博弈论基础
要点注释与题解精编

BOYILUN JICHU
YAODIAN ZHUSHI YU TIJIE JINGBIAN

李光久 编著

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

博弈论基础
要点注释与题解精编

BOYILUN JICHU
YAODIAN ZHUSHI YU TIJIĚ JINGBIAN

李光久 编著

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇 江

内容提要

作为一本提供给学习博弈论的读者释疑和解题的教学辅导书，本书主要内容由三部分组成：(1) 要点。要点部分全面归纳了非合作博弈(包括完全信息静态、完全信息动态、不完全信息静态、不完全信息动态四种类型)的基本概念、基本理论与基本方法。(2) 注释。注释部分对要点涉及的概念和理论的内涵、解题的方法与结果所作的不同层次、不同角度的阐述。(3) 例题和类题。例题汇编了非合作博弈的诸多题型，并给出详尽而多样的求解过程；类题是留给读者练习之用，在各章最后一节给出各类题的详细解答。

本书除作为高等院校博弈论课程的教学辅导书之外，也可用于经管及相关专业的本科生、研究生自学或参考；同时，对博弈论感兴趣的不同专业领域的读者也可将其作为参考书使用。

图书在版编目(CIP)数据

博弈论基础要点注释与题解精编 / 李光久编著. —镇江：江苏大学出版社，2013.4
ISBN 978-7-81130-468-8

Ⅰ.①博… Ⅱ.①李… Ⅲ.①博弈论—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O225

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 065746 号

博弈论基础要点注释与题解精编

编　　著/李光久
责任编辑/陈　燕　许　龙
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/丹阳市兴华印刷厂
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张/20.75
字　　数/534 千字
版　　次/2013 年 4 月第 1 版　2013 年 4 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-468-8
定　　价/38.00 元

前　　言

这本书与本人编著的《博弈论基础教程》应该说是姊妹篇。《博弈论基础教程》自2005年问世以来，承蒙读者厚爱，第一次印刷的5 000册在一年多时间内销售告罄，出版社通知我在2007年又进行第二次印刷。这段时间，感谢个别读者通过电子邮件向我提出了书中的问题，更多的读者向我询求书中思考题的解答。当我回信仍不能满足读者要求时，心中总觉十分歉疚，因此萌生编写这本书的念头。经过近一年的收集资料、编写提纲、撰写书稿、逐题演算、反复修改，终于定稿。当我将书稿交付江苏大学出版社之时，正值江南桃红柳绿、莺飞草长的初春，在这美好的时节能给亲爱的读者奉上一份企盼的答卷，我也欣然自乐。

此前出版的《博弈论基础教程》作为博弈论入门的读物，只能说就非合作博弈的四种类型的基本概念、基本理论和基本方法给予了比较完整的阐述。如何进一步深入理解这些基本概念和基本理论，掌握基本方法，则是写作本书的目的了。

当前，对于学习经济学的学生，尤其是对于硕士研究生和博士研究生来说，学习博弈论如同学习计量经济学一样，成为他们知识架构中不可或缺的模块。更因为博弈论在理论和应用方面的成果不断问世，不仅深刻地改变了经济学中诸如产业组织理论、劳动经济学、宏观经济政策、公共经济学及国际经济学的内容，而且涉及管理学、政治学、法学、公共政策及国际关系等领域。因此，博弈论的读者群正在不断扩大，除了经济学专业的学生，还包括很多相关学科的不同层次的专业人士。如果说《博弈论基础教程》意在给以上读者铺设一条进入博弈论知识殿堂的台阶，那么这本书意在给读者准备一份观览博弈论前庭的导游手册，让读者对非合作博弈论的方方面面能有一个整体把握，尤其在解题方法上做了由浅入深的尝试。常言道："熟读唐诗三百首，不会吟诗也会吟。"学习一门学科知识也是如此，只有演算大量习题，才能理解相关的概念和理论。学习数学是这样，学习经济学是这样，学习博弈论也还是这样。

两本书都冠以博弈论基础，是因为书中涉及的仅仅是非合作博弈部分，我们不妨戏称其为博弈论知识殿堂的前庭。掌握了博弈论基础，进入门内就不再是门外汉了。如果再往后院张望一下，合作博弈、进化博弈、微分博弈、随机博弈以及博弈实验研究等新的理论成果，更是异彩纷呈，有兴趣的读者可以迈开自己的双脚，去追求、去探索、去徜徉。

本书的章节编排与《博弈论基础教程》是对应的，分为完全信息静态博弈、完

全信息动态博弈、不完全信息静态博弈以及不完全信息动态博弈四章，这样，有助于对《博弈论基础教程》涉及的内容有针对性地给予阐述。在若干内容上，例如，运用纳什均衡定义寻求博弈的纳什均衡、最优混合战略的纯战略之间的无差异性、行为战略均衡、不完全信息静态有限博弈的纯战略贝叶斯均衡的三种解法以及信号博弈中参与者战略的构建等，本书都有进一步的丰富和深化。

本书的内容由以下三部分组成：

(1) 要点。要点部分是针对四种类型(非合作)博弈涉及的基本概念、基本理论与基本方法的主要内容逐一给予简明阐述，并通过注释和例题加深对要点的理解。

(2) 注释。注释部分跟随在要点和例题之后，用方框和楷体编排。针对要点所作的注释，是对相关概念和理论的内涵、概念间的联系与区别给出的不同层次、不同角度的解说。针对例题所作的注释，是对例题的解题方法和结果展开的深入分析和讨论。

(3) 题解精编。题解精编部分共选编例题 99 道，类题 106 道。各种类型的例题分别置于要点之后，每道例题均给出详细的求解过程，其目的在于帮助读者消化理解要点所提出的概念、理论与方法；类题为类似例题的习题，紧跟在例题之后。希望读者在阅读理解例题的基础上自己动手求解类题，检验一下自己对相关内容掌握的程度。在各章最后一节给出了所有类题的解答，供读者参考。奉劝读者诸君一定要自己先做类题，再看解答。本书选编的例题和类题共计 205 道，其中包含了《博弈论基础教程》各章之后的 50 道思考题，这样就给询求解答的读者有了一个交代。

在本书编写出版的过程中，李海琴、戴云松、戴玲囡、李民帮助我将书稿图文制成电子稿，本书也凝结了他们的汗水。江苏大学研究生处马志强副处长，一直在关心和支持我完成本书的编写出版。同时，江苏大学出版社领导、责编和相关同志为本书编校、版面设计、出版印制等付出了辛勤的劳动。在此，我向他们表示深深的谢意！

最后，我还要感谢我的老伴钟瑜荪老师，是她在精神上的不断鼓励和生活上的精心呵护，使我能在不到一年的时间里集中精力，潜心写作，得以完稿。

书中疏漏和问题在所难免，恳请读者不吝指正。我的联系方式是：

Tel　0086－511－88780066

E-mail　lgj@ujs. edu. cn

李光久

2008 年春于江苏大学玉带河畔

目　　录

1　完全信息静态博弈

1.1　博弈的战略式表述

要点 1　博弈

博弈(Game,简记为 G)是涉及两个或更多个决策主体,相互制约进行决策,决胜负、争输赢的竞技(游戏,赌博、比赛、竞争)格局。

博弈论(Game Theory)是关于两个或更多个决策主体,在其决策相互制约并影响到各自收益的格局中的决策分析。简言之,博弈论是交互决策理论,或互动决策理论。

【例题 1.1.1】　出硬币博弈——硬币配对游戏

甲、乙两人各拿一枚 1 元硬币,背靠背各自将硬币正面(1 元币值面)或反向(菊花图案面)朝上置于手掌心中握紧。然后,转身面对面,同时展开手掌。游戏规则是,如果两人掌上硬币都是正面朝上或都是反面朝上,那么甲就赢了乙 1 元钱,或者说乙输给了甲 1 元钱;如果两人掌上硬币是一正一反,那么乙就赢了甲 1 元钱,或者说甲输给了乙 1 元钱。

甲、乙两人在这样的游戏规则下,在选择“正面”、“反面”时应作出怎样的决策呢?

【例题 1.1.2】　价格竞争博弈

企业 A 与企业 B 生产同一种商品在市场上形成双寡头垄断市场,它们对商品都可以选择三种价格(高价、中价或低价)投放市场。市场规则:不管哪个企业开出较低价格,它就可以得整个市场;如果两个企业开价相同,它们将平分市场。这里进一步给出企业 A,B 选择不同价格获得的收益情况:企业 A 选择“中价”,企业 B 选择“高价”,这时企业 A 独占市场收益 10 万元;企业 A 选择“低价”,而企业 B 选择“高价”或“中价”,这时企业 A 仍独占市场,但因定出“低价”,因此收益为 8 万元。当企业 B 选择较低价格,情况类同。当企业 A,B 同时都选择“高价”,这时它们平分市场,各自收益为 6 万元;同时都选择“中价”,各自收益为 5 万元;同时都选择“低价”,各自收益为 4 万元。

企业 A 与企业 B 面对市场,在商品的定价上应作出怎样的决策呢?

要点 2　博弈的三要素

(1) 参与者——参与者就是博弈的决策主体,通常又称为参与人或局中人,一般记为参与者 $i(i=1, 2, \cdots, n)$。

(2) 行动与战略——行动是博弈参与者 i 在决策时可供选择的动作,一般记为 a_i。全部行动的集合称为行动空间,一般记为 A_i,即 $A_i=\{a_i\}$。

战略是博弈参与者 i 在决策时针对其他参与者所选择的行动做出应对的行动安排,一般

用 s_i 表示。用 S_i 表示战略空间，即 $S_i=\{s_i\}$。

【注释】

- 如果博弈过程中所有参与者是同时选择行动(这种博弈称为静态博弈)，参与者在决策时彼此都观察不到其他人的行动选择，这种情况下，也就谈不上决策时的针对性反应。因此，静态博弈中战略 s_i 和行动 a_i 是相同的。
- 如果博弈过程中参与者决策有先后次序之分(这种博弈称为动态博弈)，后决策的参与者可以掌握前面的参与者选择行动的动态，这种情况下，后决策的参与者在选择自身的行动时就应该作出针对性的反应。因此，动态博弈中参与者 i 的战略 s_i 就与他所掌握的信息以及他可供选择的行动 a_i 有关。
- 动态博弈中的战略 s_i 的构建是一个十分重要问题，在第 2 章的要点和例题中将给出详细的阐述。

(3) 收益——收益是在一个特定的战略组合 $(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 下参与者 i 得到的效用(通常表现为博弈中参与者 i 的输赢、得失、盈亏)。参与者 i 的收益通常记为 $u_i(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，简记为 u_i。

【注释】

- 在国内外众多的博弈论著作中，用"支付"(payoff)一词表达参与者在博弈结果中得到的效用。考虑到博弈论研究的均衡涉及效用最大化，联系到经济学中常用的收益最大化，所以在此使用的"收益"在概念上等同"支付"。
- 参与者 i 的收益 $u_i(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 是随着战略组合 $(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ 不同而改变，因此收益有时也称为收益函数。
- 参与者 i 的收益 u_i 是一个数量指标。

【例题 1.1.3】(例题 1.1.1 续) 试写出出硬币博弈参与者及其战略与收益函数。

解 在出硬币博弈中，指定甲为参与者 1，乙为参与者 2。参与者 1 可以选择将硬币正面朝上置于手中，也可以选择将硬币反面朝上置于手中。他的行动可记为 $a_{11}=$"正面"(正面朝上)，$a_{12}=$"反面"(反面朝上)，其行动空间为 $A_1=\{a_{11},a_{12}\}=\{$正面，反面$\}$。由于静态博弈中战略等同于行动，因此，参与者 1 的战略空间 $S_1=A_1$，有 $S_1=\{s_{11},s_{12}\}=\{$正面，反面$\}$。

类似地，参与者 2 的行动空间 $A_2=\{a_{21},\ a_{22}\}=\{$正面，反面$\}$；战略空间 $S_2=A_2$，有 $S_2=\{s_{21},\ s_{22}\}=\{$正面，反面$\}$。

两人的收益函数表达如下：

$$u_1(s_{11},s_{21})=u_1(\text{正面},\text{正面})=1,\qquad \text{对应的有 } u_2(s_{11},s_{21})=-1,$$
$$u_1(s_{11},s_{22})=u_1(\text{正面},\text{反面})=-1,\qquad \text{对应的有 } u_2(s_{11},s_{22})=1,$$
$$u_1(s_{12},s_{21})=u_1(\text{反面},\text{正面})=-1,\qquad \text{对应的有 } u_2(s_{12},s_{21})=1,$$
$$u_1(s_{12},s_{22})=u_1(\text{反面},\text{反面})=1,\qquad \text{对应的有 } u_2(s_{12},s_{22})=-1。$$

要点 3　完全信息

完全信息是指，n 个参与者各自选择行动形成的不同的行动（战略）组合$(s_1,s_2,\cdots,s_n)$，由此所决定的各个参与者的收益 $u_i(s_1,s_2,\cdots,s_n)$对所有参与者来说是共同知识。

完全信息意味着参与者完全了解博弈的格局——各个参与者的行动空间，每个参与者选择行动后产生的效用（收益），各个参与者都没有私人信息。

【注释】

- 共同知识是指"每个参与者都知道，每个参与者都知道每个参与者都知道，……"的知识。博弈论总假定一个博弈的结构模型是参与者的共同知识。
- 如果博弈的参与者拥有自己知道而其他参与者不知道的私人信息，这就产生信息不对称的格局，这种局势下的博弈称为不完全信息博弈。不完全信息博弈的有关内容将在第 3，4 章阐述。

要点 4　博弈的战略式表述

一个博弈 G 有 n 个参与者参加，各个参与者的战略空间分别为 $S_1,S_2,\cdots,S_n$，各个参与者的收益函数分别为 $u_1(s_1,s_2,\cdots,s_n),u_2(s_1,s_2,\cdots,s_n),\cdots,u_n(s_1,s_2,\cdots,s_n)$。那么，博弈 G 的战略式表述记为

$$G=\{S_1,S_2,\cdots,S_n;\ u_1,u_2,\cdots,u_n\}。$$

博弈 G 的战略式表述又称为博弈 G 的标准式表述。

要点 5　双变量收益矩阵

双变量收益矩阵是两个参与者参加的有限博弈（即战略空间 S_1,S_2 包含有限个可供选择的战略）战略式表述的一种直观的、表格形式的描述。其中，矩阵的第 i 行对应参与者 1 的战略 s_{1i}，战略空间 S_1 包含 m 个战略，矩阵就有 m 行；矩阵的第 j 列对应参与者 2 的战略 s_{2j}，战略空间 S_2 包含 k 个战略，矩阵就有 k 列；矩阵第 i 行与第 j 列交汇处的单元格中呈现两个数值，第一个数值是参与者 1 的收益 $u_1(s_{1i},\ s_{2j})$，第二个数值是参与者 2 的收益 $u_2(s_{1i},s_{2j})$。

【例题 1.1.4】（例题 1.1.1 续）　试写出出硬币博弈的双变量收益矩阵。

解　出硬币博弈的双变量收益矩阵如图 1-1 所示。

		参与者 2	
		正面	反面
参与者 1	正面	1，−1	−1，1
	反面	−1，1	1，−1

图 1-1

【例题 1.1.5】（例题 1.1.2 续）　试写出价格竞争博弈的双变量收益矩阵。

解　价格竞争博弈的双变量收益矩阵如图 1-2 所示。

		参与者 2(企业 B)		
		高价	中价	低价
参与者 1 (企业 A)	高价	6,6	0,10	0,8
	中价	10,0	5,5	0,8
	低价	8,0	8,0	4,4

图 1-2

【例题 1.1.6】 “石头、剪刀、布”游戏博弈

两个小孩玩“石头、剪刀、布”游戏构成一个博弈。一个小孩安排为参与者 1,他的战略空间 $S_1=\{s_{11},s_{12},s_{13}\}=\{$石头,剪刀,布$\}$,也就是可供他选择的手势共有三种,分别是“石头”、“剪刀”和“布”。另一个小孩安排为参与者 2,他的战略空间 $S_2=\{s_{21},s_{22},s_{23}\}=\{$石头,剪刀,布$\}$。如果参与者 1 选择 $s_{13}=$“布”,而参与者 2 选择 $s_{22}=$“剪刀”,那么战略组合 $(s_{13},s_{22})=$(布,剪刀)带给两人的收益分别就是 $u_1(s_{13},\ s_{22})=-1$(参与者 1 输 1 分),$u_2(s_{13},\ s_{22})=1$(参与者 2 赢 1 分)。对于 $s_{13}=$“布”,同时 $s_{23}=$“布”,那么就有 $u_1(s_{13},s_{23})=u_2(s_{13},s_{23})=0$(两人不输不赢);如此等等。试写出该博弈的双变量收益矩阵。

解 “石头、剪刀、布”游戏博弈的双变量收益矩阵如图 1-3 所示。

		参与者 2		
		石头	剪刀	布
参与者 1	石头	0,0	1,−1	−1,1
	剪刀	−1,1	0,0	1,−1
	布	1,−1	−1,1	0,0

图 1-3

要点 6 三变量收益矩阵

三变量收益矩阵是有三个参与者参加的有限博弈战略式表述的一种直观表格形式的描述。

【例题 1.1.7】 三个小孩玩“石头、剪刀、布”游戏,输赢按如下设计:

(1) 如果三人选择出同样的手势,大家都不输也不赢,形成和局;

(2) 如果三人选择出三种不同手势,形成循环赢(输)局面,也作为和局;

(3) 如果两人选择出同样手势胜过另一人选择出的手势,形成两赢一输局面,两赢者各得 1 分,输者失 2 分;

(4) 如果一人选择出的手势胜过另两人选择出同样手势,形成一赢两输局面,赢者得 2 分,两输者各失 1 分。

试写出该博弈的三变量收益矩阵。

解 三个参与者进行的“石头、剪刀、布”游戏博弈的三变量收益矩阵如图 1-4 所示。

参与者3：石头

参与者1 \ 参与者2	石头	剪刀	布
石头	0, 0, 0	1, −2, 1	−1, 2, −1
剪刀	−2, 1, 1	−1, −1, 2	0, 0, 0
布	2, −1, −1	0, 0, 0	1, 1, −2

参与者3：剪刀

参与者1 \ 参与者2	石头	剪刀	布
石头	1, 1, −2	2, −1, −1	0, 0, 0
剪刀	−1, 2, −1	0, 0, 0	1, −2, 1
布	0, 0, 0	−2, 1, 1	−1, −1, 2

参与者3：布

参与者1 \ 参与者2	石头	剪刀	布
石头	−1, −1, 2	0, 0, 0	−2, 1, 1
剪刀	0, 0, 0	1, 1, −2	2, −1, −1
布	1, −2, 1	−1, 2, −1	0, 0, 0

图 1-4

1.2 均衡的概念

要点 1 均衡

均衡是一个博弈的所有参与者的最优战略的组合，一般记为 $s^*=(s_1^*, s_2^*, \cdots, s_i^*, \cdots, s_n^*)$。其中，$s_i^*$ 是参与者 i 在均衡状态下的最优战略。由于博弈是所有参与者之间相互牵制、相互影响的决策，或者说是互动决策，因此，最优战略 s_i^* 通常依赖于其他参与者的战略选择。

要点 2 严格占优战略均衡

如果对其他 $n-1$ 个参与者的任何战略组合 $s_{-i}=(s_1, \cdots, s_{i-1}, s_{i+1}, \cdots, s_n)$，参与者 i 具有唯一的最优战略 s^*，也就是对任何 s_{-i} 以及任一 $s'_i \neq s_i^*$ $(s'_i \in S_i)$，都有

$$u_i(s_i^*,\ s_{-i}) > u_i(s'_i,\ s_{-i}), \tag{1}$$

那么，s_i^* 就称为参与者 i 的严格占优战略。

如果所有参与者 $i=1, 2, \cdots, n$，都具有自己的严格占优战略 s_1^*，s_2^*，…，s_n^*，那么战略组合 $s^*=(s_1^*,\ s_2^*, \cdots,\ s_n^*)$ 就称为严格占优战略均衡。

【注释】

- 如果参与者 i 拥有唯一的严格占优战略 s_i^*，那么他在博弈过程中就不会去选择给他带来低收益的其他战略 s'_i。实际上，参与者 i 的战略空间 S_i 就可以精减为单元素集，即 $S_i=\{s_i^*\}$。
- 博弈的参与者并不总能找到自己的严格占优战略。
- 博弈论作为一种互动的决策理论，一个博弈如果出现严格占优战略均衡，参与者之间就会失去相互影响、相互制约、绞脑汁、斗智谋的竞争场面。因为所有参与者都会使出自己的“绝招”（严格占优战略 s_i^*），博弈因此也失去了精彩。

【例题 1.2.1】 “大锅饭”博弈

两个人（参与者 $i=1,2$）编在同一组里干活，每个人可以选择的战略（行动）是“工作”或“偷懒”。如果两个人都选择“工作”，这时总产出是 8；如果只有一个人选择“工作”，而另一个人选择“偷懒”，这时产出是 4；如果两个人都选择“偷懒”，这时产出是 0。总产出在两个人中平

均分配。假设每个人“工作”时必须付出私人成本为 3,而“偷懒”时私人成本为 0。

(1) 试写出博弈的双变量收益矩阵;

(2) 验证战略 s_i^* =“偷懒”是参与者 $i=1, 2$ 的严格占优战略;

(3) 写出博弈的严格占优战略均衡。

解 (1) 根据题设条件,参与者 $i=1, 2$ 的收益函数为

$$u_1(\text{工作},\text{工作})=8/2-3=1,\quad u_2(\text{工作},\text{工作})=8/2-3=1;$$
$$u_1(\text{工作},\text{偷懒})=4/2-3=-1,\quad u_2(\text{工作},\text{偷懒})=4/2-0=2;$$
$$u_1(\text{偷懒},\text{工作})=4/2-0=2,\quad u_2(\text{偷懒},\text{工作})=4/2-3=-1;$$
$$u_1(\text{偷懒},\text{偷懒})=0,\quad u_2(\text{偷懒},\text{偷懒})=0。$$

因此,该博弈的双变量收益矩阵如图 1-5 所示。

		参与者 2 工作	参与者 2 偷懒
参与者 1	工作	1,1	−1,2
参与者 1	偷懒	2,−1	0,0

图 1-5

(2) 因为 $S_1=\{$工作,偷懒$\}$,设 s_1^* =“偷懒”,那么 s_1' =“工作”($s_1'\neq s_1^*$)。这时 $s_{-1}=s_2$,当 s_{21} =“工作”时,有

$$u_1(\text{偷懒},\text{工作})=2>1=u_1(\text{工作},\text{工作}),$$

即

$$u_1(s_1^*,\ s_{21})>u_1(s_1',\ s_{21})。$$

当 s_{22} =“偷懒”时,有

$$u_1(\text{偷懒、偷懒})=0>-1=u_1(\text{工作},\text{偷懒}),$$

即

$$u_1(s_1^*,\ s_{22})>u_1(s_1',\ s_{22})。$$

这表明参与者 1 的战略 s_1^* =“偷懒”满足严格占优战略定义式(1)的要求,因此 s_1^* =“偷懒”是参与者 1 的严格占优战略。

完全类似可以验证,s_2^* =“偷懒”是参与者 2 的严格占优战略。

(3) 该博弈的严格占优战略均衡,就是两人的严格占优战略 $s_1^*=s_2^*$ =“偷懒”的组合,即 $s^*=(s_1^*, s_2^*)$=(偷懒,偷懒)。

【注释】

- “大锅饭”博弈出现两个参与者都会选择出工不出力的“偷懒”战略。究其原因,一是生产效率低下,选择“工作”时私人成本太高;二是分配制度不合理,干与不干都平均享受产出成果。结果是大锅饭养懒汉。
- 这个博弈反映出一个理性参与者总会选择严格占优战略“偷懒”,于是战略组合 s^*=(偷懒,偷懒)就成为该博弈理论预测的结果,尽管(偷懒,偷懒)带给双方的收益都比(工作,工作)要低。这说明了一个深刻的问题,就是个人理性与团体理性的冲突。这也是非合作博弈与合作博弈的区别所在。

【类题 1.2.1】 博弈 G 的双变量收益矩阵如图 1-6 所示。

		参与者 2 左	参与者 2 右
参与者 1	上	7,3	6,6
	下	2,2	3,7

图 1-6

(1) 验证战略 s_1^* =“上”是参与者 1 的严格占优战略,战略 s_2^* =“右”是参与者 2 的严格占优战略;

(2) 写出博弈 G 的严格占优战略均衡。

【类题 1.2.2】 囚徒困境博弈

两个共同作案的犯罪嫌疑人被捕后关入不同的牢室,并受到指控。根据警方交代的政策,如果两人都选择坦白,根据案情将被判刑 6 个月;如果一个选择坦白,而另一个选择抗拒,坦白招供者有主动认罪表现将立即释放,而另一个人将判刑 9 个月(所犯罪行判 6 个月,干扰司法加判 3 个月);如果两人都选择抗拒,因警方证据不足,两人将均被判为轻度犯罪服刑 1 个月。

(1) 构建囚徒困境博弈的双变量收益矩阵;

(2) 验证战略 s_1^* =“坦白”,s_2^* =“坦白”分别是囚徒 1,2 的严格占优战略;

(3) 写出该博弈的严格占优战略均衡。

要点 3 逐步剔除严格劣战略的优势均衡

(1) 如果对其他 $n-1$ 个参与者的任何战略组合 $s_{-i}=(s_1,\cdots,s_{i-1},s_{i+1},\cdots,s_n)$,参与者 i 选择战略 s_i' 的收益总是小于选择战略 s_i'' 的收益,那么就称战略 s_i' 是相对于战略 s_i'' 的严格劣战略,即有

$$u_i(s_i',s_{-i})<u_i(s_i'',s_{-i})。\tag{2}$$

【注释】

- 一定要注意理解由式(1)和式(2)定义的严格占优战略和严格劣战略概念的本质内涵:
  ① 参与者 i 的严格占优战略 s_i^* 是一个绝对性概念,s_i^* 是战略空间 s_i 中唯一的最优选择;与 s_i^* 相比较,S_i 中的其余战略相对于 s_i^* 都是严格劣战略。
  ② 参与者 i 的严格劣战略 s_i' 是一个相对性概念,s_i' 是在和 s_i'' 产生收益相比较时形成的概念。式(2)中的 s_i'' 不能认为就是严格占优战略。
  ③ 对参与者 i 来说,他可以找不到自己的严格占优战略 s_i^*,但还可能找到一个或多个严格劣战略。
  ④ 对参与者 i 来说,如果他找不到严格劣战略 s_i',那么 S_i 中一定不存在严格占优战略 s_i^*。
- 如果将式(2)中的严格不等号“<”换成“≤”,这时就称 s_i' 是相对于 s_i'' 的弱劣战略。

(2) 在一个博弈 G 中，如果各个参与者通过不断剔除自身的严格劣战略，最后只剩下唯一的战略组合 $s^*=(s_1^*,s_2^*,\cdots,s_n^*)$，那么 s^* 就称为逐步剔除严格劣战略的优势均衡。

【例题 1.2.2】 试用逐步剔除严格劣战略的方法，找出“大锅饭”博弈(其双变量收益矩阵如图 1-5 所示)的优势均衡。

解 对参与者 1 来说，设 s_1'=“工作”，s_1''=“偷懒”，有

$$u_1(s_1',\text{工作})=1<2=u_1(s_1'',\text{工作});$$

$$u_1(s_1',\text{偷懒})=-1<0=u_1(s_1'',\text{偷懒})。$$

因此 s_1'=“工作”是相对于 s_1''=“偷懒”的严格劣战略。从图 1-5 所示的双变量收益矩阵中剔除战略 s_1'=“工作”，如图 1-7 所示。

		参与者 2	
		工作	偷懒
参与者 1	偷懒	2，−1	0，0

图 1-7

在图 1-7 所示的博弈格局中，对参与者 2 来说，因为 $-1<0$，所以 s_2'=“工作”是相对于 s_2''=“偷懒”的严格劣战略。从图 1-7 所示的双变量收益矩阵中，剔除战略 s_2'=“工作”，博弈剩下唯一的战略组合如图 1-8 所示。

		参与者 2
		偷懒
参与者 1	偷懒	0，0

图 1-8

这样，战略组合 s^*=(偷懒，偷懒)就是“大锅饭”博弈的逐步剔除严格劣战略的优势均衡。

显然，先剔除 s_2'，后剔除 s_1'，也会得到同样的结果。

【类题 1.2.3】 一个有两位参与者 $i=1,2$ 参加的博弈 $G=\{S_1,S_2;u_1,u_2\}$ 中，$S_1=\{U,D\}$，$S_2=\{L,R\}$；收益函数 u_1，u_2 由图 1-9 所示的双变量收益矩阵给出。试找出逐步剔除严格劣战略的优势均衡。

		参与者 2	
		L	R
参与者 1	U	2，2	4，1
	D	3，1	2，0

图 1-9

【类题 1.2.4】 (例题 1.1.5 续) 在价格竞争博弈中，找出逐步剔除严格劣战略的优势均衡。

【类题 1.2.5】 在图 1-10 所示的博弈中，找出逐步剔除严格劣战略的优势均衡。