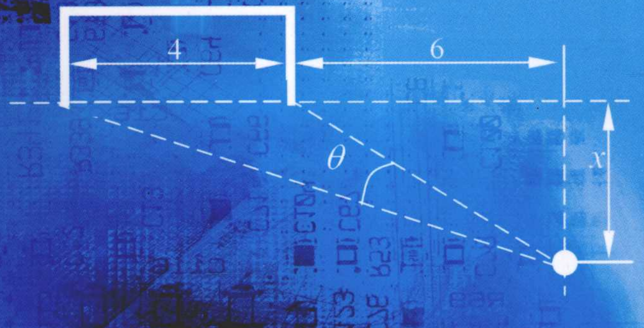
新世纪普通高等教育规划教材

新世纪

新编高等数学

(下)

主编 万阿英



大连理工大学出版社

新世纪

新世纪普通高等教育规划教材

新编高等数学

（下）

主　编　万阿英　　副主编　丽　娜　王建芳

XINBIAN GAODENG SHUXUE

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学. 下/万阿英主编. 一大连:大连理工大学出版社,2009. 1

新世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-5611-4556-2

Ⅰ. 新… Ⅱ. 万… Ⅲ. 高等数学一高等学校一教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 170382 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp. cn　URL:http://www. dutp. cn

大连理工印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:185mm×260mm　印张:15　字数:338 千字

印数:1～3000

2009 年 1 月第 1 版　2009 年 1 月第 1 次印刷

责任编辑:杨　云　责任校对:周双双

封面设计:张　莹

ISBN 978-7-5611-4556-2　定　价:24.00 元

前言

高等数学是非数学理工科各专业重要的数学基础课程，对培养学生的思维能力、数学应用能力和分析判断能力有着非常重要的作用。随着数学在各个学科专业中的应用越来越多，高等数学教学受重视程度也在日益增加。针对地方类院校学生认知能力及知识结构的实际情况，结合课程总课时较少的特点，编者从实际情况出发，有针对性的编写了本教材。与以往编写的《高等数学》内容多、难度大相比，本教材内容有所减少、难度适中。

本书积极吸收当前国际上高等数学的教学改革成果，按照我国教学基本要求，推进素质教育，培养学生的创新精神、应用意识、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力。适应分层次教学需求，做到突出重点、详略得当、通俗易懂，便于自学。本书的几个主要特点是：

(1)在内容处理上尽量符合学生思维的发展规律，尽可能反映人类认识数学的思维发展规律，尽可能地与中学数学教学相衔接，增加了应用性的例题和习题，适当地精简和合并了一些内容，使内容和系统更加完整，也更加便于教学与自学；

(2)在概念处理上尽可能使用直观的例子加深理解，并且重视数学概念和实际问题的联系；

(3)习题由浅入深，并为每章配备了典型题、测试题，用来帮助学生检查学习效果；

(4)每个数学概念都有英文表达；

(5)本教材渗透现代数学思想、概念、语言和方法，引进当今世界上极为流行的 Matlab 软件，以提高学生结合计算机及数学软件求解数学模型的能力。为方便教学每章提供了一个基于 Matlab 软件的数学实验例子；

(6)降低理论难度，重视实践；

(7)本教材体系科学，结构严谨，叙述详细，通俗易懂，例题较多，逻辑性强。

本书下册内容包括空间解析几何、多元微分、重积分、线积分、面积分、微分方程。建议教学时数为 72 左右。

本书由呼伦贝尔学院的万阿英担任主编，由呼伦贝尔学院的丽娜、王建芳担任副主编。

本书的编写工作由万阿英主持，第 1、2、3 章由呼伦贝尔学院的杨金英编写，第 4、5 章和第 6 章前 5 节由呼伦贝尔学院的

孔德宝编写,第 6 章第 6 节以后的部分及第 7 章、第 9 章由王建芳编写,第 8、13 章由万阿英编写,第 10、11、12 章由丽娜编写。

呼伦贝尔学院数学系的教师:林洪燕、石磊、白红梅、包淑华、张丽娟、长林、王英英、佟丽艳、孙明稳做了大量的习题演算工作,在此表示感谢。

本书的出版得到了呼伦贝尔学院教材建设基金的资助。呼伦贝尔学院数学系对本书的编写和出版给予了大力支持,在此表示感谢。

本书可供普通高等学院理工科各专业作为数学教材,也可作为高职高专的数学教材。

限于编者水平,教材中可能存在一些不妥之处,希望广大读者提出批评和指正。

所有意见和建议请发往:gzjckfb@163.com
欢迎访问我们的网站:http://www.dutpgz.cn
联系电话:0411-84707492　84706104

编　者
2009 年 1 月

目　录

第 8 章　向量代数与空间解析几何 (Vector Algebra and Space Analytic Geometry)

我们知道，平面解析几何是用代数的方法来研究平面上的几何图形. 空间解析几何与平面解析几何相似，也是用代数作为工具来研究几何图形的. 也就是说，通过建立空间坐标系，把空间的几何图形用图形上的点所满足的代数方程来表示，从而用代数方程的一些性质来研究图形的性质，而且空间解析几何还能为二元函数提供直观的几何解释，因此我们在介绍多元函数的微积分之前先介绍空间解析几何的知识.

本章首先建立空间直角坐标系，然后介绍工程技术中广泛应用的向量代数，并利用向量代数讨论空间的平面和直线，最后简单地介绍空间的曲面和曲线.

8.1　向量代数 (Vector Algebra)

8.1.1　空间直角坐标系

1. 空间点的直角坐标(The Rectangular Coordinates of Point in Space)

空间解析几何是用代数方法来研究空间的几何问题的. 为此，首先要解决怎样用数来确定空间一点的位置. 我们知道，确定直线上一点的位置，只要用一个数就可以了；确定平面上一点的位置，需要用两个有序数，例如在平面上建立了直角坐标系 xOy，平面上任一点的位置就可以用两个有序数 x 和 y 来确定，记作 $M(x,y)$. 这样，我们很自然地会想到，要确定空间中一点的位置，就需要用三个有序数. 下面引入空间直角坐标系的概念.

在空间中选取一定点 O，过 O 点作三条相互垂直且单位相同的数轴 Ox、Oy、Oz，这就建立了一个空间直角坐标系，定点 O 称为坐标原点，三条数轴 Ox、Oy、Oz 称为坐标轴，分别简称为 x 轴、y 轴、z 轴，两个坐标轴确定的平面称为坐标平面，分别记作 xOy 平面、yOz 平面、xOz 平面.

对于空间直角坐标，我们作如下规定：如图 8-1 所示，以右手握住 z 轴，让右手的四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，自然伸出的大拇指方向就是 z 轴正向. 这样的坐标系就是本章使用的右手直角坐标系.

在空间直角坐标系中，整个空间被相互垂直的 xy 平面、yz 平面、xz 平面分成八个部

分，每一部分称为一个卦限，含有 x 轴正向、y 轴正向、z 轴正向的卦限称为第Ⅰ卦限. 图 8-2 中标出了Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ八个卦限.

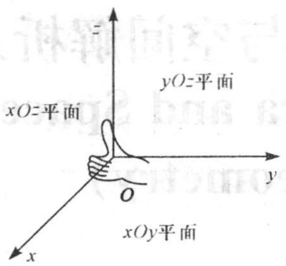


图 8-1

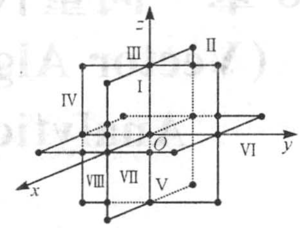


图 8-2

在空间建立了直角坐标系后，就可以建立空间的点与一个有序数组之间的一一对应关系. 设 M 为空间中的一点(如图 8-3)，过点 M 作垂直于三个坐标轴的平面，与三个坐标轴分别相交 P,Q,R 三点，这三点在 x 轴、y 轴，z 轴上的坐标依次为 x,y,z，于是空间的点 M 就确定了唯一一个有序数组 (x,y,z). 反之，已知一个有序数组 (x,y,z)，我们可以在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过 P、Q、R 分别作 x 轴、y 轴，z 轴的垂直平面. 这三个垂直平面的交点 M 便是由有序数组 (x,y,z) 所确定的唯一的点. 因此空间的所有点与全体有序数组 (x,y,z) 之间就建立了一一对应的关系. 这组数 (x,y,z) 就称为点 M 的坐标，记为 $M(x,y,z)$，其中 x 称为横坐标，y 称为纵坐标，z 称为竖坐标. 显然，原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别是 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,z)$；在坐标面 xy、yz、xz 上点的坐标分别是 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$.

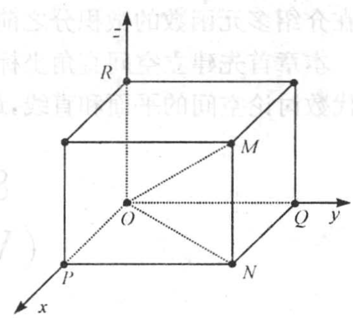


图 8-3

2. 空间两点之间的距离(The Distance Formula between Two Points in Space)

如图 8-3 所示，由勾股定理可以得出

$$|ON|^2=|OP|^2+|PN|^2=|OP|^2+|OQ|^2=x^2+y^2,$$

$$|OM|^2=|ON|^2+|NM|^2=|ON|^2+|OR|^2=x^2+y^2+z^2,$$

所以，点 $M(x,y,z)$ 与原点 $O(0,0,0)$ 的距离是

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

一般地，设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$、$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间的两点，可以证明 M_1 与 M_2 的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

例 1 在空间直角坐标系中，标出下列各点：

$$P(2,4,3),Q(2,4,-3),R(-2,4,3),S(2,-4,-3).$$

解 现在 xy 平面上找出坐标为 $(2,4,0)$ 的点 P'(如图 8-4)，过 P' 点作 z 轴的平行线，在这平行线上，沿 z 轴正向量 3 个单位得到点 P；沿 z 轴反向量 3 个单位得到点 Q. 为了标出点 R. 先在 xy 平面上找出坐标为 $(-2,4,0)$ 的点 R'，过 R' 点作 z 轴的平行线，在这

平行线上，沿 z 轴正向量 3 个单位得到 R；为了标出点 S，先在 xy 平面上找出坐标为 $(2,-4,0)$ 的点 S'，过 S' 点作 z 轴的平行线，在这平行线上，沿 z 轴反向量 3 个单位得到点 S.

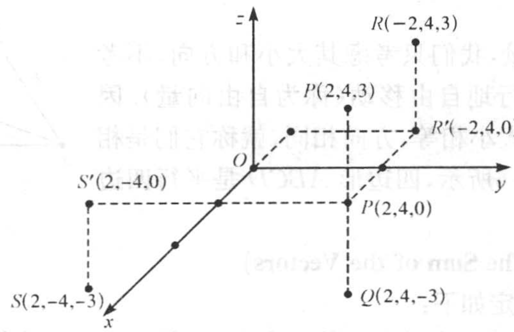


图 8-4

例 2　求证：以 $M_1(2,4,3)$、$M_2(4,1,9)$、$M_3(10,-1,6)$ 三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明　因为

$$|M_1M_2|^2=(4-2)^2+(1-4)^2+(9-3)^2=49$$
$$|M_2M_3|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49$$
$$|M_3M_1|^2=(2-10)^2+[4-(-1)]^2+(3-6)^2=98$$

所以 $|M_1M_2|=|M_2M_3|$ 和 $|M_1M_2|^2+|M_2M_3|^2=|M_3M_1|^2$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰直角三角形.

例 3　在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

解　因为所求的点 M 在 z 轴上，所以设该点为 $M(0,0,z)$，依题意有：$|MA|=|MB|$，即

$$\sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2+(7-z)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

两边去根号，解得 $z=\dfrac{14}{9}$，所求的点为 $M\left(0,0,\dfrac{14}{9}\right)$.

8.1.2　向量及其坐标表示

1. 向量的概念(Concept of Vector)

在实际工程技术的问题中，有一种量例如时间、长度和质量等，它们只有大小、没有方向，在取定一个单位后，可以用一个数来表示，这种量叫做数量. 另外还有一种量，例如物理学中的力、位移和速度等，它们除有大小之外还有方向，这种既有大小又有方向的量称为向量.

我们用有向线段 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 来表示向量(如图 8-5)，其中 M_1，M_2 分别为向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点和终点，线段的长度 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$ 表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的大小，由起点 M_1 到终点 M_2 的指向表示向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向. 有时也用一个粗体字母或书写体上面加一个箭头的字母来表示向量. 例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\cdots$ 或 $\vec{a},\vec{b},\cdots$ 表示向量.

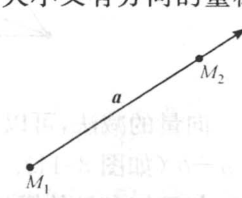


图 8-5

向量的大小称为向量的模,向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作 $|\boldsymbol{a}|$(或 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$). 模等于 1 的向量称为单位向量,模等于零的向量称为零向量. 记作 $\mathbf{0}$,零向量没有确定的方向,或者说它的方向是任意的.

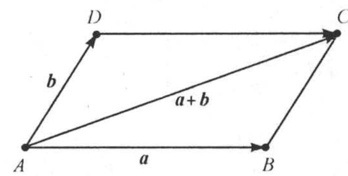


图 8-6

在数学中,对于向量,我们只考虑其大小和方向,不考虑其起点,向量可以平行地自由移动(称为自由向量). 因此,如果两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的大小相等,方向相同,就称它们是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 如图8-6所示,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,我们认为 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

2. 向量的加减法(The Sum of the Vectors)

向量的加法运算规定如下:

设有两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,平移 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 使起点重合,并以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为边做平行四边形(如图 8-6). 那么,以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点为起点的对角线所表示的向量定义为两向量之和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这就是向量加法的平行四边形法则. 由于向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点可以平行移动到 $\boldsymbol{a}$ 的终点,因而向量的加法也可理解为:以向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点为向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点作向量 $\boldsymbol{b}$,然后作出由 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量. 即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,这便是向量加法的三角形法则(如图 8-7). 这个法则可以推广到多个向量求和的情形.

例如 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$,可以先将第一个向量放好,然后依次把下一个向量的起点放在前一个向量的终点上,从第一个向量的起点到最末一个向量的终点的有向线段就是这些向量的和(如图 8-8).

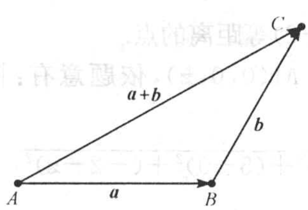


图 8-7

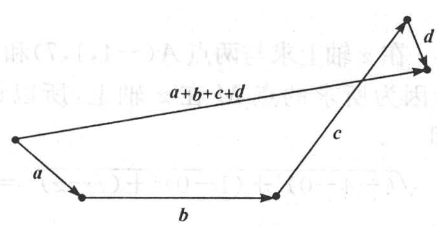


图 8-8

向量加法像实数加法一样满足交换律和结合律,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a},\quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

这些运算规律可按加法定义作图证明,如图 8-9 及图 8-10 所示.

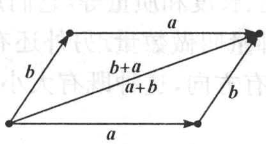


图 8-9

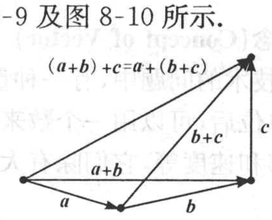


图 8-10

向量的减法,可以看作向量加法的逆运算. 规定:若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$,则称 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差,记作 $a-b$ (如图 8-11).

与已知向量的模相等,但方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$. 应用负向量的概念,可以把向量的减法变成向量的加法来运算(如图 8-12),即

$$a-b=a+(-b)$$

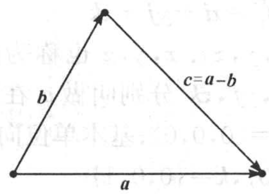


图 8-11

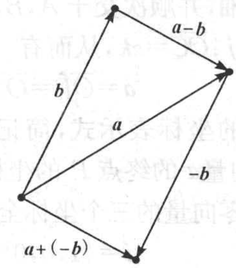


图 8-12

3. 数与向量的乘积(Scalar Multiple of Vectors)

实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$ 的积(简称数乘)是一个向量,记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 当 $\lambda>0$ 时,它与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $\lambda<0$ 时,它与 $\boldsymbol{a}$ 反向;而它的模是 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $|\lambda|$ 倍,即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|$$

当 $\lambda=\mathbf{0}$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}=0$;当 $\lambda=1$ 时,$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;当 $\lambda=-1$ 时,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$. 数乘运算满足结合律与分配律,即

$$\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\mu\lambda)\boldsymbol{a},\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$$

其中 λ,μ 都是数量. 设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量,令 $\lambda=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}$,于是 $\lambda\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的模等于 1,故 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是一个与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$,因此 $\boldsymbol{a}$ 可以表示为 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$. 这将给以后的向量运算带来很大方便. 例如,设 $\boldsymbol{i}$ 是与 x 轴同向的单位向量,$\overrightarrow{OA}$ 是 x 轴上的一个向量,点 A 的坐标为 x,则不论 $\overrightarrow{OA}$ 的方向是否与 x 轴同向,都有 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$,并且当 $x>0$ 时,$\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴的方向相同;当 $x<0$ 时,$\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴的方向相反.

一般我们规定:两个非零向量如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 显然向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们可以用向量的数乘来描述向量平行的条件.

定理 8.1.1 若向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$,则向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 的充要条件是:存在数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明 充分性 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 当 $\lambda=0$ 时,$\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$,因为零向量的方向可以是任意的,所以它与任何向量平行;当 $\lambda\neq 0$ 时,$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向或反向,所以它们平行. 即 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$.

必要性 设 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$. 当 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 时,可取 $\lambda=0$,这时 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0},\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$;当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向时,$\boldsymbol{b}=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$,这时 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$;当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向时,$\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\right)\cdot\boldsymbol{a}$,这时 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$.

4. 向量的坐标表示(Coordinate Representation of Vector)

上面我们是用几何方法介绍和讨论向量及其运算的,这个方法比较直观,但计算起来不方便,而且有些问题仅靠几何方法是很难解决的. 现在我们来引进向量的坐标表示,用代数方法讨论向量及其运算.

在空间直角坐标系中,沿 x 轴、y 轴、z 轴的正方向分别取单位向量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$,称为基本单位向量.

设向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点在坐标原点 O(如图 8-13). 过 $\boldsymbol{a}$ 的终点 $P(x,y,z)$ 作三个平面，分别垂直于三条坐标轴，并顺次交于 A,B,C. 因 $\overrightarrow{OA}$ 在 x 轴上，点 A 的坐标是 $(x,0,0)$，故有 $\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}$；同理 $\overrightarrow{OB}=y\boldsymbol{j}$；$\overrightarrow{OC}=z\boldsymbol{k}$，从而有

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式，简记为 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$. x,y,z 也称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，而 (x,y,z) 恰好是向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点 P 的坐标. 向量 $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$ 分别叫做 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴，y 轴，z 轴上的分向量. 显然，零向量的三个坐标全为零，即 $\boldsymbol{0}=(0,0,0)$；基本单位向量的坐标分别为：

$$\boldsymbol{i}=\{1,0,0\},\boldsymbol{j}=\{0,1,0\},\boldsymbol{k}=\{0,0,1\}$$

例 4 已知 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$ 是以 $A(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$B(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量(如图 8-14)，求向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

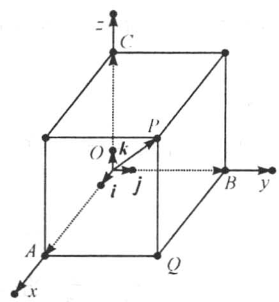


图 8-13

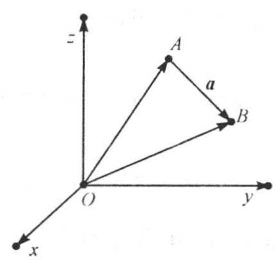


图 8-14

解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\\&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}.$$

由此可知，起点不在坐标原点的向量的坐标恰好等于向量终点的坐标与起点的坐标之差.

利用向量的坐标表示式，可得向量的加法、减法以及数乘的运算如下：

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，即 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$. 利用向量加法的交换律与结合律，以及数乘向量的结合律与分配律有

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=(\lambda a_x)\boldsymbol{i}+(\lambda a_y)\boldsymbol{j}+(\lambda a_z)\boldsymbol{k}$$

或记为：

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=\{a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z\},\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\}$$

其中 λ 为数量. 由此可见，对向量的运算可以转化为向量的各个坐标的普通的代数运算.

定理 8.1.1 指出，当向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\boldsymbol{b}/\!/\boldsymbol{a}$ 相当于 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，以坐标表示即为

$$\{b_x,b_y,b_z\}=\lambda\{a_x,a_y,a_z\}$$

这也就相当于向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 对应的坐标成比例：

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z} \qquad (1)$$

例 5 已知 $\boldsymbol{a}=(1,-2,3)$，$\boldsymbol{b}=(1,5,-4)$，求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$.

解 因为 $2\boldsymbol{a}=(2,-4,6)$，$3\boldsymbol{b}=(3,15,-12)$，所以

$$2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=\{2-3,-4-15,6-(-12)\}=\{-1,-19,18\}.$$

5. 向量的模和方向余弦的计算公式

(Formula of Computation of Vector Module and Direction Cosine)

我们已经知道，向量有两个特征：大小和方向. 现在引进了向量的坐标，那么如何用向量的坐标来表示它的大小和方向呢？

任给一向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，设点 M 的坐标 $\{a_x,a_y,a_z\}$ 即 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，于是

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

这就是模的坐标计算公式.

把非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点放在同一点 O，其终点分别为 A,B，则 $\angle AOB$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$. 我们规定 $0\leqslant(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\leqslant\pi$. 若 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与三坐标向量的夹角设为：$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{i}})=\alpha$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{j}})=\beta$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{k}})=\gamma$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角. 方向角 α,β,γ 的余弦：$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

下面建立两非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角余弦的计算公式. 如图 8-15 所示，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，在三角形 OBA 中，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，由余弦定理得

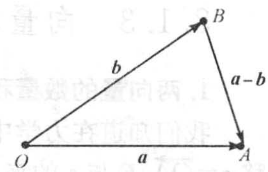


图 8-15

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}) \qquad (2)$$

由于

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2&=(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2+(a_z-b_z)^2\\&=a_x^2-2a_xb_x+b_x^2+a_y^2-2a_yb_y+b_y^2+a_z^2-2a_zb_z+b_z^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z).\end{aligned}$$

代入(2)式，再化简得

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (3)$$

特别取向量 $\boldsymbol{b}$ 为单位坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，代入(3)式可得

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\\cos\beta&=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\\\cos\gamma&=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\end{aligned} \qquad (4)$$

这就是方向余弦的坐标计算公式.

由(4)式得

$$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\left\{\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|},\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}\right\}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\{a_x,a_y,a_z\}=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}.$$

上式说明,a 的方向余弦组成的向量$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$就是 a 的单位向量.

例 6 已知 $a=\{2,3,-6\}$,求其方向余弦.

解 $|a|=\sqrt{2^2+3^2+(-6)^2}=7$,所以 $\cos\alpha=\frac{2}{7},\cos\beta=\frac{3}{7},\cos\gamma=-\frac{6}{7}$.

例 7 设向量 a 的三个方向角都相等,求其方向余弦.

解 由于$\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$是单位向量,依条件有 $\alpha=\beta=\gamma$,所以

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\alpha=1.$$

从而 $\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$,因此 a 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

或

$$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

8.1.3 向量的乘法

1. 两向量的数量积(Dot Product of Two Vectors)

我们知道在力学中,一个质点在力 F 的作用下自 O 点移到 A 点(如图 8-16),得到位移 $s=\overrightarrow{OA}$,F 与 s 的夹角为 θ,则 F 所作的功为

$$W=|F|\cdot|s|\cos\theta.$$

功 W 是数量,它由力 F 和位移 s 的模及夹角 θ 唯一确定.

在数学上,我们把功 W 称为力 F 和位移 s 的数量积.

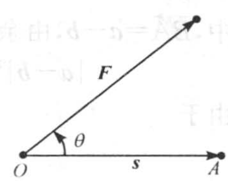


图 8-16

定义 8.1.1 两个非零向量 a,b 的模及其夹角 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$的余弦的乘积,称为两向量 a,b 的数量积(the dot product of vectors a and b)记作 $a\cdot b$,即

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi) \tag{5}$$

向量 a,b 的数量积也是一种运算,运算符号用 a、b 中间加一个黑点"·"表示,所以数量积又称点乘,注意作点乘时,这"·"不能省略.数量积有时简称内积.

若 a、b 中有一个是零向量,则规定其数量积为零.容易证明,数量积满足下列运算规律:

①交换律 $a\cdot b=b\cdot a$;

②结合律 $\lambda(a\cdot b)=(\lambda a)\cdot b$,$\lambda$ 为一数量;

③分配律 $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$.

由数量积的定义可知

$$a\cdot a=|a||a|\cos(\widehat{a,a})=|a|^2$$

即

$$a\cdot a=a^2=|a|^2$$

因而有

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1.$$

定理 8.1.2　两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证明　充分性　若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，由于 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$，所以 $\cos\theta=0$，从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直.

必要性　若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直，则 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0$.

由于零向量的方向可以看作是任意的，故可以认为零向量与任何向量都垂直. 因此，上述定理可以叙述为：$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

显然，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$.

2. 数量积的坐标表示式(Coordinate Representation of Dot Product of Vectors)

设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$，利用数量积的运算律有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+\\&\quad a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$，即两向量的数量积等于它们对应坐标的乘积之和.

显然，由数量积的坐标表示式可以立即得到向量模的坐标表示式：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

以及从数量积定义可推出两非零向量夹角余弦的坐标表示式：

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

由此还可以看出，两非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

例 8　已知三点 $M(1,1,1)$，$A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$，求 $\angle AMB$.

解　作向量 $\overrightarrow{MA}$ 及 $\overrightarrow{MB}$，$\angle AMB$ 就是向量 $\overrightarrow{MA}$ 与 $\overrightarrow{MB}$ 的夹角. 这里

$$\overrightarrow{MA}=\{1,1,0\},\overrightarrow{MB}=\{1,0,1\}$$

从而

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=1\times1+1\times0+0\times1=1;$$

$$|\overrightarrow{MA}|=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2},\quad |\overrightarrow{MB}|=\sqrt{1^2+0^2+1^2}=\sqrt{2}$$

代入两向量夹角余弦的表达式，得

$$\cos\angle AMB=\frac{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}|\cdot|\overrightarrow{MB}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

由此知

$$\angle AMB=\frac{\pi}{3}.$$

例 9　已知 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k}$，求与 $\boldsymbol{a}$ 同向的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$.