胡瑶光 编著

量子场论

LIANG ZI CHANG LUN

华东师范大学出版社

量 子 场 论

胡 瑶 光 编著

华东师范大学出版社

量 子 场 论

胡 瑶 光 编著

华东师范大学出版社出版发行
(上海中山北路3663号)
新华书店上海发行所经销
浙江上虞汤浦印刷厂排版　　宜兴南漕印刷厂印刷
开本：850×1168 1/32　印张：13.25　字数：330千字
1988年8月第一版　　1988年8月第一次印刷
印数：1—5,000本
ISBN7—5617—0203—5/O.016　定价：3.80元

前　言

量子场论是粒子物理的基本理论。它的基本思想和方法，也被用于其它物理学科。它是理论物理研究生的必修课程，也是物理理论工作者需要的理论基础。

量子场论的专著和教材，已经出版了许多种。其中，有不少是有影响的著作。我们曾经采用作为教材或主要参考书的有：朱洪元的《量子场论》；胡宁的《量子场论》；邹国兴的《量子场论导论》，李政道的《粒子物理和场论导引》；D. Lurie 的《Particles and Fields》；J. D. Bjorken，S. D. Drell 的《Relativistic Quantum Fields》。现在，我们按照研究生课程的要求，编写了本书。希望它能够比较适合当前的教学需要。本书内容的深广度，与 Lurie 的相近。本书采用的度规和符号，与 Bjorken 和 Drell 的一致，但 γ_5 差一负号。

近廿年来，粒子物理的发展是迅速的，规范对称理论逐渐占居了统治地位。我们力图在本书中反映新的理论观点和方法，让科学研究成果尽快传播开去。但是，量子场论是一门基础课程，必需论述许多基本的、比较成熟的内容。新成果的反映，只能是适度的。所以，本书反映的新成就，是不充分的。拙作《规范场论》，补充了这方面的不足，可以作为本书的续篇。

粒子物理是一门比较艰深的学科。量子场论是一门比较不容易掌握的学科。初学者常常碰到难以学懂的困难。鉴于此，我们在着重阐述物理概念的同时，详细论述了计算的过程和要点，力图让读者比较容易懂一些。这是我们的愿望。

现代的量子场论，都是拉格朗日场论。拉格朗日密度，在量子场论中，居于显要地位。它能够明显地揭示场的对称性。它

和运动方程有简明、直接的关系。由它进行量子化和重正化，也是简便的。本书的第一章论述自由场的波动方程。第二章由波动方程推出自由场的拉格朗日密度，进而导出在对称变换下，场量的变换规律。第三章用正则方法把场量子化，并讨论场的量子性质。对称性在物理理论中的地位，与日俱增。在现代的相互作用理论中，它逐渐占居控制地位。现在，人们主要从对称性的要求，来确定相互作用的形式。特别是，从定域规范不变的要求，来确定规范相互作用理论。质量的存在，总要破坏某些对称性。对称性的破缺，可能就是质量的起源。在本书的第四章中，我们阐述了这些理论思想和方法，介绍了相应的理论。

相互作用场的运动方程，是非线性方程，求解是困难的。这给量子场论解决实际问题带来不便。人们采用相互作用表象、绝热近似、微扰理论来处理散射问题，就避开了这一困难，取得了重大成就。我们在第五、六、七章中，论述了这些方法，并用它计算了一些过程。

圈图计算存在发散困难，曾经使量子场论的发展停顿下来。人们用重正化方法，克服了这一困难，并获得了新的成果。我们在第七、第八章中，进行了系统的、简要的论述。

格林函数和相互作用流、荷，是粒子物理中带有普遍意义的课题。我们在第九、第十章中，对它们作了基本的、简单的讨论。

量子场论涉及的内容，是多方面的。我们认为，本书论述的内容、观点、方法，是基本的、重要的，是研究生必需掌握的。限于作者的水平，取材未必恰当，论述也难免有不妥之处，请读者批评指正。

蒋元方同志以我的讲稿和他的听课笔记为基础，曾编印了一本“量子场论”讲义，作者在 1984 年夏用于烟台讲学，是本书的初稿；李凌云同志负责编辑本书。作者对他们表示深深的感谢。

目　录

第一章　相对论波动方程及其平面波解

在量子场论中，经典的自由场波动方程及其平面波解，具有基本的、重要的意义。在这一章里，我们将导出自由场的相对论波动方程，求出它的平面波解，阐明解的意义。薛定格方程是非相对论性的。在第一节中回顾一下，旨在为以下诸节中导出相对论方程作引导。在第一节中我们还要介绍一些符号和度规。

§1. 引　言

在量子力学中，粒子的状态用波函数 $\psi(x)$ 描述，粒子的运动规律，由薛定格(Schrödinger)方程

$$i\frac{\delta\psi(x)}{\partial t}=-\frac{\nabla^2}{2m}\psi(x)+V(x)\psi(x) \tag{1-1}$$

表征。m 是粒子的质量，$V(x)$ 是粒子所处的外场的势。

符号和度规　x 表示粒子的时空坐标，是一个有四个分量的四维矢量。x^μ $(\mu=0,1,2,3)$ 是它的逆变分量，与 $1+3$ 维的时空坐标 t 和 $\vec{x}$ 的关系为：$x^0=t$，$x^1=x$，$x^2=y$，$x^3=z$，简写为 $x^\mu=(t,\vec{x})$。我们采用的度规张量是

$$g^{\mu\nu}=g_{\mu\nu}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}。\tag{1-2}$$

即 $g_{00}=g^{00}=1$，$g_{11}=g^{11}=g_{22}=g^{22}=g_{33}=g^{33}=-1$，$\mu\neq\nu$ 的

$g_{\mu\nu}=0$。四维时空矢量 x 的协变分量定义为 $x_\mu=g_{\mu\nu}x^\nu$，与 1+3 维时空坐标的关系为：$x_0=t, x_1=-x, x_2=-y, x_3=-z$，简写为 $x_\mu=(t,-\vec{x})$。四维时空矢量 x 的模定义为

$$x^2=x^\mu x_\mu=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu=t^2-\vec{x}^{\,2}。\tag{1-3}$$

我们用 p 表示四维动量，其逆变分量 p^μ（$\mu=0,1,2,3$）与 1+3 维能量 E 和动量 $\vec{p}$ 的关系为：$p^0=E$，$p^1=p_x$，$p^2=p_y$，$p^3=p_z$，简写为 $p^\mu=(E,\vec{p})$。其协变分量定义为 $p_\mu=g_{\mu\nu}p^\nu$，与 1+3 维能量、动量的关系为：$p_\mu=(E,-\vec{p})$。四维动量的模方定义为

$$p^2=p^\mu p_\mu=g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu=E^2-\vec{p}^{\,2}。\tag{1-4}$$

四维时空坐标 x 和四维动量 p 的标积定义为

$$x\cdot p=x^\mu p_\mu=x_\mu p^\mu=Et-\vec{p}\cdot\vec{x}。\tag{1-5}$$

上述的符号、度规以及模方和标积的定义等，适用于其它的四维矢量和相应的 1+3 维的量，在本书中具有普遍的意义。

我们还用 ∂ 表示四维时空的导数，其协变分量 ∂_μ 和逆变分量 ∂^μ 分别是

$$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ \nabla\right),$$

$$\partial^\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},\ -\nabla\right),\tag{1-6}$$

$$\partial_\mu=g_{\mu\nu}\partial^\nu,\quad \partial^\mu=g^{\mu\nu}\partial_\nu,$$

其模方定义为

$$\partial^2=\partial^\mu\partial_\mu=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2。\tag{1-7}$$

自然单位　我们论述的量子场论，是相对论的量子理论，因而公式中常常要出现光速 c 和普朗克常数 h。为了使公式形式简洁，而采用自然单位。在自然单位中，

$$c=\hbar=1,\ \hbar=h/2\pi。\qquad (1\text{-}8)$$

这样，在公式中就将不出现 c 和 h。

波函数的意义 在介绍了一些符号、度规和单位以后，我们再来讨论薛定格方程 (1-1) 式。首先，讨论满足 (1-1) 式的波函数 $\psi(x)$ 的意义。大家知道，它具有几率的意义，$\psi^*(x)\psi(x)$ 表示时刻 t 在 $\vec{x}$ 点发现粒子的几率密度。为什么它能作这样的解释呢？因为它满足几率流守恒定律，而且是正定的。几率守恒和正定是物理上必需满足的要求。

对 (1-1) 式取复数共轭，得

$$-i\frac{\partial\psi^*(x)}{\partial t}=-\frac{\nabla^2}{2m}\psi^*(x)+V(x)\psi^*(x)。\qquad (1\text{-}9)$$

这里假设外场的势 $V(x)$ 是实的。用 $\psi^*(x)$ 左乘 (1-1) 式，用 $\psi(x)$ 右乘 (1-9) 式，然后相减，得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi^*(x)\psi(x))=\frac{1}{2m}\nabla\cdot(\psi^*(x)\nabla\psi(x)-\nabla\psi^*(x)\psi(x))。\qquad (1\text{-}10)$$

令

$$j^0(x)=\psi^*(x)\psi(x),$$

$$\vec{j}=\frac{-i}{2m}(\psi^*(x)\nabla\psi(x)-\nabla\psi^*(x)\psi(x))。$$

考虑到

$$j^\mu=(j^0,\vec{j}),$$

$$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\left(\frac{\partial}{\partial t},\nabla\right)$$

(1-10) 式就可以写成

$$\partial_\mu j^\mu(x)=0,\qquad (1\text{-}11)$$

这就是表示守恒定律的连续性方程。

实际上，将 (1-11) 式对三维空间求体积分

$$\int \partial_\mu j^\mu(x)\, dV = \int \left(\frac{\partial j^0(x)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(x) \right) dV = 0, \tag{1-12}$$

对于上式中的第二项，利用高斯定理

$$\int_V \nabla \cdot \vec{j}(x) dV = \oint_s \vec{j}(x) \cdot d\vec{S},$$

当所有的场都局限在体积 V 中时，在包围体积 V 的 S 面上没有场，$\vec{j}(x) = 0$，因而上列积分为零。这时，(1-12) 式为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int j^0(x)\, dV = 0。$$

由是可知，(1-11) 式确实是表示守恒定律的方程，$j^\mu(x)$ 是守恒流，而

$$Q = \int j_0(x)\, dV \tag{1-13}$$

是守恒量，$j_0(x)$ 就是守恒量的密度。

由是可知，(1-10) 式是表示守恒定律的连续性方程，而

$$j^\mu = (j^0, \vec{j}), \quad j^0 = \psi^* \psi,$$

$$\vec{j} = \frac{-i}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \psi)$$

是守恒流。而且 $j^0 = \psi^*\psi \geq 0$ 是正定的。所以，可以把 $\psi^*(x)\psi(x)$ 解释为几率密度。

方程的导出 方程 (1-1) 式是薛定格在 1926 年建立的。为了下面要导出相对论的波动方程，这里，我们用一种便于推广的方法来导出薛定格方程。显然，方程 (1-1) 式

$$i \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = - \frac{\nabla^2}{2m} \psi(x) \tag{1-14}$$

即自由粒子的场方程，有平面波解

$$\psi(x) \sim e^{-ip \cdot x} = e^{-iEt + i\vec{p} \cdot \vec{x}}.$$

代入 (1-14) 式，得

$$E\psi(x)=\frac{p^2}{2m}\psi(x),\quad E=\frac{\overrightarrow{p}^2}{2m}。\tag{1-15}$$

这是非相对论的、能量 E 动量 $\overrightarrow{p}$ 和质量 m 的关系式。反过来，我们把 (1-15) 式作为基础，从它出发，作一代换

$$E\to i\frac{\partial}{\partial t},\quad \overrightarrow{p}\to -i\nabla,\tag{1-16}$$

就可以由 (1-15) 式得到 (1-14) 式。即在 (1-16) 式的代换下

$$E\psi(x)=\frac{\overrightarrow{p}^2}{2m}\psi(x)\to$$

$$i\frac{\partial\psi(x)}{\partial t}=-\frac{\nabla^2}{2m}\psi(x)。\tag{1-17}$$

薛定格方程自1926年建立以来，已得到广泛的证实和应用，成为现代科学技术的基础。但是，它是非相对论的。在 (1-1) 式中，含时间的一次导数，空间的两次导数，时间、空间处于不同的地位。在 (1-15) 式中，能量是一次方，动量是二次方，也处于不同的地位。相对论认为：时间、空间合成四维矢量 $x=(t,\overrightarrow{x})$ 是平等的；能量、动量合成四维动量 $p=(E,\overrightarrow{p})$ 也是平等的。从相对论的观点看来，薛定格方程是非相对论的，是有缺陷的，是需要进行修改的。因此，人们致力于建立相对论的波动方程。

§2. 克莱因-戈登方程

第一个相对论波动方程，是克莱因(Klein)和戈登(Gordon)在 1926 年建立的，人们称之为克莱因-戈登方程。

方程的导出　上一节说过，用非相对论的能量 E、动量 $\overrightarrow{p}$ 和质量 m 的关系 (1-15) 式，按 (1-16) 式将能量、动量换成相应的算符，就得到薛定格方程 (1-17) 式。我们以同样的方式，导出克莱因-戈登方程。从相对论的观点看来，能量、动量、质量的

关系，不是(1-15)式，而是

$$E^2=\vec{p}^2+m^2。\tag{1-18}$$

当粒子速度很小，以致$|\vec{p}|\ll m$时，

$$E=\sqrt{\vec{p}^2+m^2}=m\sqrt{1+\frac{\vec{p}^2}{m^2}}\simeq m\left(1+\frac{\vec{p}^2}{2m^2}\right)。$$

这表明：(1-15)式是(1-18)式在非相对论条件下的近似。将(1-18)式中的能量、动量，作如(1-16)式的代换，即

$$E\to i\frac{\partial}{\partial t},\quad \vec{p}\to -i\nabla,$$

$$E^2\phi(x)=(\vec{p}^2+m^2)\phi(x)\to$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x)=-\nabla^2\phi(x)+m^2\phi(x),$$

就得到克莱因-戈登方程

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2+m^2\right)\phi(x)=0。\tag{1-19}$$

由于时空导数构成四维矢量$\partial=(\partial_0,\nabla)$，上式可以写成

$$\begin{aligned}&(\partial^2+m^2)\phi(x)=0,\\&(\partial^\mu\partial_\mu+m^2)\phi(x)=0,\end{aligned}\tag{1-20}$$

这就是四维形式的克莱因-戈登方程。

平面波解 (1-19)式是线性齐次方程，有平面波解

$$\phi(x)\sim e^{\mp ik\cdot x}$$

k是四维动量，$k^\mu=(E,\vec{k})$。把上式代入(1-20)式，得

$$(-k^2+m^2)\phi(x)=0,$$

$$k^2-m^2=E^2-\vec{k}^2-m^2=0,\tag{1-21}$$

$$E=\pm\omega,\ \omega=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}。$$

这表明：克莱因-戈登方程有正能解，也有负能解。用它来描述

粒子的运动，被描述粒子的能量，可以是正的，也可以是负的。人们知道，量子化的克莱因-戈登方程，描述自旋为零的粒子。有整数自旋的自由粒子，是不允许有负能量的。如果允许它具有负能量，那末按照物体总是力图使自己能量最低的自然规律，它们就都会力图下落到能量 $E\to-\infty$ 的状态，就会招致自然界的灾难。这就是所谓的克莱因-戈登方程的负能解困难。

令 $k^0=\omega$，则 $k\cdot x=\omega t-\vec{k}\cdot\vec{x}$，

$$i\frac{\partial e^{-ikx}}{\partial t}=+\omega e^{-ikx},\quad i\frac{\partial e^{ikx}}{\partial t}=-\omega e^{ikx},$$

即 e^{-ikx} 是正能解，e^{ikx} 是负能解。有时，人们把 e^{-ikx} 叫做正频解，把 e^{ikx} 叫做负频解。

正交、规一化 对于正能解，人们常取

$$f_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2V\omega}}e^{-ikx},\tag{1-22}$$

V 是规一化体积。在体积 V 中，它是按照

$$\int f_k^*(x)i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}(x)\,dV=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\tag{1-23}$$

规一化的。$\overleftrightarrow{\partial_0}$ 的定义是

$$a\overleftrightarrow{\partial_0}b=a\frac{\partial b}{\partial t}-\frac{\partial a}{\partial t}b,\tag{1-24}$$

把 (1-22) 式、(1-24) 式代入 (1-23) 式左边，得

$$\int f_k^*(x)\,i\overleftrightarrow{\partial_0}f_{k'}(x)dV=\frac{1}{2V\sqrt{\omega\omega'}}(\omega'+\omega)\int e^{i(k-k')x}dV。$$

当 $\vec{k}=\vec{k'}$ 时，$\omega=\omega'$，上式积分为

$$\frac{1}{V}\int dV=1。$$

当$\vec{k} \neq \vec{k'}$时，因$dV = dx_1 dx_2 dx_3$，对任一坐标如x_1的积分，有

$$\int e^{i(k_1-k_1')x_1}dx_1 = \frac{1}{i(k_1-k_1')}e^{i(k_1-k_1')x_1}\Big|_{x_1'}^{x_1''}$$

我们假设边界条件是周期性的，即假设

$$e^{i(k_1-k_1')x_1'} = e^{i(k_1-k_1')x_1''},$$

因而上列积分为零。这就证明了（1-23）式表示的正能解的正交、规一化。

波函数的意义　为了理解波函数$\phi(x)$的意义，我们先导出有关的连续性方程。对克莱因-戈登方程（1-20）式

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0 \tag{1-20}$$

取复数共轭，得

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi^*(x) = 0。\tag{1-25}$$

以$\phi^*(x)$左乘（1-20）式，以$\phi(x)$右乘（1-25）式，得

$$\phi^*(x)(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0,$$
$$\phi(x)(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi^*(x) = 0,$$

两式相减，得

$$\phi^*(x)\partial^\mu\partial_\mu\phi(x) - \phi(x)\partial^\mu\partial_\mu\phi^*(x) = 0,$$
$$\partial^\mu[\phi^*(x)\partial_\mu\phi(x) - \phi(x)\partial_\mu\phi^*(x)] = 0, \tag{1-26}$$

?

这就是由克莱因-戈登方程导出的连续性方程。与（1-11）式、（1-13）式比较可知，它表示一种守恒定律，守恒流为

$$\partial^\mu j_\mu(x) = 0,$$
$$j_\mu(x) = i[\phi^*(x)\partial_\mu\phi(x) - \phi(x)\partial_\mu\phi^*(x)], \tag{1-27}$$

守恒量为

$$Q = \int j^0(x)dV,$$
$$j^0(x) = i[\phi^*(x)\dot{\phi}(x) - \phi(x)\dot{\phi}^*(x)]。\tag{1-28}$$

守恒流、守恒量中的i因子，保证了它们是实数。如果以正能

解、负能解代入 (1-28) 式，由于

$$i\dot{\phi}(x) = \pm\omega\phi(x),$$
$$-i\dot{\phi}^*(x) = \pm\omega\phi^*(x),$$
$$j^0(x) = \pm 2\omega\phi^*(x)\phi(x),$$

$\phi^*(x)\phi(x)$ 是正定的，因而 $j^0(x)$ 是可正可负的。所以，$j_0(x)$ 虽然是守恒量的密度，却不能作几率解释。若作几率解释，就有所谓的负几率的困难。满足克莱因-戈登方程的波函数，可以有负能量、负几率的解。这是物理上不允许的。因此，克莱因-戈登方程，在量子力学的框架内，是没有意义的。正是这种原因，克莱因-戈登方程提出不久，就被搁置起来。直至 1934 年，泡里 (Pauli) 和韦斯可夫(Weisskopf)把它量子化，才使它复活了。

§3. 狄拉克方程

克莱因-戈登提出的相对论波动方程，因负能困难和负几率困难而被搁置起来了。1928 年，狄拉克 (Dirac) 提出了另一个相对论波动方程，人们称之为狄拉克方程。

线性因子化 薛定格方程含时间的一次导数、空间的两次导数，是非相对论的。克莱因-戈登方程中，时空导数都是二次的，是相对论的，但有负能困难和负几率困难。狄拉克设想，正确的相对论波动方程中，时空导数都是一次的。为此，他把相对论的能量、动量、质量的关系式

$$E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = 0$$

分解为两个线性因子。按照一般的代数方法，上式可以分解为

$$E^2 - \vec{p}^2 - m^2 = \left(E + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right)\left(E - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\right),$$

把 E、$\vec{p}$ 换成算符后，$\sqrt{-\nabla^2 + m^2}$ 就成为没有意义的东西，不能用来建立方程。狄拉克提出，用 $\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m$ 代替