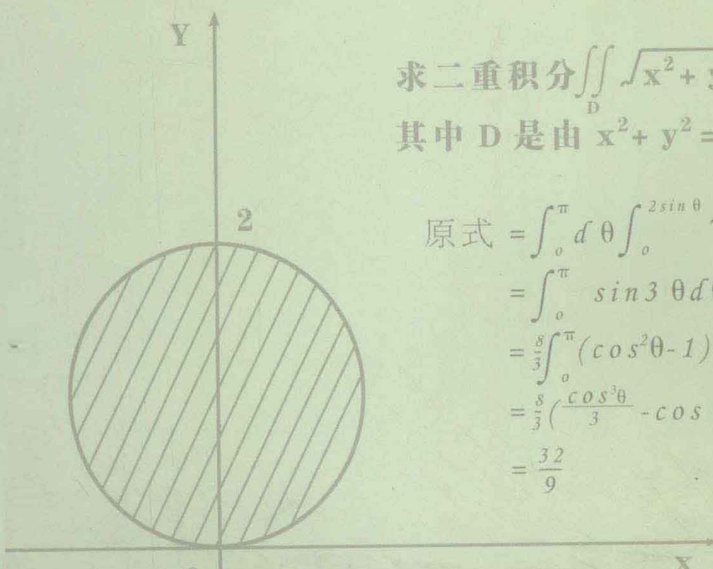
高等数学

黄丽萍　蒋波平　主编



求二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，
其中 D 是由 $x^2+y^2=2y$ 围成。

$$原式 =\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\sin\theta}\gamma\cdot\gamma\, d\gamma$$
$$=\int_0^\pi \sin3\theta d\theta$$
$$=\frac{8}{3}\int_0^\pi(\cos^2\theta-1)d\cos\theta$$
$$=\frac{8}{3}\left(\frac{\cos^3\theta}{3}-\cos\theta\right)\Big|_0^\pi$$
$$=\frac{32}{9}$$

DHUP 東華大學出版社

高　等　数　学

黄丽萍　蒋波平　主　编

罗爱芳　陈从衡　副主编

东华大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/黄丽萍等主编.—上海:东华大学出版社,2004.5

ISBN 7-81038-817-7

Ⅰ.高... Ⅱ.黄... Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 045078 号

责任编辑:张益储

封面设计:天 水

高等数学

黄丽萍 蒋波平 主编

东华大学出版社出版

上海市延安西路 1882 号

邮政编码:200051 电话:(021)62193056

新华书店上海发行所发行 常熟市大宏印刷有限公司印刷

开本:850×1168 1/32 印张:9 字数:238 千字

2004 年 5 月第 1 版 2004 年 5 月第 1 次印刷

ISBN 7-81038-817-7/O·46

定价:19.00 元

目　　录

第一章　函　　数

函数是高等数学研究的主要对象.本章先用集合论的观点给出函数的一般定义,然后着重介绍后面的章节中常用到的概念:函数的特性、基本初等函数、复合函数及初等函数.

第一节　集合、区间、邻域

一、集合

研究事物时,常要按事物的某些性质进行归类,由此产生了集合的概念.一个集合(简称为集)是具有某种共同性质的事物的全体.把组成某一集合的各个对象称为集合的元素.例如:

某工厂生产的所有产品构成一个集合,其中每个产品是集合的元素;

小于 2 的所有实数构成一个集合,其中的每个实数是集合的元素;

方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的一切根构成一个集合,其中每一个根是集合的元素;

本书主要用到的集合是实数集,即元素是实数的集合.全体实数构成的集合记作 R.本书还要用到元素是点(直线、平面、空间上的点)的集合,简称为点集.

集合常用大写的字母如 A,B,C 等表示;集合的元素常用小写的字母如 a,b,c 等表示.给定一个集合 M,若 a 是 M 的元素,则记作

$$a \in M(\text{读作 } a \text{ 属于 } M)$$

若 a 不是 M 的元素,则记作

$$a \notin M(\text{或 } a \,\overline{\in}\, M)(\text{读作 } a \text{ 不属于 } M).$$

集合一般有两种表示方法:一种是列举法,例如,全体自然数

集可以表示成

$$N=\{1,2,3,4,\cdots\cdots\}.$$

另一种方法是描述法.例如,满足不等式 $-3<x<1$ 的一切实数 x 所构成的实数集,可以表示成

$$A=\{x\mid -3<x<1\}.$$

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,即若 $e\in A$,必有 $e\in B$,则称 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$　或　$B\supset A$

(读作 A 含于 B 或 B 包含 A).

若 A 是 B 的子集,而 B 又是 A 的子集,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$

下面介绍有关集合的运算.

把两个集合 A 和 B 的元素合在一起构成一个新的集合,此集合称为 A 和 B 的并集,记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{e\mid e\in A \text{ 或 } e\in B\}. \tag{1.1}$$

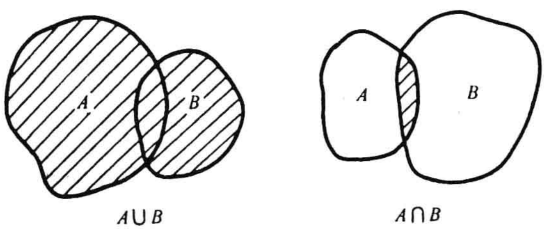


图1–1

从两个集合 A 和 B 中,取出所有相同的元素构成一个新的集合,此集合称为 A 和 B 的交集,记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{e\mid e\in A \text{ 且 } e\in B\}. \tag{1.2}$$

$A\cup B$ 及 $A\cap B$ 如图 1–1 所示.

例 1　设 $A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$,$B=\{x\mid 2<x\leqslant 6\}$,求 $A\cup B$ 及 $A\cap B$.

解　根据定义有

$A \cup B = \{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 6\}, A \cap B = \{x \mid 2 < x \leqslant 5\}$.

不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.集合$\{x \mid x < 2$且$x > 3\} = \varnothing$.应注意,空集不能写成 $\varnothing = \{0\}$.这是因为集合$\{0\}$中含有一个元素 0,所以它不是空集.

二、实数的绝对值

一个实数 a 的绝对值定义为

$$|a| = \begin{cases} -a, & 当 a < 0 时; \\ a, & 当 a \geqslant 0 时. \end{cases}$$

它在几何上表示数轴上的点 a 到原点 O 的距离.由算术根的意义可知

$$|a| = \sqrt{a^2}.$$

常用的绝对值性质主要有:

(1) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

(2) $|a| \leqslant k$(k 是实数,且 $k > O$)等价于 $-k \leqslant a \leqslant k$

(3) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

(4) $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$

(5) $|ab| = |a||b|$

(6) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}(b \neq 0)$

三、区间和邻域

1.区间

区间是一类常用的集合.设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$,则称实数集$\{x \mid a < x < b\}$为开区间,记作(a,b),即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}.$$

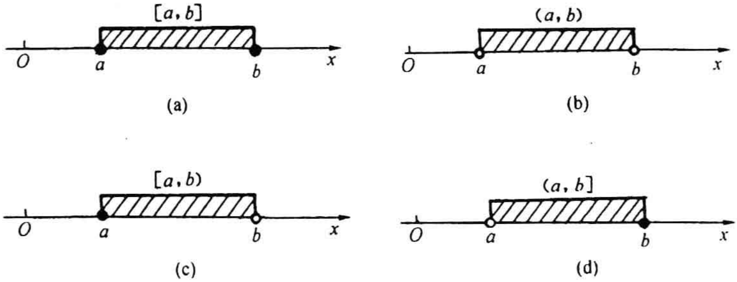
类似地,闭区间和半开区间的定义和记号为:

闭区间$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,

半开区间$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$,或$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$.

以上这些区间都称为有限区间,a,b 称为区间的端点,数 $b - a$ 称为区间的长度.在数轴上,这些区间都可以用长度为有限的线

段来表示,如图 1 – 2 所示.



(a)　(b)　(c)　(d)

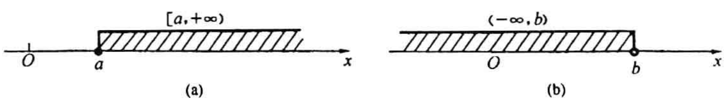
图1–2

还有一类区间称为无限区间,它们的定义和记号如下所列:

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$, $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$,

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$, $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$.

其中,记号 $+\infty$,读作“正无穷大”;记号 $-\infty$,读作“负无穷大”.



(a)　(b)

图1–3

无限区间$(-\infty, +\infty)$在数轴上对应于整个数轴,而其他无限区间在数轴上对应于长度为无限、且只可向一端无限延伸的直线.例如,$[a, +\infty)$和$(-\infty, b)$在数轴上的几何表示如下(见图 1 – 3).

今后在不需要区分上述各种情况时,就用“区间 Ⅰ”代表各种类型的区间.

2.**邻域**

定义　设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,集合

$$\{x \mid |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的δ邻域(图1－4),记作 $U(a,\delta)$.点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.如果把邻域的中心 a 除去,即集合

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的去心δ邻域(图 1－5),记作 $U(\hat{a},\delta)$.

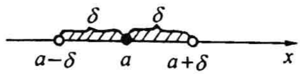


图1–4

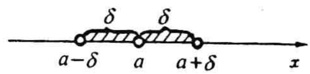


图1–5

习题 1－1

一、用集合符号写出下列集合:

(1) 大于 30 的所有实数的集合;

(2) 圆 $x^2+y^2=25$ 上所有的点组成的集合;

(3) 椭圆$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$外部一切点的集合.

二、下列集合中哪个是空集 $\varnothing$?

$A=\{x \mid x+5=5\}$,$B=\{x \mid x\in R$,且 $x^2+5=0\}$,

$C=\{x \mid x>2$ 且 $x<5\}$.

三、设 $A=\{a,b,c\}$,下列式子中哪些是正确的?

(1)$\varnothing \in A$; (2)$a \in A$; (3)$\{a\}\subset A$; (4)$\varnothing \subset A$;

(5)$A\subset A$; (6)$b\in A$; (7)$b\subset A$.

四、如果 $A=\{x \mid 3<x<5,x\in R\}$;$B=\{x \mid x>4,x\in R\}$,

求(1)$A\cup B$; (2)$A\cap B$.

五、用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x|\leqslant 2$; (2) $|x-5|\leqslant 1$; (5) $|x-1|<\varepsilon(\varepsilon>0)$;

(4) $|x|>1$; (5) $|x+2|\geqslant 3$.

第二节　函数的概念

一、函数的概念

在同一观察的过程中，往往会出现几个变量，它们的变化不是孤立的，而是存在着一种依赖关系．现在，让我们考察几个具体例子．

例 1　考察自由落体问题．根据著名的伽利略公式，有

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

这里 t 表示物体下落的时间，s 表示下落的距离，g 是重力加速度．这个公式指出了在物体自由降落的过程中，距离 s 和时间 t 的一种相互依赖关系．假定物体着地的时刻为 T，那么当 t 取 $[0,T]$ 中的某一数值时，通过上式 s 的数值也就唯一地确定下来．

例 2　由立体几何知道，半径是 r 的球的体积 V 为

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

如果在观察的过程中球的体积 V 和半径 r 是变化的，那么，这个公式指出了两个变量 V 和 r 的一种相互依赖关系．当半径 r 取定某一数值时，通过上式 V 的数值也就唯一地确定下来．

上面二个例子虽然来自不同的问题，但是它们有一些共同的特征．首先，它们都说明了两个变量之间有一种相互依赖的关系，这种关系给出了一种对应法则；其次，两个变量中，当有一个变量在一定的范围内取定某一数值时，按照这种法则，另一个变量必有唯一确定的数值与之对应．由这些特征，抽象到数学上就得到函数的概念．

定义　设 D 是某一实数集，若当变量 x 在 D 中每取一个数值时，另一变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x). \tag{1.3}$$

这时，x 称为自变量，实数集 D 称为函数的定义域，函数 y 又称为

因变量.

按照函数的定义,当自变量 x 在定义域 D 内取定一个数值 x_0 时,函数 y 必有唯一确定的数值与之对应,此数值称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作

$$f(x_0)\text{ 或 } y\big|_{x=x_0} \tag{1.4}$$

当自变量 x 遍取定义域 D 内的各个数值时,对应的函数值的全体所构成的实数集:

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\} \tag{1.5}$$

称为函数 y 的值域.

在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.例如,例 1 中的距离 s 是时间 t 的函数,时间 t 不能为负数,且不能大于落地的时间 T,所以函数 s 的定义域是 $D=[0,T]$.

在数学中,常要抽象地研究由算式表示的函数.这时,函数的定义域规定为:使算式有意义的(例如,分式的分母不能等于零,开偶次方根时,被开方数要不小于零,对数的真数要大于零等)那些自变量值的全体所构成的实数集.

例 3 求下列函数的定义域(用集合或区间表示):

(1)$y=\sqrt{2x-1}+\dfrac{1}{3x-2}$;(2)$y=\lg(x+1)+\arcsin\dfrac{x-1}{3}$.

解 (1)要使函数 y 有定义,x 必须使得右边的两个算式都有意义,故 x 应满足不等式组

$$\begin{cases}2x-1\geqslant 0\\3x-2\neq 0\end{cases},$$

即

$$\begin{cases}x\geqslant \dfrac{1}{2}\\ x\neq \dfrac{2}{3}\end{cases}$$

于是,所求函数的定义域可用集合或区间分别表示为

$$D=\left\{x\mid x\geqslant\frac{1}{2}\text{ 且 }x\neq\frac{2}{3}\right\}$$

或 $$D=\left[\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},+\infty\right).$$

(2) 因为要使函数 y 有定义,必须使得 $\lg(x+1)$ 与 $\arcsin\frac{x-1}{3}$ 都有意义,所以 x 必须满足不等式组

$$\begin{cases}x+1>0\\ \left|\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 1.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}x>-1\\ -1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant 1.\end{cases}$$

解此不等式组,得 $-1<x\leqslant 4$.故所求函数的定义域可分别用集合或区间表示为 $D=\{x\mid -1<x\leqslant 4\}$ 或 $D=(-1,4]$.

例 4 求函数 $f(x)=\sin x+2\cos^2 x$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处的函数值.

解 将 $x=\frac{\pi}{2}$ 代入函数式中,便得所求的函数值

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\sin x+2\cos^2 x\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}+2\cos^2\frac{\pi}{2}=1.$$

从函数的定义可以看到,函数概念有两个要素:定义域和对应法则.如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是相同的,否则就是不同的.

三、函数的表示法与分段函数

函数有三种常用的表示法:公式法、图像法和列表法.关于这方面的知识,读者已很熟悉,这里不再叙述,本目仅介绍高等数学中常出现的分段函数.

在自变量的取值范围内,分别用几个不同的数学式子表示的函数称为分段函数.

例 5 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & 当 -2<x<0时\\5, & 当0\leqslant x<1时;\\x^2+4, & 当1\geqslant x时\end{cases}$$

(1) 求 $f(x)$ 的定义域;(2) 求 $f(-1),f(0),f(\frac{1}{2}),f(1),f(2)$;(3) 在 $x=-3$ 处函数是否有定义,为什么?(4) 画出函数 $f(x)$ 的图像.

解 (1) $f(x)$ 的定义域是 $\{x\mid -2<x<+\infty\}$;

(2)
$$f(-1)=-1;$$
$$f(0)=5;$$
$$f(\frac{1}{2})=5;$$
$$f(1)=5,f(2)=8;$$

(3) 因为 $x=-3\notin\{x\mid -2<x<+\infty\}$,故函数 $f(x)$ 在 $x=-3$ 处没有定义;

(4) 函数 $f(x)$ 的图像如图 1 - 6 所示.

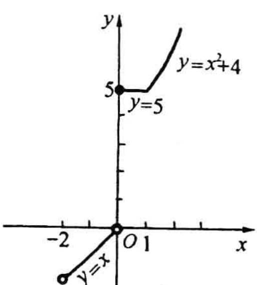


图1-6

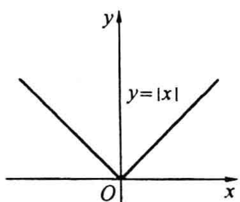


图1-7

例 6 函数

$$y=|x|=\begin{cases}-x, & 当 x<0;\\x; & 当 x\geqslant 0\end{cases}$$

是分段函数,函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$. 函数的图像如图 1 - 7 所示.

习题 1-2

一、设 $f(x)=\sqrt{4+x^2}$，求下列函数值：

$f(0)$，$f(1)$，$f(-1)$，$f(\frac{1}{a})$，$f(x_0)$，$f(x_0+h)$.

二、下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg(x^2)$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}$，$g(x)=\sin x$.

三、求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；

(2) $y=\sqrt{3x+4}$；

(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；

(4) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$；

(5) $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$；

(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；

(7) $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}$.

第三节　函数的几种特性

一、函数的有界性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在某一实数集 A 上有定义，若存在正数 M，对于一切 $x\in A$，都有不等式

$$|f(x)|\leqslant M \tag{1.6}$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 A 上有界；若不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 在 A 上无界.

例 1　下列各函数在指定的区间上是否有界？

(1)$f(x) = \arcsin x, x \in [-1,1]$;
(2)$f(x) = x^2 - 1, x \in [0, +\infty)$;
(3)$f(x) = x^2 - 1, x \in (-4,3]$;

解 (1)因为当 $x \in [-1,1]$ 时有 $|f(x)| = |\arcsin x| \leqslant \frac{\pi}{2}$.
所以,$f(x) = \arcsin x$ 在区间$[-1,1]$上有界;

(2)因为不存在正数 M,使得 $|f(x)| \leqslant M(x \in [0, +\infty))$,所以 $f(x) = x^2 - 1$ 在区间$[0, +\infty)$上无界;

(3)取 $M = 15$,则对于一切 $x \in (-4,3]$,都有

$|f(x)| = |x^2 - 1| < 15$,所以 $f(x) = x^2 - 1$ 在区间$(-4,3]$上有界.

二、函数的奇偶性

定义 2 设函数 $f(x)$ 的定义域是实数集 D.若对于任意的 $x \in D$,都有 $-x \in D$,且满足

$$f(-x) = f(x) \tag{1.7}$$

则称函数 $f(x)$ 是偶函数.若对于任意的 $x \in D$,都有 $-x \in D$,且满足

$$f(-x) = -f(x) \tag{1.8}$$

则称函数 $f(x)$ 是奇函数.

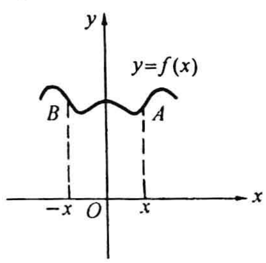


图1–8

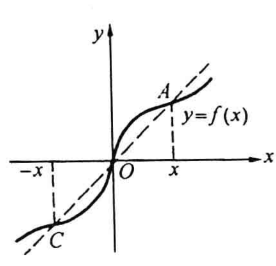


图1–9

偶函数的图像关于 y 轴对称.(图 1 – 8).

奇函数的图像关于坐标原点对称.(图 1 – 9).

例 2 指出下列函数中哪些是奇函数?哪些是偶函数?哪些既

不是奇函数,也不是偶函数?

(1) $y = x^3$;　　(2) $y = x^2\cos\frac{1}{x}$;

(3) $y = x^2 + x$;　　(4) $y = \sqrt{x}$.

解　(1) 函数 $y = x^3$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,因为对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,都有 $-x \in (-\infty, +\infty)$,且有

$$f(-x) = -x^3 = -f(x),$$

所以函数 $y = x^3$ 是奇函数;

(2) 函数 $y = x^2\cos\frac{1}{x}$ 的定义域是 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,因为对于任意的 $x \in D$,都有 $-x \in D$,且有

$$f(-x) = (-x)^2\cos\frac{1}{-x} = x^2\cos\frac{1}{x} = f(x),$$

所以函数 $y = x^2\cos\frac{1}{x}$ 是偶函数;

(3) 函数 $y = x^2 + x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,对于任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$,虽然有 $-x \in (-\infty, +\infty)$,但是,

$f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$,且 $f(-x) \neq -f(x)$,

所以函数 $y = x^2 + x$ 既不是奇函数,也不是偶函数;

(4) 函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域是 $[0, +\infty)$.因为当 $x \in (0, +\infty)$ 时,$-x \notin (0, +\infty)$,所以 $y = \sqrt{x}$ 既不是奇函数,也不是偶函数.

三、函数的单调性

定义3　设函数 $f(x)$ 在某个区间 Ⅰ 上有定义.若对于任意的数 $x_1, x_2 \in$ Ⅰ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) < f(x_2) \tag{1.9}$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的;若对于任意的数 $x_1, x_2 \in$ Ⅰ,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2) \tag{1.10}$$