职业高级中学教材

数学

（第二册）

北京市职业技术教育教材编审委员会 编

高等教育出版社

职业高级中学教材

数　学

（第 二 册）

北京市职业技术教育教材编审委员会　编

高等教育出版社

(京)112号

内 容 提 要

本书是由北京市教育局组织编写的职业高中各专业 通 用 的文化基础课数学教材。

本套教材共三册：第一、二册基本为必修教材，第三册为实用性较强的选学教材。其中第一册分五章，内容包括：集合；函数；三角函数；两角和与差的三角函数、反三角函数；复数。第二册分七章，内容包括数列、数列的极限、数学归纳法；直线和圆；椭圆、双曲线、抛物线；参数方程、极坐标；排列、组合、二项式定理；空间的直线和平面；多面体和旋转体等内容。

本套教材既注重基础又具有较大弹性，适用性强；全书充分考虑到各类专业对数学课的不同需要与授课时数；注意了本学科各部分知识之间，特别是新旧知识之间的联系，也注意了学生能力培养的渐进性；例题具有典型性、示范性，习题数量合理、题型多样，每章之后安排有小结。

职业高级中学教材

数 学

（第 二 册）

北京市职业技术教育教材编审委员会 编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

三河科教印刷厂印装

*

开本787×1092 1/32 印张 13 字数 270 000

1994年8月第1版 1994年8月第1次印刷

印数0001— 2[illegible] 455

ISBN7-04-004858-2/O·1338

定价6.20元

序

北京市职业高级中学数学课本是根据《国务院关于大力发展职业技术教育的决定》、国家教委《关于制订职业高级中学(三年制)教学计划的意见》、《北京市加强与改进职业高中(学校)教学工作的意见》的精神，依照经过试行并修订的《北京市职业高级中学(三年制)数学教学大纲》，并结合十多年来北京市职业高中数学教学的实际编写的，是职业高中各专业通用的文化基础课教材。

本套教材共三册：第一册的内容有集合；函数；幂函数、指数函数和对数函数；三角函数；复数。第二册的内容有数列、极限、数学归纳法；平面解析几何；排列、组合、二项式定理；立体几何。第三册的内容有计算器的使用、近似计算的法则；几何画法及应用；行列式和线性方程组；微积分初步；概率初步。

编写过程中着重突出以下特点：一、注重基础性。注意知识的结构和系统，重视数学能力和思想方法的训练，提高职业高中学生的文化素质，以适应今后长期广泛就业、进行技术革新和继续进修的需要。二、增强适用性。对教学内容分三个层次做了安排，以适应不同专业数学教学的需要。三、注意可读性。文字深入浅出，适当增加例题，安排多种题型，注意例题、练习题及习题的相互配合。每章末附有作为“阅读材料”的短文，以扩大学生知识面，激发学生的学习兴趣。四、加强

专业性。为了适当配合各专业需要，在调查研究的基础上，选取多数专业实用性较强的数学知识作为第三册的内容，供各有关专业选用。

三年制职业高中的数学课，工农医及部分文科类专业（不低于256课时）应以第一、二册中不带*号的部分为必学内容；技能性较强的专业（不低于192课时）适当降低要求，应以第一、二册中不带“*”、“△”号的部分为必学内容；课时较多，对数学要求较高的部分文科类专业不低于320课时，以第一、二册内容（参数方程，极坐标除外）为必学教材。第三册教材供各专业选取部分内容讲授。四年制职业中专可在此基础上，根据需要再适当补充一些教学内容。

本教材各章所需授课时数（包括复习、不含讲授带“*”号的内容）大约是：第六章26课时，第七章38课时，第八章16课时，第十章18课时，第十一章20课时，共需118课时。

本教材的编写工作由北京市教育局直接组织和领导。刘东（北京市教育局教研部数学特级教师、国家教委教材审查委员）、贺信淳（北京市东城区教研科研中心数学特级教师）给予具体指导，由刘东负责审稿。

本册教材由王爱恕任主编，于锡曜、李庆华任副主编。参加编写工作的还有马淑琴、刘学易、宋士华、陈淑贤、陈鸿涛、张秋立、张庚录、谭斌材、鲁长栓。

由于时间仓促，经验不足，书中难免有疏漏、错误之处，诚恳欢迎批评指正，以便改正。

编者

1993年9月

目　　录

第六章　数列、数列的极限、数学归纳法

本章主要介绍数列的概念，给出等差数列和等比数列的定义、通项公式及前 n 项和公式；介绍极限的概念及运算法则；介绍数学归纳法的原理，以及它们的简单应用.

一、数　　列

6.1　数列的概念

先看下面的例子：

(1) 某工厂把生产的钢管堆放成图 6-1 的形状，共有 8 层，自上而下各层钢管的根数依次是：

$$6,\quad 7,\quad 8,\quad 9,\quad 10,\quad 11,\quad 12,\quad 13;$$

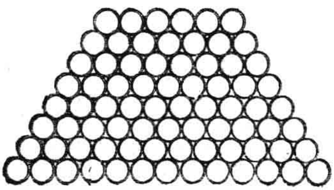

图　6-1

(2) 某工厂去年的产值是 200 万元，从今年起，计划在五年内每年比上一年产值增长 10 %，则今后五年的年产值(百万元)依次是：

$$2(1+10\%),2(1+10\%)^2,2(1+10\%)^3,$$
$$2(1+10\%)^4,2(1+10\%)^5;$$

(3) 1 和 -1 相间排成的一列数：

$$1,-1,1,-1,\cdots;$$

(4) $\sqrt{2}$ 精确到 1,0.1,0.01, 0.001, …的不足近似值排成的一列数:

$$1,1.4,1.41,1.414,\cdots;$$

(5) 由无穷多个 5 排成的一列数:

$$5,5,5,5,\cdots.$$

如上面的例子,按一定次序排成的一列数叫做**数列**.

数列中的每一个数都叫做这个数列的**项**, 各项依次叫做这个数列的第 1 项(或首项),第 2 项,…,第 n 项,….

项数有限的数列叫做**有穷数列**, 项数无限的数列叫做**无穷数列**. 如上面的数列(1)、(2)是有穷数列, 数列(3)、(4)、(5)是无穷数列.

由于数列是按照自然数次序排成的一列数, 因此数列中各项与序号有着下面的对应关系,如数列(1):

$$\begin{array}{rcccccccc} \text{项:} & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{序号:} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

这就告诉我们,数列可以看作是定义域为自然数(或它的有限子集)的函数,当自变量从小到大依次取值时所对应的一列函数值.

在直角坐标平面上可以表示这一列函数值.为方便起见,两条坐标轴的单位长度可以不同.图6-2(1)、(2)分别是数列(1)、(2)的图形表示.从图上看,数列可用一群孤立的点表示.

数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

其中 a_n 是数列的第 n 项, 也可把上面的数列简记作 $\{a_n\}$. 例

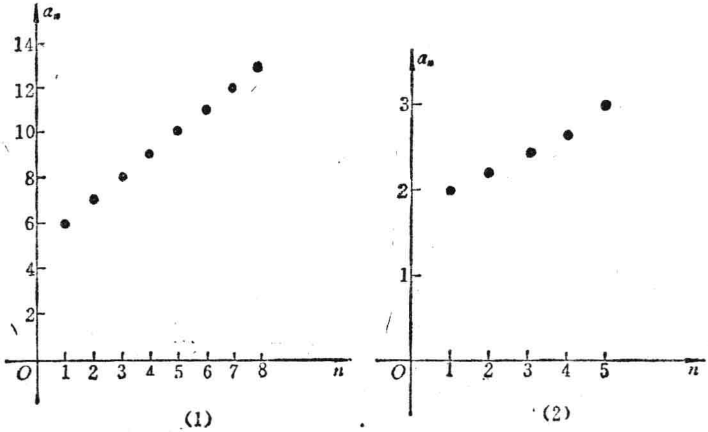

图 6-2

如，把数列(3)简记作$\{(-1)^{n+1}\}$.

如果数列$\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系可以用一个公式表示，这个公式就叫做这个**数列的通项公式**. 例如，数列(1) 的通项公式是 $a_n=n+5(n\leqslant 8)$. 如果已知一个数列的通项公式，那么只要依次用 1,2,3,4, …去代替公式中的 n，就可以求出这个数列的每一项.

例 1 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式，分别写出它的前 5项及第 10 项;

(1) $a_n=\dfrac{n+1}{n}$; (2) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{n}$.

解: (1) 在通项公式中依次取$n=1,2,3,4,5,10$，得

$$a_1=2, a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{4}{3},$$

$$a_4=\frac{5}{4}, a_5=\frac{6}{5}, a_{10}=\frac{11}{10};$$

(2) 在通项公式中依次取 $n=1,2,3,4,5,10$, 得

$$a_1=1,\ \ a_2=-\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{3},$$

$$a_4=-\frac{1}{4}, a_5=\frac{1}{5}, a_{10}=-\frac{1}{10}.$$

例 2 已知数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=3n-1$, 写出它的第 $n-1$ 项及第 $n+1$ 项; 并判断 4714, 5483 是不是数列中的项; 如果是数列中的项, 是第几项?

解: 用 $n-1, n+1$ 分别代替通项公式中的n, 得到

$$a_{n-1}=3(n-1)-1=3n-4,$$
$$a_{n+1}=3(n+1)-1=3n+2;$$

设 $a_n=4714$, 则 $3n-1=4714$, 解这个关于 n 的方程得到 $n=1571\frac{2}{3}$,

$\because$ $1571\frac{2}{3}$ 不是自然数, 而通项公式中, n 须是自然数,

$\therefore$ 4714 不是数列中的项;

设 $a_n=5483$, 则 $3n-1=5483$, 解这个关于 n 的方程得到 $n=1828$,

$\because$ 1828 是自然数,

$\therefore$ 5483 是数列中的项, 是第 1828 项.

例 3 写出数列的一个通项公式, 使它的前 4 项分别是下列各数:

(1) 1, 4, 9, 16;

(2) $\frac{2^2-1}{2}, \frac{3^2-1}{3}, \frac{4^2-1}{4}, \frac{5^2-1}{5}$;

(3) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$.

解: (1) 数列的前 4 项都是序号的平方，所以通项公式是 $a_n=n^2$;

(2) 数列的前 4 项的分母都是序号加 1，分子都是分母的平方减 1，所以通项公式是 $a_n=\frac{(n+1)^2-1}{n+1}$;

(3) 数列的前 4 项的绝对值可以表示为 $\left(\frac{1}{2}\right)^0, \left(\frac{1}{2}\right)^1, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3$，其指数是序号减 1，且奇数项为正，偶数项为负，所以通项公式是 $a_n=(-1)^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 5，以后各项由公式 $a_{n+1}=a_n-3$ 给出. 写出数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项.

解:

$$\begin{aligned}
a_1&=5,\\
a_2&=a_1-3=5-3=2,\\
a_3&=a_2-3=2-3=-1,\\
a_4&=a_3-3=-1-3=-4,\\
a_5&=a_4-3=-4-3=-7.
\end{aligned}$$

练习

1. 根据数列的定义，判断下面各题中的两个数列是否是相

同的数列:

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$;

(2) $2, 4, 6, 8$ 与 $2, 4, 6, 8, \cdots$.

2. (口答)已知下面数列$\{a_n\}$的通项公式，说出它的前5项及第10项;

(1) $a_n=\frac{n}{n+1}$, (2) $a_n=-2^n+1$;

(3) $a_n=5\times(-1)^{n+1}$; (4) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{1}{n^2}$.

3. (口答)说出数列的通项公式，使它的前4项分别是下列各数:

(1) $2, 4, 6, 8$;

(2) $12, 22, 32, 42$;

(3) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$;

(4) $1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{5}$.

4. 观察下面数列的特点,用适当的数填空,并对每一个数列各写出一个通项公式:

(1) 1, 3, ( ), 7, 9, ( ), 13, ( );

(2) 2, 4, ( ), 16, 32, ( ), 128, ( );

(3) 4, ( ), 2, 1, ( ), -1, -2, ( );

(4) 0, $\frac{1}{4}$, ( ), $\frac{3}{16}$, $\frac{4}{25}$, ( ), $\frac{6}{49}$, ( ).

5. 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=n^2-n$，写出它的第m项;并判断42是不是数列中的项;如果是数列中的项,是

第几项?

6. 写出下面数列$\{a_n\}$的前 5 项:

(1) $a_1=5$, $a_{n+1}=a_n+2$;

(2) $a_1=-2, a_{n+1}=2a_n$;

(3) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$;

(4) $a_1=\frac{1}{2}, a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}$.

6.2 等差数列

观察下面数列的特点:

(1) 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13;

(2) 10, 7, 4, 1, -2, ….

可以看出: 数列(1)从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于 1,数列(2)从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差都等于 -3.

一般地,如果一个数列从第 2 项起,每一项与它的前一项的差都等于同一个常数, 那么这个数列叫做**等差数列**、这个常数叫做等差数列的公差, 通常用字母 d 表示. 即对于数列$\{a_n\}$,如果有

$$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots=d,$$

那么这个数列就叫做等差数列.

例 1 已知数列$\{a_n\}$的通项公式是 $a_n=\lg 2^n$,
求证: 这个数列是等差数列.

分析: 根据等差数列的定义, 只需证明对于任意自然数 n,差 $a_{n+1}-a_n$ 都是同一个常数.

证明:
$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\lg 2^{n+1}-\lg 2^n\\&=(n+1)\lg 2-n\lg 2\\&=(n+1-n)\lg 2\\&=\lg 2,\end{aligned}$$

∵ $\lg 2$ 是常数,

∴ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

下面研究等差数列的通项公式.

如果一个数列

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,a_n,\ \cdots$$

是等差数列,它的公差是 d, 那么

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
$$\cdots\cdots$$

由此可知,等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d.}$$

例如,一个等差数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 6,公差是 -2,那么这个等差数列的通项公式是

$$a_n=6+(n-1)\cdot(-2),$$

即
$$a_n=8-2n.$$

等差数列的通项公式给出了等差数列中 a_1, a_n, d, n 之间的关系,已知其中的三个量,就可以求出另一个量.

例 2 求等差数列 10, 8, 6, …的第 20 项.

解: ∵ $a_1=10,\ d=-2,\ n=20,$

$\therefore \quad a_{20}=10+(20-1)\times(-2)$
$=-28.$

例 3 等差数列$-\frac{1}{2}$，0，$\frac{1}{2}$，…的第几项是 49？

解： $\because \quad a_1=-\frac{1}{2}$，$d=\frac{1}{2}$，$a_n=49$，

$\therefore \quad 49=-\frac{1}{2}+(n-1)\times\frac{1}{2}$，

$n=100.$

答：这个数列的第 100 项是 49.

例 4 在等差数列$\{a_n\}$中，已知 $a_3=5$，$a_7=13$，求a_{10}.

分析： 本题若先求出a_1和 d，即可求出 a_{10}. 由已知条件得到两个关于a_1和d 的方程，通过解方程组的方法可以求出a_1和d.

解： 设等差数列的首项为 a_1，公差为 d，根据题意，得

$$\begin{cases} a_1+(3-1)d=5, \\ a_1+(7-1)d=13, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a_1=1, \\ d=2. \end{cases}$$

因此 $$a_{10}=1+(10-1)\times 2=19.$$

如果三个数 a，A，b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的**等差中项**.

如果 A 是 a 与 b 的等差中项，那么 $A-a=b-A$，所以

$$A=\frac{a+b}{2}.$$

显然，在一个等差数列中，从第 2 项起，每一项（有穷等差