十省市区广播电视大学数学竞赛试题解答汇编

$$\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1\leqslant x^{\frac{1}{3}}<p_2\leqslant\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{p_1p_2\log\frac{x}{p_1p_2}}$$

$$(1+\varepsilon)\sum_{x^{\frac{1}{10}}<p_1\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\int_{x^{\frac{1}{3}}}^{\left(\frac{x}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}}\frac{dt}{p_1t(\log t)\log\frac{x}{p_1t}}$$

上海、辽宁、北京电大通讯编辑室

前　言

近两年来，我国广播电视大学发展很快，已成为全国拥有学生最多的空中大学。为了进一步推动广播电视教育的开展，提高教学质量，由北京、上海、辽宁三家《电视大学通讯》编辑室发起，河北、内蒙古、吉林、黑龙江、江苏、浙江、山东的广播电视大学应邀参加，于去年八月在大连联合举办了数学竞赛。这样规模的大学生数学竞赛在我国还属少见，社会各方面十分重视，给予了很大支持。中国科学院主席团成员、著名数学家华罗庚教授审定了试题，担任了竞赛委员会的主任委员。

这次竞赛取得了可喜的成果。参加竞赛评选委员会的专家们认为，竞赛的试题不低于工科院校研究生入学考试的水平；考试的成绩表明，广播电视大学具有较高的教学质量，并涌现出一批品学兼优的人才。

竞赛结束后，各地广播电视大学的同学和自学收看者纷纷来信，要求提供这次竞赛的试题，作为学习的参考和借鉴。为此，我们选编了这本小册子，其中包括了试题、题解或解答。

本书由上海电视大学主编，参加选编的有吴兰芳副教授和沈佩芳、许季强、蔡孝倚等同志，中央广播电视大学主讲教师、北京大学副教授邵士敏应邀来上海参加了审定工作。在选编过程中还得到北京大学数学系的热情支持。

由于教学进度的原因，这次竞赛仅包括电大颁布的1980级数学教学大纲“高等数学(I)”等内容。除此，因选编时间匆促以及限于水平，不免有错误和不妥之处，恳请读者指正。

一九八二年二月

电视大学　精英荟萃

——中国科学院主席团成员、著名数学家华罗庚教授给十省、市、自治区广播电视大学学生1981年数学竞赛的贺信

十省、市、自治区广播电视大学，推选出品学兼优的代表，云集于辽东滨海名城。师生相会，济济一堂，竞运算之巧精，赛思维的捷敏，这真是电视大学，英才荟萃！

数学竞赛，发掘人才。过去全国中学生搞数学竞赛，这次在大学生中搞这样规模的数学竞赛还是首次，我以同样的心情表示支持和赞同。

北京、上海、辽宁三所电大的通讯编辑部门，在电大即将把它的第一届毕业生送到社会的前夕，利用暑假，邀请河北、内蒙、吉林、黑龙江、江苏、浙江、山东，共十所电大举行数学竞赛，它对牢固基础知识、发展智力、培养拔尖人才，是一件具有战略意义的活动。

电大的首届学生不久将毕业，但毕业并不是学习的终止，还要不断地学习新知识，掌握新技术，更要提高社会主义觉悟，做到又红又专。有人说现在的青年是“空白的一代”，我从来不这样看，在新的历史时期，党和国家为我们这一代青年提供了极好的学习机会。全国三十多万电大学生正勤奋刻苦地学习大学的课业，誓把失去的青春夺回。建设四化的各方面人才就在我们当代青年之中。我深信，一个人才辈出，群星灿烂的时代已

经到来！

我预祝这次数学竞赛成功，并热切期望电大这所全国最大的大学，为四化建设培养一大批又红又专的人才。

华罗庚 1981, 8, 1.

于北京

目　　录

祝愿与希望

北京大学副教授
中央电大主讲教师　邵士敏

1981年8月份我有幸到大连参加了十省市区电视大学举办的"高等数学"数学竞赛，见到了各省市区的学员代表，使我非常高兴。

两年多来，我一直在中央广播电视大学讲授高等数学课。这和过去在学校教课不一样，大家虽然天天看到我，但我却看不到大家。这次有机会和大家相聚在一起，好象久别重逢的亲人一样，感到格外亲切。这是我过去所没有经历过的。

我和阎金铎老师刚到大连的那天上午，有一位同学正在生病，听说中央电大老师来了，马上从床上起身要来看我们，亲切之情，真使我们感动。有一位同学一见面就对我说："我们总是在电视里听您讲课，希望您给我们面授一课吧！"那种真挚的感情，使我难以忘怀。

在我们相聚的日子里，我们在一起生活，一起参观游览，一起交谈，相互勉励和祝愿，使我感到这确实是一次非常有意义的活动。

现在这次竞赛工作已经结束，我想通过这次竞赛和评卷，谈谈对答卷的一些方法的分析。

这次竞赛试题既有难度，又有一定的灵活性。许多人认为它已经与工科大学研究生试题相当。但是不少同学解答得很好，既注意基本解法，方法又灵活多样，显示出思路敏捷、广阔，

有的还有独到之见，这是电大学员为祖国刻苦努力、勤奋学习的结果。举一个关于证明题的例子来说吧！

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上处处可微，并且在这区间的端点适合条件：

$$f(a)=f(b) \quad 及 \quad f'(a)\cdot f'(b)>0。$$

证明方程 $f'(x)=0$ 在开区间 (a, b) 内至少有两个解。

[对于这个题的条件 $f'(a)\cdot f'(b)>0$ 大多数同学处理得很好，一开始就把条件化简了。]

因 $f'(a)\cdot f'(b)>0$，不失一般性，不妨设

$$f'(a)>0, \quad f'(b)>0 \tag{1}$$

[还有的同学明确地指出 $f'(a)<0$，$f'(b)<0$ 的情形只需考虑函数 $g(x)=-f(x)$，代替 $f(x)$ 就可以了。]

根据导数的定义

$$f'(a)=\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

由 $f'(a)>0$ 知存在小邻域 $(a, a+\delta)$，当 $a<x<a+\delta$ 时

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

于是 $f(x)-f(a)>0$，即 $f(x)>f(a)$。

[这里只用到了导数的定义，但它不是最基本的形式，而是变化了的形式！]

因此 $f(a)$ 不是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值。同理，由 $f'(b)>0$ 可知 $f(b)$ 不是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最小值。由此可知，函数在端点的公共值 $f(a)=f(b)$ 既不是最大值也不是最小值。然而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微，必定连续，必达到最大值、最小值，于是推出函数 $f(x)$ 的最大值、最小值必定分别在区间 (a, b) 内两不同的点 ξ_1，ξ_2 处达到。于是 ξ_1，ξ_2 这两点都是极值点。

[指出了函数在区间内部达到的最值就是极值。]

引用费尔马定理，立即得到

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0,\ \xi_1,\ \xi_2\in(a,\ b),\xi_1\neq\xi_2。$$

以上的证明中，同学们不仅用到了函数的可微性，而且利用了闭区间上连续函数必达到最大值、最小值这一基本性质。也有些同学用了闭区间上连续函数的另一基本性质，即连续函数中间值定理给出了第二种证法。

与第一种证法相同，先将条件 $f'(a)\cdot f'(b)>0$ 化为 $f'(a)>0,\ f'(b)>0$。接着推出在小邻域 $(a,\ a+\delta)$ 内存在 η_1 使得 $f(\eta_1)>f(a)$，在小邻域 $(b-\delta,\ b)$ 内存在 η_2 使得 $f(\eta_2)<f(b)$。于是得到联立不等式

$$f(\eta_2)<f(a)<f(\eta_1),\quad \eta_1<\eta_2 \tag{2}$$

利用连续函数中间值定理，在区间 $(\eta_1,\ \eta_2)$ 内存在一点 C，使得

$$f(c)=f(a)=f(b)。$$

于是分别在区间 $(a,\ c)$ 和 $(c,\ b)$ 内引用罗尔定理，就得到两个点 $\xi_1,\ \xi_2$ 使得

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0,\quad \xi_1\neq\xi_2。 \tag{3}$$

[想法自然朴素。因为从条件 $f(a)=f(b)$ 自然会想到利用罗尔定理；而要证明 $f'(x)=0$ 有两个根，又自然地想到在两个区间上分别用罗尔定理。]

多数同学采用了以上两种基本的证法。但也有少数同学在注意基本概念、基本训练的基础上进一步自学，利用所学到的关于导数的较深的性质，给出了第三种证法。

第一步与第一种证法相同，先将条件 $f'(a)\cdot f'(b)>0$ 化为 $f'(a)>0,\ f'(b)>0$。

其次证明 $f'(x)$ 不可能恒大于等于零。假如在 $(a,\ b)$ 上 $f'(x)\geqslant0$，则 $f(x)$ 单调上升，因而由于 $f(a)=f(b)$，函数将是

常数，而这就与 $f'(a)>0$ 矛盾。所以必定存在一点 C 使 $f'(c)<0$。

引用达布定理*便得到结论：在 (a, c) 内必有一点 ξ_1 使 $f'(\xi_1)=0$，在 (c, b) 内必有一点 ξ_2 使 $f'(\xi_2)=0$。

[利用达布定理证明，证法十分清楚、简捷！]

以上是三种典型的证法(用费尔马定理证明；用罗尔定理证明；根据参考书用达布定理证明)。同学们还有各种各样证法，如反证法等等。总之，这些证法都思路开阔，逻辑推理严谨，表达清楚。

另一方面，通过这次竞赛可以看出，有些同学能较灵活地运用数学工具去解物理应用题。举例如下。

一质量为 m 的质点，在竖直平面上沿半径为 R 的 $\frac{1}{4}$ 圆弧于 A 点从静止开始下滑。已知圆弧与质点间的摩擦系数为 μ。求质点在此圆弧的任意位置上的动能 E_k。

[大多数同学都会根据物理学定律，列出微分方程。]

分析质点受力情况，列出方程

$$\begin{cases} mg\cos\theta - f = ma_T = m\dfrac{dv}{dt}, & (4) \\ N - mg\sin\theta = ma_N = m\dfrac{v^2}{R}, & (5) \end{cases}$$

其中 $f=\mu N$，$v=R\omega=R\dfrac{d\theta}{dt}$，代入得

$$g\cos\theta-\mu\left[g\sin\theta+R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=R\frac{d^2\theta}{dt^2}。$$

---

* 达布定理是说，若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上处处可微，则函数 $f'(x)$ 必至少有一次取得介于 $f'(a)$ 及 $f'(b)$ 之间的每一个值。

达布定理不属于电大教学大纲要求，可参看菲赫金哥尔茨《微积分学教程》一卷一分册，第 219 页。

整理后得微分方程

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\mu\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{g}{R}(\cos\theta-\mu\sin\theta)。\tag{6}$$

[至此已从分析受力列出了微分方程。]

这是一个可降价的微分方程,引进新变量

$$P=\frac{d\theta}{dt},\tag{7}$$

则
$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=p\frac{dp}{d\theta};$$

从而(6)变成

$$p\frac{dp}{d\theta}+\mu p^2=\frac{g}{R}(\cos\theta-\mu\sin\theta)。\tag{8}$$

这是伯努利方程,再作变换 $p^2=z$, 上式可化为

$$\frac{dz}{d\theta}+2\mu z=\frac{2g}{R}(\cos\theta-\mu\sin\theta)。\tag{9}$$

[许多同学就这样熟练地经过两次变换,将微分方程化成了简单的一阶线性方程。]

由于已知质点 m 从 A 点静止下滑,初速度为零,故有初始条件

$$z\Big|_{\theta=0}=\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\Big|_{\theta=0}=0。\tag{10}$$

容易解出方程(9)满足初始条件(10)的特解为

$$z=\frac{2g}{R}\cdot\frac{1}{1+4\mu^2}\cdot[(1-2\mu^2)\sin\theta+3\mu\cos\theta-3\mu e^{-2\mu\theta}]。$$

从而得质点在圆弧的任意位置上的动能:

$$\begin{aligned}E_k&=\frac{1}{2}mR^2\omega^2\\&=\frac{mgR}{1+4\mu^2}\cdot[(1-2\mu^2)\sin\theta+3\mu\cos\theta-3\mu e^{-2\mu\theta}]。\end{aligned}$$

以上解法是较基本的解法。在解题过程中大多数同学能较

熟练地运用变换的方法化简微分方程，这是平时注意基本训练的缘故。

上面解法是利用牛顿定律列出微分方程(6)，要经过两次变换才能求解。另外有些同学是运用功能原理列出积分方程，解法简明得多。

由功能原理

$$E_k - mgh = -\int_0^s f\,ds,$$

而 $$-\int_0^s f\,ds = -\int_0^s \mu N\,ds = -\int_0^\theta \mu N R\,d\theta,$$

于是 $$E_k - mgR\sin\theta = -\int_0^\theta \mu N R\,d\theta。$$

两边微分即得

$$dE_k - mgR\cos\theta\,d\theta = -\mu N R\,d\theta。\tag{11}$$

再由(5)式，

$$N = mg\sin\theta + \frac{2E_k}{R},$$

代入(11)式，便得

$$\frac{dE_k}{d\theta} + 2\mu E_k = mgR(\cos\theta - \mu\sin\theta),$$

$$E_k\big|_{\theta=0} = 0。$$

[这样便巧妙地利用功能原理，列出了微分方程。]

于是立即得到一阶线性方程初值问题的解

$$E_k = \frac{mgR}{1+4\mu^2}\cdot\left[(1-2\mu^2)\sin\theta + 3\mu\cos\theta - 3\mu e^{-2\mu\theta}\right]。$$

仅举以上两例说明证明题和应用题的情况，至于一些微分、积分的基本计算题，几乎所有同学都很熟练。通过这次竞赛可以看到一些非常可喜的现象，说明了电视大学年轻一代是具有数学才能和发展前途的，电视大学的教育成绩也是应该肯定的。

相信今后在各省市区领导和教师的关怀和帮助下，将涌现出一大批四化建设的人才。

同学们能够有今天的提高和进步，还应该归功于每天和大家生活在一起，不辞辛劳地指点大家的辅导老师，他们是辛勤的园丁。

这次数学竞赛使我有机会和大家相叙，直接听取大家的意见，学习同志们好的经验，看到教学中存在的问题，这对我今后的教学工作都是很有意义的。

大家反映通过竞赛活动，见了世面，长了知识，开阔了眼界，活跃了思路，交流了经验，觉得很有收获。这只是一个良好的开端，让我们大家以此为起点，把通过这次竞赛所学到的东西带回去，改进教学方法，注意基本训练，注意技巧和灵活性。在习题方面，既要注意加强理论性较强的证明题，还要注意有灵活性的应用题。让我们共同努力，把电大的数学教学质量提高到一个更新的水平。

赛出了好水平，好学风

——访北京大学数学系副主任沈燮昌副教授

盛夏的大连凉爽如秋。十省市自治区广播电大学生数学竞赛在这个美丽的滨海城市胜利结束了。在各地代表即将离开的前夕，我们走访了远道而来的北京大学数学系副主任沈燮昌副教授。

沈教授是这次竞赛评选委员会的副主任。他操着浓重的上海口音，谈了参加这次竞赛活动的感想。

“这次由北京、上海、辽宁三家广播电视大学的编辑部发起的竞赛，是一项非常有意义的活动。它有利于鼓励学生努力学习，发展智力，交流教学经验，发现和培养拔尖人材，促进电大教学质量的进一步提高，向社会显示电视大学的优越性。”顿了一顿，他接着说：“这次能够和电视大学的师生见面，参加竞赛活动，为大家做一些工作，我是十分高兴的。”

我们知道沈教授自始至终参加了竞赛的阅卷和评选工作，请他对这次竞赛的试题谈一点看法。

“这次竞赛的两套试题都是华罗庚教授过目审定的，出得很不错，既重视了基本概念、基本理论、基本方法，也重视了分析问题和解决问题的能力。注意了灵活性和综合运用。没有偏题和怪题，路子是对的。从题目的难易程度来看，不亚于工科院校招考研究生的试题，有些题目甚至还有所超过。因此，题目是较难的，水平也是较高的。”

“这次部分广播电视大学的第一次竞赛活动，人民日报、光

明日报和中央人民广播电台都向全国发了消息，社会上各方面都很关注这次竞赛的水平，以考查鉴别电视大学的教学质量。这方面，能不能请你估价一下。”我们紧接着又向沈教授提出了问题。

“好，我谈一点看法。”沈教授略为思索了一下。

“全国性的竞赛是在高难度、高水平的情况下进行的，因此，得分一般不会很高，这是它和一般的入学考试、期末考试不同的。

据我知道，七八年全国中学生的数学竞赛得奖的分数也并不很高。这次考试成绩，总平均达到五十二分，第一名考到九十三点八分，这说明水平是高的，成绩是令人满意的。这也从一个侧面反映了广播电视大学这所新型的学府有较高的教学质量。我是头一次接触广播电视大学，因此，留给我的印象也更加深刻，它实际上也是对我们全日制高等院校的一次促进！”

“能不能再具体谈谈你的印象？”我们看到沈教授心情激动，意犹未尽，再次向他发问。

沈燮昌教授连连点头表示同意，滔滔不绝地说开了。

“从这次十省市自治区同学的竞赛考卷中看，有这么几个特点：

一是基本概念比较清楚。微积分中的函数、导数、积分这些重要概念，试题中都有体现，同学们掌握得还是好的。最明显的，一试的第四题关于求函数的偏微商，自变量作了变换，应变量也作了变换。这道题，既涉及基本概念，又有一定的提高，大多数同学都做得很好。

二是运算能力较强。二试的第五题涉及一个积分，积分中又有代数多项式和三角多项式，要进行多次变换，有一定的难度，但大多数同学都能做出来。

三是有一定的推理能力。这一点对电大同学来讲是不简单的。电大限于教学条件，平时在推理方面的训练一般较少，而这次一试的第三题，有不少同学能做出来是不容易的。二试的第二题，也有一定数量的同学答对了，这也是可喜的。说明大家在重视计算的同时，也重视了推理方面能力的提高。平时看了不少课外的书，有一定的自学能力，这一点对电大的同学更为重要。”谈到这里，沈教授又加重语气，打着手势，连连说了两遍。

“四是解题方法灵活多样。二试的第四题，同学们有多种解法，有的从物理概念出发进行解题，有的用严格的数学推导做出来了，我们看了都十分高兴。”

我们要求沈教授根据阅卷的情况，给同学们指出一些薄弱环节和努力方向，他也欣然同意了。

“我认为需要引起注意和补课的大致有以下三个问题：

一是不少同学空间概念薄弱，特别是空间解析几何掌握得不够扎实。一试的第一题就暴露了这个问题。

二是比较深的概念和理论还掌握得不够。如一致收敛的概念及理论，过去工科大学对此化的功夫不够，但是从近代数学观点来看有必要加以重视，特别是尖子更要掌握。这次二试第六题的第一部分，答对的就很少，这是要引起注意的。

三是表达能力较差。表现在证明论据不充分就轻易下结论，逻辑推导也不够严谨。用直观的方法是好的，但通过直观还要提高到理论高度。这些说明有一部分同学理解得还不深。

此外，极少数的同学，概念方面还有问题，运算不够熟练，推导就显得更差些。”

谈到这里，沈教授语重心长地说：“学数学是为了应用，要为国民经济服务，为生产服务。电大的同学基本上是在职职工，在重视基本理论学习的同时，更应该在运用上多下功夫，要把学到

的知识用到解决本单位的实际问题中去，这样就能学以致用，就会较快出成果，为四化作出贡献。

我认识一些从事气象、地质、石油勘探的同志，他们不仅精通本行业务，而且对数学也有较高的修养，因此，在科学研究上取得很大成绩，有的在全国科学大会上得了奖，有的甚至还当了科学院学部委员。过去，很多学科都是进行定性研究，现在都要求进行定量研究了。因此，数学大有用武之地，这也是当前科学发展的需要。”

接着，沈教授凝视着那远处郁郁葱葱的山峦，深有感情地说：“这次和同学们接触的时间虽然不多，但是感受很深，同学们不但赛出了一个好的水平，而且还赛出了一个勤奋学习的好学风，看到了很多动人的事例，象获得三等奖的上海女同学王唯音，头一天高烧到39.6°C，住了医院，第二天又坚持上考场。从这里，我们看到青年一代大有希望。”

最后，沈教授要求我们代向电大同学致意，殷切希望大家抓紧青年的黄金时代奋发学习，又红又专，做勤奋学习、讲求文明的带头人。

“一花独放不是春，万紫千红才是春。”我们的访问虽然结束了，但是沈教授对电大同学寄予无限期望的话语却仍在我们耳边回响。

·刘先煌·

十省、市、区广播电大 1981 年 数学竞赛

第一试题解答

一、计算 $$\int_l (x-y+z^2)ds$$

其中 l 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线。

解：(1) 由

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

消去 z 得曲线 l 在 xoy 平面上投影方程：

$$2x^2+2y^2+2xy=a^2 \tag{1}$$

将坐标轴旋转 45°，即令

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{cases}$$

方程(1)变换为

$$3x'^2+y'^2=a^2$$

或者

$$\frac{x'^2}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$$

采用椭圆参数方程：

$$x'=\frac{a}{\sqrt{3}}\cos t,\quad y'=a\sin t。$$

于是曲线 l 的参数方程为：