用面宽。第 1 章～第 5 章涵盖了线性代数课程教学基本要求的全部内容，是按照教育部最新制定的“工科类本科数学基础课程（线性代数）教学基本要求”和全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》，结合编者多年在教学实践中积累的经验编写而成的，是理工科、经管类专业学生的必修内容。第 6 章线性空间与线性变换是对基础部分内容的综合应用，可供部分要求较高的专业的学生选学和学有余力学生自学和阅读。第 7 章线性代数应用举例和第 8 章线性代数实验，通过生动的实例介绍了线性代数在经济管理、工程技术、信息科学等方面的应用，并简要介绍了 MATLAB 软件以及在线性代数中的应用。这两章内容可客串到有关章节讲解，也可作为学生的课外阅读材料和科技工作者的实用参考工具。

3．确保基本要求，降低知识难度。在确保本课程的系统性和科学性的的前提下，适当弱化严格抽象的理论推导，在教材编排中尽量使难点分散，使学生通过学习不仅能完全掌握教育部高等教育本科线性代数课程的基本要求，也能掌握教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲中有关线性代数的所有内容，并在核心部分有所展开和加深，为学生进一步深造提供良好的基础。为了既能够有适当的理论深度，又能便于理解，我们对教学难度较大的内容作了适当的处理，例如对于线性相关性这个重要的概念和难点，我们从线性方程组的消元解法及解的判别入手，将判断向量组是否线性相关转化为齐次线性方程组是否有非零解的问题，使它较为具体。对各章内容的许多

细节处理，也是颇有特色的。

4．注重数学思想，突出创新教育，加强实际应用。线性代数中所使用的各种推理方法，公理化定义，抽象化思维，计算与运算技巧及应用能力都很有特色，是其他课程所无法替代的，是提高学生数学素质不可缺少的一环，从具体概念抽象出来的公理化方法以及严谨的逻辑推理、巧妙的数学计算等，对于强化学生的抽象思维，提高人们的逻辑推理能力和计算能力都很有裨益。随着计算机科学的飞速发展和广泛应用，计算机图形学、计算机辅助设计、密码学、虚拟现实等技术都以线性代数为其理论和算法基础的一部分，为分析、解决实际问题提供了强有力的数学工具。本书不但包含了线性代数课程的传统内容，同时为了适应科学技术的发展和读者事业发展的需要，还写进了线性代数应用举例和线性代数实验等方面的内容，以帮助读者掌握现代化科学计算方法。将数学实验融入线性代数教学中，有利于提高学生的综合素质和创新能力，体现了现代教育思想和创新教育的教学理念。

本书共分为 8 章，第 1 章由苟素编写，第 2 章由柳晓燕编写，第 3 章由赵美霞编写，第 4 章和第 5 章由潘芳芳编写，第 6 章由张小蹦编写，第 7 章和第 8 章由李昌兴编写，全书由赵美霞统稿、审定。宋增浩教授仔细阅读了书稿，并提出了许多宝贵的意见和建议。本书在编写过程中，参阅了大量的相关教材和资料，在此谨向有关编者、作者一并表示感谢。

本书可作为普通高等院校理工、经管等专业学生的线性代数课程的教材，也可作为其他非数学类专业学生、在职人员、硕士研究生入学考试备考人员的参考用书。

由于作者水平有限，书中疏漏和不妥之处在所难免，恳请读者指正。

编者

2012 年 6 月

目　录

第 1 章　行列式 ······ 1

§1.1　行列式的概念 ······ 1
1.1.1　二阶与三阶行列式 ······ 1
1.1.2　排列及其逆序数 ······ 4
1.1.3　n 阶行列式的定义 ······ 4
1.1.4　对换 ······ 7
§1.2　行列式的性质 ······ 8
§1.3　行列式按行（列）展开 ······ 14
*§1.4　拉普拉斯定理 ······ 21
§1.5　克拉默法则 ······ 23
习题一 ······ 26

第 2 章　矩阵及其运算 ······ 29

§2.1　矩阵的概念 ······ 29
2.1.1　矩阵的概念 ······ 29
2.1.2　几种常用的特殊矩阵 ······ 30
§2.2　矩阵的运算 ······ 32
2.2.1　矩阵的加法 ······ 32
2.2.2　数乘矩阵 ······ 33
2.2.3　矩阵的乘法 ······ 34
2.2.4　方阵的幂 ······ 37
2.2.5　矩阵的转置 ······ 39
2.2.6　方阵的行列式 ······ 40
§2.3　可逆矩阵 ······ 41
2.3.1　可逆矩阵的概念 ······ 41
2.3.2　可逆矩阵的性质 ······ 44
§2.4　分块矩阵 ······ 45
2.4.1　分块矩阵的概念 ······ 45
2.4.2　分块矩阵的运算 ······ 46
2.4.3　特殊类型的分块矩阵的运算 ······ 49
§2.5　矩阵的初等变换与初等矩阵 ······ 52
2.5.1　矩阵的初等变换与初等矩阵 ······ 52
2.5.2　矩阵的等价 ······ 54
2.5.3　初等变换与初等矩阵的应用 ······ 57
§2.6　矩阵的秩 ······ 60
习题二 ······ 64

第 3 章　线性方程组与向量组的线性相关性 ······ 68

§3.1　线性方程组的消元解法 ······ 68
3.1.1　线性方程组的消元解法 ······ 68
3.1.2　线性方程组解的判别 ······ 70
§3.2　n 维向量及其线性组合 ······ 77
3.2.1　n 维向量及其线性运算 ······ 77
3.2.2　向量组的线性组合 ······ 79
3.2.3　向量组等价 ······ 82
§3.3　向量组的线性相关性 ······ 85
3.3.1　线性相关与线性无关 ······ 85
3.3.2　有关向量线性相关性的定理 ······ 87
§3.4　向量组的秩 ······ 89
*§3.5　向量空间 ······ 93
3.5.1　向量空间的概念 ······ 93
3.5.2　基与维数、向量的坐标 ······ 94
3.5.3　基变换与坐标变换 ······ 96
§3.6　线性方程组解的结构 ······ 98

3.6.1 齐次线性方程组解的结构…99
3.6.2 非齐次线性方程组解的结构……105
习题三……108

第 4 章 相似矩阵……113

§4.1 向量的内积、长度及正交性……113
4.1.1 向量的内积……113
4.1.2 向量的长度和夹角……114
4.1.3 正交向量组……115
4.1.4 正交矩阵……119
§4.2 矩阵的特征值与特征向量……121
4.2.1 矩阵的特征值与特征向量……121
4.2.2 特征值、特征向量的性质……123
§4.3 相似矩阵……125
4.3.1 相似矩阵……125
4.3.2 矩阵的对角化……126
§4.4 实对称矩阵的相似对角化……128
习题四……133

第 5 章 二次型……135

§5.1 二次型及其标准形……135
5.1.1 二次型及其矩阵表示……135
5.1.2 二次型的标准形及矩阵合同……137
5.1.3 化实二次型为标准形……139
§5.2 正定二次型……146
5.2.1 惯性定理……146
5.2.2 正定二次型……147
习题五……150

*第 6 章 线性空间与线性变换……151

§6.1 线性空间的概念和性质……151
§6.2 线性空间的基、维数与向量的坐标……154
§6.3 基变换与坐标变换……156
§6.4 线性变换……160
§6.5 线性变换的矩阵表示……162
§6.6 欧氏空间简介……166
6.6.1 内积及欧式空间的概念……166
6.6.2 规范正交基……168
6.6.3 正交变换……169
习题六……170

第 7 章 线性代数应用举例……172

§7.1 循环比赛名次的确定与城市之间的交通……172
7.1.1 循环比赛名次的确定……172
7.1.2 城市之间的交通问题……174
§7.2 Hill 密码加密和解密……175
§7.3 工资问题与不定方程的整数解…179
7.3.1 工资问题……179
7.3.2 不定方程组的整数解……180
§7.4 投入产出分析……181
§7.5 快乐的假期旅游……185
§7.6 杂交育种的稳定性与从事各行业人员总数的发展趋势……188
7.6.1 杂交育种的稳定性……188
7.6.2 劳动力就业的转移……191
§7.7 小行星的轨道问题……192

第 8 章 线性代数实验……194

实验 1 MATLAB 软件简介……194
实验 2 矩阵与方阵的行列式……206
实验 3 线性方程组与向量组的线性相关性……217
实验 4 特征值与二次型……222

习题答案……225

参考文献……234

第1章 行 列 式

行列式是线性代数中的一个基本概念，其理论起源于解线性方程组，它在自然科学的许多领域都有广泛的应用.本章通过分析二、三阶行列式的特点，给出 n 阶行列式的定义，介绍 n 阶行列式的性质、计算方法以及用行列式解 n 元线性方程组的**克拉默（Cramer）法则.**

§1.1 行列式的概念

1.1.1 二阶与三阶行列式

在初等数学中，对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去 x_2，给第一个方程乘 a_{22} 减去第二个方程乘 a_{12} 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12} \tag{1.2}$$

为消去 x_1，给第一个方程乘 a_{21} 减去第二个方程乘 a_{11} 得

$$(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 = b_1a_{21} - b_2a_{11}$$

上式两边同乘（-1）得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21} \tag{1.3}$$

由式（1.2）和式（1.3）可得，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

为了便于记忆，用记号 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

二阶行列式是由 4 个元素排成的 2 行 2 列的数表，在这个数表中，把横排称为**行**，竖排称为**列**，第 i 行第 j 列位置上的元素记为 $a_{ij}(i, j = 1, 2)$，其中 i 称为**行标**，j 称为**列标**.

二阶行列式表示的代数和可用对角线法则记忆，如图 1-1 所示.

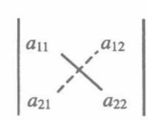


图 1-1

从左上角到右下角的实联线称为**主对角线**，从右上角到左下角的虚联线称为**副对角线**，二阶行列式即为主对角线上两个元素的乘积减去副对角线上

两个元素的乘积.

由此，二元线性方程组（1.1）的解可用公式表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D} \tag{1.4}$$

其中，分母 D 是由二元线性方程组（1.1）的系数组成的二阶行列式，称为**系数行列式**，D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 的第一列得到的二阶行列式，D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 的第二列得到的二阶行列式.

引进二阶行列式的概念后，二元线性方程组（1.1）可用公式（1.4）求解，其形式简单，结果一目了然.

例 1.1 解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 3x_1-x_2=-2 \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-1-6=-7$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1-(-4)=3$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-2-3=-5$$

所以，此方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=-\frac{3}{7}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{5}{7}$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

类似地，用消元法可得

$$\begin{aligned} &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ &\quad =b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3; \\ &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_2 \\ &\quad =a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}; \\ &(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31})x_3 \\ &\quad =a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31} \end{aligned}$$

可见，当 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}\neq 0$ 时，方程组（1.5）有唯一解.

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

这样，对于三元线性方程组（1.5），当系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，也有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.6}$$

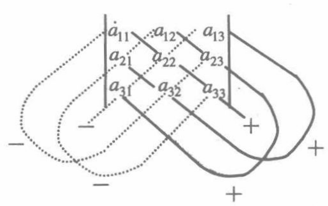
其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

这里 $D_j\,(j=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 替换 D 的第 j 列得到的三阶行列式.

按照这种方法定义三阶行列式，三元线性方程组（1.5）就有式（1.6）的公式解.因此，只要会求三阶行列式的值，三元线性方程组求解也很简单明了.

三阶行列式是由 9 个元素组成的 3 行 3 列的数表，它表示 6 项的代数和，每一项均为取自不同行不同列 3 个元素的乘积，其中 3 项为正，3 项为负，其规律也可用对角线法则记忆，如图 1-2 所示.



或

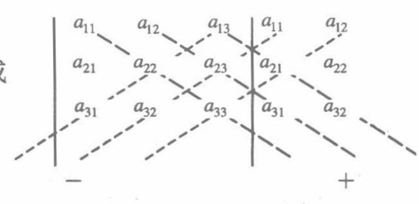


图 1-2

例 1.2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解　$D=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3)$
$=-14$.

例 1.3　解方程

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

解 方程左边的三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=x\cdot x\cdot 1+1\cdot 0\cdot 4+0\cdot 1\cdot 1-0\cdot x\cdot 4-1\cdot 1\cdot 1-x\cdot 0\cdot 1=x^2-1$$

由 $x^2-1=0$，得 $x=1$ 或 $x=-1$.

对于二、三阶行列式，我们可用对角线法则定义和计算，而且按照这种方法可得二、三元线性方程组解的公式（1.4）和式（1.6）.对于 n 元线性方程组，我们希望也得到类似的求解公式.为了得到 n 元线性方程组的公式解，我们需要给出 n 阶行列式比较合理的定义，为此我们介绍排列及其逆序数.

1.1.2 排列及其逆序数

由数码 $12\cdots n$ 组成的不重复的有序数组 $i_1 i_2\cdots i_n$ 称为一个 n **级排列**.n 级排列共有 $n!$种.

在一个 n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s<i_t$），则称 i_t 与 i_s 构成一个**逆序**.一个排列中所有逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. n 级排列 $i_1 i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $t(i_1 i_2\cdots i_n)$.

逆序数是奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例如，在 5 级排列 32514 中，3 在 2 和 1 的前面；2 在 1 的前面；5 在 1 和 4 的前面，共有 5 个逆序，即 $t(32514)=5$，所以排列 32514 为奇排列.

排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列**，其逆序数为 0，是偶排列.

例如，由 1,2,3 这 3 个数码组成的 3 级排列共有 $3!=6$ 种，这 6 个排列及其奇偶性如表 1-1 所示.

表 1-1

排列	123	132	213	231	312	321
逆序数	0	1	1	2	2	3
奇偶性	偶排列	奇排列	奇排列	偶排列	偶排列	奇排列

1.1.3 n 阶行列式的定义

在排列及其逆序数概念的基础上，我们分析二、三阶行列式的结构特点，给出 n 阶行列式的定义.

二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，其特点为：

（1）由 $2^2=4$ 个元素排成 2 行 2 列的数表；

（2）表示 2！项的代数和；

（3）每项都是取自不同行不同列的两个元素的乘积；

（4）在 2！项中，一项为正，一项为负，将每一项的行标取自然排列，其正项对应的列标构成的排列 12 是偶排列，负项对应的列标构成的排列 21 是奇排列.

由此二阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{t(12)} a_{11}a_{22} + (-1)^{t(21)} a_{12}a_{21} = \sum_{p_1p_2} (-1)^{t(p_1p_2)} a_{1p_1}a_{2p_2}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2}$ 表示对由 1,2 组成的所有二级排列 p_1p_2 求和.

三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

其特点为：

（1）由 $3^2 = 9$ 个元素排成 3 行 3 列的数表；

（2）表示 $3! = 6$ 项的代数和；

（3）每项都是取自不同行不同列的 3 个元素的乘积；

（4）在 $3! = 6$ 项中，3 项为正，3 项为负，将每一项的行标取自然排列，其 3 个正项对应的列标的排列 123、231、312 都是偶排列，3 个负项对应的列标的排列 132、213、321 都是奇排列（对照表 1-1）.

由此三阶行列式可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{t(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2p_3}$ 表示对由 1,2,3 组成的所有 3 级排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

定义 1.1　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和，每一项的符号是：当这一项中元素的行标取自然排列时，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n} (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.7}$$

其中 $\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对所有由 $1,2,\cdots,n$ 组成的 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和，$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为 n 阶行列式的**一般项.**

n 阶行列式可简记作 $|a_{ij}|_n$ 或 $\det(a_{ij})$.

一阶行列式 $|a|=a$ ，注意不要与绝对值记号混淆.

例 1.4 下列各元素乘积是否是四阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中的项，如果是，该项应该取什么符号？

(1) $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ ； (2) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ ； (3) $a_{12}a_{23}a_{32}a_{44}$ ； (4) $a_{21}a_{42}a_{34}a_{13}$.

解 (1) 由于 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 的行标排列为 1234，列标排列为 2314，可见其元素取自 $D=\det(a_{ij})$ 的不同行、不同列，故 $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ 为四阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中的一项. 由于列标排列的逆序数 $t(2314)=2$ ，故该项取正号.

(2) 由于 $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ 的行标排列为 1234，列标排列为 3214，可见其元素取自 $D=\det(a_{ij})$ 的不同行、不同列，故 $a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}$ 为四阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中的一项. 由于列标排列的逆序数 $t(3214)=3$ ，故该项取负号.

(3) 由于 $a_{12}a_{23}a_{32}a_{44}$ 中有两个元素 a_{12} 和 a_{32} 都取自 $D=\det(a_{ij})$ 的第二列，所以 $a_{12}a_{23}a_{32}a_{44}$ 不是四阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中的项.

(4) 由于 $a_{21}a_{42}a_{34}a_{13}=a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ ，其元素取自 $D=\det(a_{ij})$ 的不同行、不同列，故 $a_{21}a_{42}a_{34}a_{13}$ 为四阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 中的一项. 由于 $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ 列标排列的逆序数 $t(3142)=3$ ，故该项取负号.

例 1.5 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $a_{ii}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,n)$.

解 由于 D 中有很多元素为零，因而 D 的 $n!$ 项中有很多项为零. 现在考察有哪些项不为零. 由行列式的定义，D 的一般项 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中第一个元素 a_{1p_1} 取自第 1 行，但第 1 行中只有 a_{11} 不为零，因而 $p_1=1$，即 D 中只有含 a_{11} 的那些项可能不为零，其他项均为零；一般项 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 中第二个元素 a_{2p_2} 取自第 2 行，但第 2 行中只有 a_{21} 和 a_{22} 可能不为零，而 a_{21} 和 a_{11} 同在第 1 列，因此，D 中不为零的项不含 a_{21}，从而 a_{2p_2} 只能取 a_{22}，即 $p_2=2$，即 D 中只有含 $a_{11}a_{22}$ 的那些项可能不为零，其他项均为零；依此类推可得 $p_3=3,\cdots,p_{n-1}=n-1,p_n=n$. 因此，D 中不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ ，由于 $t(12\cdots n)=0$ ，因此这一项取正号，于是可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

称上面形式的行列式为**下三角形行列式**.

同理可得，上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

行列式中把从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为**副对角线**. 用同样的方法可以得到副对角线以下（上）元素全为零的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

1.1.4　对换

在一个 n 级排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中，如果将它的两个数码 p_i 与 p_j 对调，其余数码不变，得到一个新排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$，这样的变换称为一个**对换**，记为 (p_i, p_j).

定理 1.1　一个排列经过一次对换后，奇偶性改变.

证明　（1）先证相邻对换的情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{k-1}p_k p_{k+1}p_{k+2}\cdots p_n$，经过对换 (p_k, p_{k+1}) 变为新排列

$$p_1\cdots p_{k-1}p_{k+1}p_k p_{k+2}\cdots p_n$$

比较这两个排列中的逆序关系，显然 $p_1\cdots p_{k-1}$ 与 $p_{k+2}\cdots p_n$ 中数码的次序没有改变，仅仅改变了 p_k 与 p_{k+1} 次序，因此，新排列只比原排列增加了一个逆序（当 $p_k < p_{k+1}$ 时），或者减少了一个逆序（当 $p_k > p_{k+1}$ 时），所以这两个排列的奇偶性不同.

（2）再证一般情形.

设排列为 $p_1\cdots p_{k-1}p_k p_{k+1}\cdots p_{k+l-1}p_{k+l}p_{k+l+1}\cdots p_n$，经过对换 (p_k, p_{k+l})，变为新排列

$$p_1\cdots p_{k-1}p_{k+l}p_{k+1}\cdots p_{k+l-1}p_k p_{k+l+1}\cdots p_n$$

这个对换可以看作原排列依次经过 l 次相邻对换 $(p_k, p_{k+1}),(p_k, p_{k+2}),\cdots,(p_k, p_{k+l})$，变为

$$p_1\cdots p_{k-1}p_{k+1}\cdots p_{k+l-1}p_{k+l}p_k p_{k+l+1}\cdots p_n$$

再依次经过 $l-1$ 次相邻对换 $(p_{k+l-1}, p_{k+l}),\cdots,(p_{k+2}, p_{k+l}),(p_{k+1}, p_{k+l})$，变为

$$p_1\cdots p_{k-1}p_{k+l}p_{k+1}\cdots p_{k+l-1}p_k p_{k+l+1}\cdots p_n$$

即新排列可以由原排列经过 $2l-1$ 次相邻对换得到，由式（1）可知这两个排列的奇偶性不同.

因此，任何一个排列，经过一次对换后，奇偶性改变.

由于任何一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 都可以经过一定次数的对换，变成自然排列 $12\cdots n$，由定理 1.1 知，对换的次数就是排列奇偶性的变化次数，而自然排列是偶排列（逆序数为 0），因此我们有下面推论.

推论 奇排列变为自然排列的对换次数为奇数，偶排列变为自然排列的对换次数为偶数.

定理 1.2 n 个不同元素的所有排列中，奇偶排列各占一半.

证明 n 个不同元素的所有排列总数为 $n!$，设其中奇排列为 a 个，偶排列为 b 个，如果将每一个奇排列施以一次相同的对换，则由定理 1.1 可知，a 个奇排列全部变成偶排列，于是有 $a\leqslant b$；同理，如果将全部偶排列施以一次相同的对换，则 b 个偶排列全部变成奇排列，于是有 $b\leqslant a$，所以 $a=b$.

n 阶行列式的一般项为 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，而 $p_1p_2\cdots p_n$ 取遍由 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有排列. 由定理 1.2 可知，n 阶行列式冠以正号的项和冠以负号的项各占一半（不算元素本身所带的正负号）.

定理 1.3 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 也可定义为

$$D=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{t(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn} \tag{1.8}$$

或

$$D=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)+t(q_1q_2\cdots q_n)}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n} \tag{1.9}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 与 $q_1q_2\cdots q_n$ 均为取遍由 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有排列.

证明 由于 $q_1q_2\cdots q_n$ 是取遍由 $1,2,\cdots,n$ 组成的所有排列，所以式（1.8）的 $a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 为所有取自 D 的不同行、不同列的 n 个元素的乘积，共有 $n!$ 项.

如果将 $a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 调换次序变为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，则行标排列由 $q_1q_2\cdots q_n$ 变为自然排列，相应的列标排列由自然排列变为 $p_1p_2\cdots p_n$，由定理 1.1 的推论可知排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的奇偶性相同，即

$$(-1)^{t(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}=(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

上式结果即为定义中 D 的一般项，而且项数相同，因而 D 也可以定义为式（1.8）.

同理可证明式（1.9）.

例 1.6 若 $-a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 是四阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一项，试求 j 和 k.

解 由于行列式 $|a_{ij}|$ 的每一项的元素都要取自 $|a_{ij}|$ 的不同行不同列，因此 $j=3,k=4$ 或 $j=4,k=3$.

当 $j=3,k=4$ 时，$t(3142)+t(3214)=3+3=6$，这与 $a_{3j}a_{12}a_{41}a_{2k}$ 带负号矛盾.

当 $j=4,k=3$ 时，$t(3142)+t(4213)=3+4=7$，该项为负，故 $j=4,k=3$.

§1.2 行列式的性质

对于 n 阶行列式，按定义计算需要求出 $n!$ 项的代数和，且每项都是取自不同行不同列 n 个元素的乘积，计算量是非常大的. 为了解决行列式的计算问题，本节介绍行列式的性质，它不仅可以简化行列式的计算，而且对理论研究也有重要的作用.

将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列互换得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**. 记为 D^{T}，即

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1　行列式与它的转置行列式相等，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证明　由行列式的定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

于是有

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$

结合定理 1.3 中式（1.8），可得 $D=D^{\mathrm{T}}$.

由性质 1 可知，行列式中行与列具有同等的地位，即凡是行具有的性质，列也同样具有，反之亦然.下面的性质都只对行的情形证明，对列也同样成立.

性质 2　交换行列式的两行（列），行列式变号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换行列式的第 i 行和第 j 行记为 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换行列式的第 i 列和第 j 列记为 $c_i\leftrightarrow c_j$. 性质 2 可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\xlongequal{r_i\leftrightarrow r_j}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明　将上式左端的行列式记为 D，右端的行列式记为 D_1. 按照行列式的定义有

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$$

$$D_1=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

而排列 $p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 经过一次对换 (p_i,p_j) 得到排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$，由定理 1.1 可知，这两个排列奇偶性不同，于是有

$$(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}=-(-1)^{t(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

所以 $D_1=-D$.

推论 如果行列式中有两行（列）对应元素相等，则此行列式的值为零.

把相同的两行（列）互换，就有 $D=-D$ ，所以 $D=0$.

性质 3 用数 k 乘以行列式的某一行（列）中的所有元素，等于用数 k 乘此行列式．即

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ ka_{i1}&ka_{i2}&\cdots&ka_{in}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{r_i\div k}k\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=kD$$

证明 由行列式定义的式（1.7）

$$\begin{aligned}D_1&=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}\\&=k\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{t(p_1\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}\\&=kD\end{aligned}$$

推论 1 如果行列式的某一行（列）的所有元素有公因子，则公因子可以提到行列式符号外面.

第 i 行提出公因子 k ，记为 $r_i\div k$ ；第 i 列提出公因子 k ，记为 $c_i\div k$.

推论 2 如果行列式中有两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值为零.

例 1.7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&3&-1\\-4&9&-3\\5&-15&5\end{vmatrix}$$

解 由于 D 的第 2 列与第 3 列对应元素成比例，所以 $D=0$.

例 1.8 证明

$$D=\begin{vmatrix}0&1&2\\-1&0&4\\-2&-4&0\end{vmatrix}=0$$

证明 给 D 的每一行提取公因子-1，再将行列式转置得

$$D\xlongequal[i=1,2,3]{r_i\div(-1)}(-1)^3\begin{vmatrix}0&-1&-2\\1&0&-4\\2&4&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0&1&2\\-1&0&4\\-2&-4&0\end{vmatrix}=-D$$

所以 $D=0$.