

大学物理教学研究

籍延坤 著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

大学物理教学研究

籍延坤 著

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

本著作由大连交通大学籍延坤教授根据几十年从事基础物理教学的体会和进行基础物理教学研究所积累的资料撰写而成。

本著作主要撰写了大学物理中一些专题独到的和更严格的处理方法,其内容包括力学、电磁学、热学、光学、近代物理和物理实验。其特点是概念准确、创意新颖和叙述严谨。

本著作适合作为高等院校大学物理课程和大学物理实验课程的教学参考书,也可供有关教师和学生参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理教学研究 / 籍延坤著. — 北京: 中国铁道出版社, 2013. 5

ISBN 978-7-113-16540-6

I. ①大… II. ①籍… III. ①物理学—教学研究—高等学校 IV. ①O4-42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 096174 号

书 名: 大学物理教学研究
作 者: 籍延坤 著

策 划: 李小军
责任编辑: 马洪霞 徐盼欣
封面设计: 付 魏
封面制作: 刘 颖
责任印制: 李 佳

读者热线: 400-668-0820

出版发行: 中国铁道出版社(100054, 北京市西城区右安门西街 8 号)

网 址: <http://www.51eds.com>

印 刷: 北京市燕鑫印刷有限公司

版 次: 2013 年 5 月第 1 版 2013 年 5 月第 1 次印刷

开 本: 720mm×960mm 1/16 印张: 18.5 字数: 363 千

书 号: ISBN 978-7-113-16540-6

定 价: 45.00 元

版权所有 侵权必究

凡购买铁道版图书,如有印制质量问题,请与本社教材图书营销部联系调换。电话:(010)63550836

打击盗版举报电话:(010)63549504

前 言

严格地讲,大学物理包含大学物理理论和大学物理实验,而大学物理理论习惯上又简称为大学物理学。大学物理学和大学物理实验是理工科大学生的两门重要的基础课,对学生专业基础的培养,科研素质的训练,以及辩证唯物主义世界观的形成等,都有重要意义。然而,我们在教学实践中发现,目前的大学物理和大学物理实验教材,包括一些经典教材,在有些问题的处理上仍有不尽完善和不准确之处,或者由于教材篇幅有限,某些问题不可能阐述得非常清楚。为了弥补这些不足之处,让学生能更好地理解大学物理中的基础知识、基本思想、基本规律和基本方法,以及教师能更好地讲透大学物理,作者在多年教学和教学研究的基础上,撰写了这本《大学物理教学研究》著作。

本著作共分成八篇。第1篇是力学,其中包括运动学基础、动力学基础、振动和波;第2篇是静电学;第3篇是静磁学;第4篇是电磁感应;第5篇是热学,其中包含气体分子动理论和热力学基础;第6篇是光学;第7篇是近代物理,这部分包括相对论力学基础和量子物理基础;第8篇是物理实验。

通过对一些具体物理问题的研究,力图强调物理概念的准确性和物理理论的严密性,书中较多地运用了数学理论,对这些专题给出更合理、更严格的处理方法,某些专题以论文形式已经在一些期刊上发表。对于多数读者来说,一定会受益匪浅。

由于作者水平有限,书中的某些论述,往往强调了问题的一个侧面,个别论点也难免片面或错误,作者诚恳地希望得到读者的批评和指正。

编 者

2013年3月

目 录

第 1 篇 力学	1
1 切向加速度和法向加速度的几种推导方法	1
1.1 方法 1/1 1.2 方法 2/2 1.3 方法 3/2	
1.4 方法 4/3 1.5 方法 5/4 1.6 方法 6/5	
1.7 方法 7/6 1.8 方法 8/6	
2 一道追击问题的几种算法	7
3 哪种方法更准确	9
3.1 示例 1/9 3.2 示例 2/11 3.3 示例 3/12	
3.4 示例 4/13	
4 哪种解法是正确的	15
5 系统的动量守恒吗	17
5.1 变质量运动方程/17 5.2 系统动量守恒吗/17	
6 质点与球壳之间的引力	18
7 有心力的保守性和正压力非保守性的数学证明	19
7.1 有心力是保守力/19 7.2 保守力的几点讨论/20	
8 地球绕太阳旋转的角动量绝对守恒吗	22
9 刚体转动角速度一定增大吗	23
10 关于物理学中“轻绳和轻滑轮”的几个问题的讨论	26
10.1 轻绳/26 10.2 轻滑轮/27	
11 波动位相的几种建立方法	28
11.1 位相落后法/28 11.2 高等数学法/28	
11.3 初相求解法/29 11.4 空间坐标平移法/29	
11.5 时间坐标平移法/29	
12 机械波波动能量的一般表达式	29
12.1 质元的振动动能/29 12.2 质元的形变势能/30	

12.3 质元的机械能/30	
13 驻波的能量	31
14 滑行距离与倾角无关吗	33
15 对于一切惯性系,封闭保守系统(受到的外力矢量和为零的系统,内力是保守力) 机械能均守恒	34
16 物体简化成质点的条件	35
17 非惯性系中牛顿第三定律成立否	36
18 功的定义 $A = \int_{\vec{r}_1(O)}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 表达式中的 $d\vec{r}$ 表示谁的位移	37
19 波动质元的势能含有重力势能吗	37
20 绳波中任意质元的运动方程的求解法	39
21 刚体的动能	41
22 时空对称性与守恒定律	44
22.1 空间平移对称性与动量守恒定律/44	
22.2 时间平移对称性与机械能守恒/45	
22.3 空间转动对称性与角动量守恒定律/45	
第2篇 静电学	47
1 电场线和电场强度的关系	47
1.1 $\vec{E}$ 与 $\vec{n}$ 的关系式/47	
1.2 $\Delta\Phi \left(= \iint_{\Delta S} \vec{E} \cdot d\vec{S} \right)$ 与 ΔN 的关系式/50	
2 对于远场点而言分子产生的电场可以等效于电偶极子产生的电场	52
3 用叠加法求均匀带电球面外的电场强度	52
4 用叠加法求无限长带电圆柱面内外的电场强度	56
5 电场线密的面上各点场强一定大于疏的面上各点场强吗	58
6 等势面密的面上各点场强一定大于疏的面上各点的场强吗	59
7 任意带电体表面上的场强与其左右两点场强的左极限和右极限的关系	60
8 非严格平行的平板电容器的电容的几种计算方法	60
9 导体表面附近的电场强度	62
9.1 导体表面附近电场强度与导体表面垂直吗 /62	

9.2 导体表面附近电场强度的法向分量/63	
10 散度处处为零的矢量场一定是非保守场吗	64
11 带电导体圆盘轴线上的电场强度和电势	65
12 两个相对放置的平行圆柱体单位长度上的电容	66
13 静电场的高斯定理的证明	75
13.1 高斯公式法/75	13.2 立体角法/76
14 高斯面的选取	78
15 对称性电荷电场方向的判断	80
16 电容器外的带电体对电容器内的电场和电容有影响吗	81
16.1 两点推论/81	
16.2 电容器外部的带电体对其电容的影响/82	
17 导体表面附近的电场强度	83
18 自由电荷、束缚电荷和极化电荷的定义	85
18.1 自由电荷、束缚电荷常见的几种定义的讨论/85	
18.2 极化电荷的定义/85	
19 介质高斯定理是准确的结果吗	89
20 空腔导体内外侧电荷在特殊点的场强	90
21 导体表面电荷面密度 σ 与曲率 K 的关系	92
22 点电荷在静电场中移动一周,电场力对其做功等于零吗	94
23 接地导体的电势等于零吗	94
24 同种电荷一定相互排斥吗	95
第3篇 静磁学	97
1 用叠加法求无限长载流圆柱面内外的磁感	97
2 直圆柱筒横向电流磁感方向的判断	98
2.1 磁场线方程判断法/98	2.2 毕奥-萨伐尔定律法判断法/99
2.3 反证法/99	2.4 对称原理法/99
3 对于远场点而言,分子产生的磁场可以等效于分子电流产生的磁场	100
4 静磁场安培环路定理不成立吗	101
5 不同惯性系中测得的磁感	101

6	证明旋转均匀带电球体内部的磁场是均匀的	103
7	电流面上某一点的磁感与该点两侧无限接近该点的两点磁感的关系	105
8	运动电荷的平均磁感和平均磁矩	106
8.1	平均磁感/106	8.2 平均磁矩/108
9	无限长理想螺旋管的磁场	110
9.1	方法 1/110	9.2 方法 2/110
10	稳恒条件下任意载流回路受自身磁场的作用力恒等于零的证明	112
11	在均匀磁场中载流圆环的张力计自身电流的作用吗	113
12	安培环路定理证明	114
13	截面任意形状的细导线密绕无限长直螺旋管内的磁感	120
14	静磁场的高斯定理的数学证明	121
15	关于安培力的起因	122
15.1	洛伦兹力和安培力的关系/122	15.2 结论/124
15.3	安培力的起因/124	
16	均匀磁场对闭合载流线圈磁力矩公式的数学证明	124
16.1	方法 1/124	16.2 方法 2/127
		16.3 方法 3/128
17	两个载流线圈之间相互作用磁势能与磁势	129
18	对称性电流磁感应强度的方向	130
19	两种对称分布电流磁感应强度的方向和安培环路的形状	131
19.1	磁感应强度方向/131	19.2 环路形状/131
20	位移电流对磁场的贡献	133
21	细导线密绕半个球面,总匝数为 N ,每匝通有电流 I ,求球心的磁感大小	135
22	求无限长平行直导线单位长度上的自感	137
23	旋度处处为零的矢量场一定是保守场吗	138
第 4 篇	电磁感应	140
1	法拉第电磁感应定律的证明	140
2	关于感应电动势的一个佯谬	143
3	无限长平行直导线自感的自感	145
4	法拉第电磁感应定律中的磁通 $\Phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ 含有位移电流的磁通吗	145

5	用动能定理建立全电路欧姆定律	147
5.1	RL 电路/147	5.2 RLC 电路/148
6	感生电场的高斯定理的证明	149
7	无限长电缆单位长度上自感一种新的计算方法	150
7.1	“无限长”电缆自感的定义/150	
7.2	“无限长”矩形面积上磁通量/151	
7.3	“无限长”电缆单位长度上的自感/153	
8	计算“无限长”平行导体回路单位长度上自感的一种新的方法	154
9	关于 $M_{12}=M_{21}$ 的数学法证明	157
9.1	弱磁质情况/157	9.2 强磁质情况/160
10	关于“三维导体”自感的计算方法	160
11	长直或环形理想螺旋管的自感	162
第 5 篇 热学		163
1	气体动理论的基本统计规律的建立	163
1.1	分子热运动速度分量分布的统计规律/163	
1.2	速度分布和角速度分布的统计规律/166	
1.3	速率分布的统计规律/166	
1.4	温度和压强的统计规律/167	
1.5	能量均分定理的统计规律/167	
1.6	内能的统计规律/167	
1.7	平均碰撞频率和平均自由程的统计规律/167	
2	理想气体热力学内能的定义	168
3	两种不同气体分子的平均速率	170
4	根据平均值公式 $\bar{y}=f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \dots, \bar{x}_n)$ 可得 $\bar{v}=\sqrt{\bar{v}_x^2+\bar{v}_y^2+\bar{v}_z^2}=0$? $\bar{v}\neq 0$, 为什么	171
5	分子运动相对平均速率	172
5.1	计算方法 1/172	5.2 计算方法 2/172
6	试分析任意平衡过程的吸放热情况	173
7	在平衡态下, 分子速率大于最可几速率的分子数占总分子数的百分比	174

8 大量分子速率分布一定服从麦克斯韦分布吗·····	175
第6篇 光学 ·····	176
1 光栅衍射谱线级次的讨论·····	176
1.1 正入射/176	1.2 斜入射/177
2 相对不同参照系光频率相同吗·····	178
3 关于折射率几点说明·····	178
3.1 定义/178	3.2 相速折射率可以小于1/179
3.3 常见几种折射率小于1的材料/180	
4 布儒斯特定律的简单证明·····	180
5 介质表面三种波的位相关系·····	182
5.1 机械波/182	5.2 光波/183
6 自然光通过偏振片后的透射光强的证明·····	185
6.1 方法1/185	6.2 方法2/186
7 光的叠加·····	186
7.1 相干叠加/186	7.2 非相干光/187
8 光子的波粒二象性·····	189
8.1 双缝干涉实验结果/189	8.2 粒子性/189
8.3 波动性/189	8.4 光子的波粒二象性/190
9 杨氏双缝干涉实验条纹的最高级次究竟是多少·····	191
10 杨氏双缝干涉条纹形状 ·····	192
11 根据惠更斯-菲涅尔原理推导半波带法·····	194
12 光栅衍射条纹位置的探讨 ·····	196
13 迈克耳孙干涉实验中两束光是否有 $\frac{\lambda}{2}$ 的光程差 ·····	199
14 偏振光的定义的说明 ·····	199
14.1 自然光/199	14.2 部分偏振光/200
15 条纹的形状如何 ·····	201
16 费马原理 ·····	202
17 等倾干涉条纹间距的变化规律 ·····	204
18 在洛艾镜干涉实验中,与平面反射镜的边缘的接触处一定是暗纹吗·····	207

19 点光源发出的球面波经过单缝时,其波的波面是柱面波吗.....	207
第 7 篇 近代物理	208
1 迈克耳孙-莫雷实验的说明	208
2 孪生子佯谬的解释.....	208
3 德布罗意波.....	210
4 洛伦兹变换的几种推导方法.....	211
4.1 方法 1/211	4.2 方法 2/215
4.4 方法 4/220	4.5 方法 5/220
4.3 方法 3/217	
5 光子的能量可分吗.....	221
6 静止质量是常量吗.....	222
7 隧 道 佯 谬.....	222
8 氢原子的激发态能量表达式一定是 $W_n = -\frac{1}{n^2} \left(\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \right) = -\frac{13.6}{n^2} \text{eV}$ 吗.....	223
9 洛伦兹变换的推广.....	223
10 德布罗意波频率和波长的不确定性	225
11 证明静止的自由电子不可能产生光电效应	225
12 关于康普顿效应中散射光的成分的解释	225
12.1 波长大于入射光波长的光/225	
12.2 波长严格等于入射光的波长/226	
13 光电效应几个问题的探讨	227
13.1 经典波动观点交变电场的功 $A = kI\tau$ 的证明/227	
13.2 当入射光为单色光时,光电子速率是多值的/228	
13.3 $U =$ 遏止电压 U_a ,光电流 $i = 0$ /228	
13.4 关于饱和电流 i_m 的几种解释的探讨/228	
13.5 $eU_a = \frac{1}{2}m_0 v_m^2$ 还是 $eU_a = mc^2 - m_0 c^2$ /230	
13.6 光电效应方程适用于哪个参考系/230	
13.7 光电效应中能否吸收多个光子产生而逸出/231	
13.8 动能和遏止电压一定服从 $eU_a = \frac{1}{2}mv_m^2$ 关系吗/232	
14 氢原子特征量的简易求法	233

14.1	能量/233	
14.2	外磁场方向角动量分量/234	14.3 角动量大小/234
14.4	几点讨论/236	
15	微观粒子可作经典粒子处理的条件	236
16	关于薛定谔方程几个问题的说明	237
16.1	在非惯性系中成立吗/237	
16.2	薛定谔方程所确定的波函数和粒子能量受势能零点影响吗/238	
17	波函数的标准化条件	239
18	黑体辐射中的谐振子概念	240
18.1	瑞利-金斯看辐射场/240	
18.2	普朗克看辐射场/242	
19	氢原子能否吸收光子的部分能量而被激发	243
20	当高频(低波长)黑体辐射的实验曲线与瑞利-金斯曲线偏离较大,而在低频 (高波长)符合较好的另一种解释	243
21	动量和能量变换式及其协变性	244
22	非弹性碰撞能量的复原性	244
23	光子在介质中运动的两个问题	245
24	不同惯性系观测(察)光子的速度和速率有无变化	246
24.1	粒子角度考虑/246	
24.2	光波(经典电磁波,大量的光子组成)的角度考虑/246	
25	德布罗意关系 $\lambda = \frac{h}{p}$ 与动量零点选择有关吗	247
26	原子不能被电离吗	248
27	氢原子的角动量大小究竟是 $L = n\hbar$ 还是 $L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$	248
28	边界条件不同波函数相同吗	250
29	能否用低速电子通过单缝实现衍射	250
第8篇	物理实验	252
1	随机误差所服从的正态分布函数的证明	252
2	直接测量量的平均值与间接测量量平均值之间的关系	254
3	贝塞尔公式的证明	254

4	电子电量的测量	256
4.1	新的原理公式的推导	256
4.2	测量数据	258
4.3	数据处理	259
5	间接测量结果置信概率的计算	261
5.1	A类不确定度	261
5.2	B类不确定度	262
5.3	两种不确定度的合成	262
5.4	问题讨论	265
6	溶液折射率公式的一种验证方法	265
6.1	实验原理	265
6.2	实验结果	266
7	三线摆振动周期与角振幅的关系	267
7.1	周期和角振幅的关系	267
7.2	角振幅对振动周期的影响	269
7.3	角振幅的确定	270
8	也谈单摆作谐振动的最大摆角	270
9	关于迈克耳孙实验中几个问题的讨论	271
9.1	干涉条纹间距及其变化规律	271
9.2	不确定度评定方法	272
10	固体与液体接触角的测定	273
10.1	实验原理	273
10.2	实验数据	274
10.3	数据处理	274
10.4	实验讨论	275
11	牛顿环实验中的一种新的数据处理方法	276
11.1	实验数据处理的方法	276
11.2	实验数据处理	279
	参考文献	281

1 切向加速度和法向加速度的几种推导方法

1.1 方法 1

如图 1-1 所示, 设位移 $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ 方向的单位矢量为 $\Delta \vec{r}_0$, 则根据速度的定义有

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| \Delta \vec{r}_0 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \\ &= \frac{ds}{dt} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \vec{r}_0 = \frac{ds}{dt} \vec{e} = v_r \vec{e}\end{aligned}$$

即

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{e}$$

式中, $d\vec{r} = ds\vec{e}$, 当 $ds > 0$, 表示 $d\vec{r} \uparrow \uparrow \vec{e}$; 当 $ds < 0$, 表示 $d\vec{r} \uparrow \downarrow \vec{e}$;

加速度为

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_r}{dt} \vec{e} + v_r \frac{d\vec{e}}{dt}$$

根据矢量的正交分解可得

$$\vec{e} = r \cos \theta \vec{i} + r \sin \theta \vec{j} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

式中, $\theta = (\vec{e}, \vec{i})$.

又

$$\vec{n} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

所以有

$$\vec{a} = \frac{dv_r}{dt} \vec{e} + v_r \frac{d\theta}{dt} \vec{n}$$

注意: $\frac{d\theta}{dt}$ 不是质点对极坐标系极点 O 的角速度, 因为质点不是绕 O 点在转动, 只

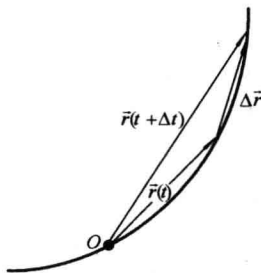


图 1-1

能说是轨道上质点不同位置的切向方位角的变化率,或可以视为质点对曲率中心的角速度,因为只有对曲率中心质点才可以视为转动.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = v_r \frac{d\theta}{ds} = v_r \left/ \frac{ds}{d\theta} \right.$$

由线量与角量的关系可得

$$ds = \rho d\theta$$

式中, ρ 为曲率半径, 即

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{v_r}{\rho} \\ \vec{a} &= \frac{dv_r}{dt} \vec{e} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} = \vec{a}_r + \vec{a}_n = a_r \vec{e} + a_n \vec{n} \end{aligned}$$

类比于直线运动, 因为加速度为 $\vec{a} = a_x \vec{i}$, 代数量 a_x 可以唯一地确定加速度矢量 $\vec{a}$, 所以习惯上称 a_x 为质点作直线运动的加速度, 同理, 质点作曲线运动时, $\vec{a}_r$ 称为切向加速度, 因为 $\vec{a}_r = a_r \vec{e}$, 对于自然坐标系而言, 轨道是已知的, 即任意时刻, 轨道上的任意一点切向 $\vec{e}$ 也是已知的, 代数量 a_r 也可以唯一确定切向加速度矢量 $\vec{a}_r$, 所以习惯上称 a_r 为切向加速度; 依此类推, 因为 $\vec{a}_n = a_n \vec{n}$, 所以称 $\vec{a}_n$ 为法向加速度, 习惯上称 a_n 为法向加速度.

1.2 方法 2

设轨道上任意一点的曲率半径为 ρ , 相对于曲率中心, 质点可以视为转动, 其角速度为 $\vec{\omega}$, 速度为 $\vec{v}$, 则有

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{\rho} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} \end{aligned}$$

考虑到加速度具有瞬时性, 所以考虑某一时刻加速度时, 选择该时刻质点运动轨迹曲率中心为坐标原点, 则

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= \vec{r} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\beta} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \beta_z r \vec{e} + \omega^2 r \vec{n} \\ &= a_r \vec{e} + \frac{v^2}{r} \vec{n} = a_r \vec{e} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n} \end{aligned}$$

1.3 方法 3

如图 1-2 所示, 因为质点的速度为

$$\vec{v} = v_r \vec{e} = r\omega_z (\vec{k} \times \vec{r}_0) = (\omega_z \vec{k}) \times (r\vec{r}_0) = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

加速度为

$$\vec{a} = \omega_z \vec{k} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \beta_z \vec{k} \times \vec{r} = \omega_z \vec{k} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \beta_z \vec{k} \times \vec{r}$$

$$= \omega_z \vec{k} \times (\omega_z \vec{k} \times r \vec{r}_0) + \beta_z \vec{k} \times r \vec{r}_0 = \beta_z r \vec{\tau} + r \omega^2 \vec{n}$$

所以切向加速度和法向加速度分别为

$$a_\tau = r \beta_z = r \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}$$

$$a_n = r \omega^2 = \frac{v^2}{r}$$

推广:一般曲线运动可以视为若干个曲线元组成,每一曲线元在不同曲率半径 ρ 的圆周上,即质点作曲率半径可变的圆周运动,故

$$a_\tau = \rho \beta_z = \rho \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{dv_\tau}{dt}$$

$$a_n = \rho \omega^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

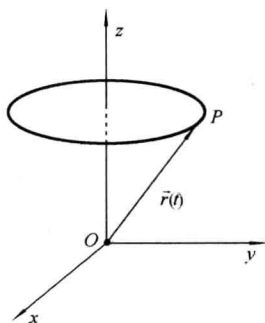


图 1-2

1.4 方法 4

如图 1-3 所示,作圆周运动的质点的位矢为

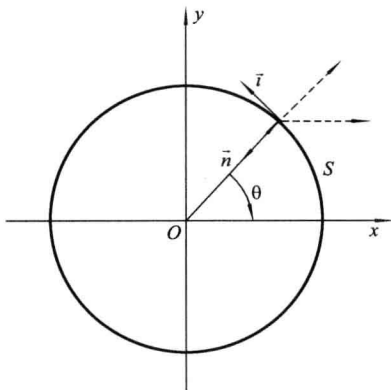


图 1-3

$$\vec{r} = R \cos \theta \vec{i} + R \sin \theta \vec{j}$$

速度为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} R \sin \theta \vec{i} + \frac{d\theta}{dt} R \cos \theta \vec{j}$$

$$= -\omega_z R \sin \theta \vec{i} + \omega_z R \cos \theta \vec{j} = R \omega_z (-\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j})$$

$$\vec{v} = \tau_x \vec{i} + \tau_y \vec{j} = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) \vec{i} + \sin \theta \vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

$$\vec{v} = R \omega_z \vec{\tau}$$

线速度为

$$v_{\tau} = R\omega_z = R \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

加速度为

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{e} + v_{\tau} \frac{d\vec{e}}{dt} = a_{\tau} \vec{e} + v_{\tau} (-\omega_z \cos \theta \vec{i} - \omega_z \sin \theta \vec{j}) \\ \vec{n} &= n_x \vec{i} + n_y \vec{j} = -\cos \theta \vec{i} - \sin \theta \vec{j}\end{aligned}$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$\begin{aligned}a_{\tau} &= \frac{dv_{\tau}}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = R \frac{d\omega_z}{dt} = R\beta_z \\ a_n &= v_{\tau} \omega_z = R\omega_z^2 = \frac{v^2}{R}\end{aligned}$$

同方法 3, 推广到一般曲线运动有

$$a_{\tau} = \rho\beta_z, \quad a_n = \rho\omega^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

1.5 方法 5

如图 1-4 所示, $\Delta v_n > 0, \Delta v_{\tau} > 0, v_{\tau} > 0, v'_{\tau} > 0$

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} \vec{n} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\tau}}{\Delta t} \vec{e} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' \cos \Delta \theta - v}{\Delta t} \vec{e} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' \sin \Delta \theta}{\Delta t} \vec{n} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' - v}{\Delta t} \vec{e} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' \Delta \theta}{\Delta t} \vec{n} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\tau}}{\Delta t} \vec{e} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v' \Delta \theta}{\Delta t} \vec{n} \\ &= \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{e} + v \frac{d\theta}{dt} \vec{n} = \frac{dv_{\tau}}{dt} \vec{e} + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}\end{aligned}$$

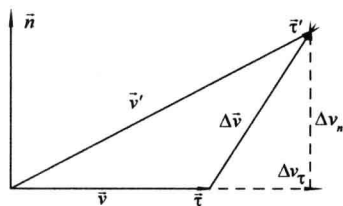


图 1-4

或如图 1-5 所示, $\Delta v_n > 0, \Delta v_{\tau} < 0, v_{\tau} > 0, v'_{\tau} > 0$

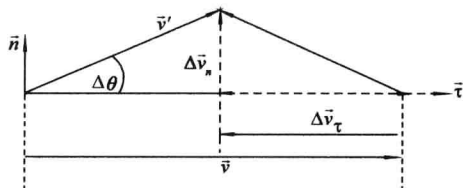


图 1-5

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} \vec{n} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_{\tau}}{\Delta t} (-\vec{e})$$