中学数学趣题

〔日〕矢野健太郎 著
曾慕莲 杨绮育 译

ZHONGXUE SHUXUE QUTI

ブルーバックス

山西人民出版

中学数学趣题

〔日〕矢野健太郎 著
曾慕莲 杨绮青 译

ブルーバックス

山西人民出版社

中学数学趣题

〔日〕矢野健太郎

曾慕莲　杨绮青　译

*

山西人民出版社出版　（太原并州北路十一号）

山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷

*

开本：787×960　1/32　印张：6.125　字数：100千字

1986年4月第1版　1986年4月太原第1次印刷

印数：1—27000册

*

书号：7088·1262　定价：0.75元

目　录

译 者 的 话

为丰富中学生的课外生活，培养其学数学的兴趣，扩大他们的知识面，我们翻译了这本书。愿此书能成为广大中学生学习数学的良师益友。

本书搜集的数学问题，有相当一部分是现行课本没有介绍而学生想要知道的。作者矢野健太郎先生在解答这些问题时参考了不少书籍和史料，对书中内容较深的问题，作者力求采用深入浅出的说明方法。书中绘制了一百多幅精美插图，可帮助读者生动形象地理解问题。

由于译者水平有限，本书难免存在不妥之处，我们热诚希望读者给予批评指正。

1984.7

前　言

这本书是讲谈社的布卢·贝克斯 (BLUE BACKS) 编辑部从读者中征集到关于数学的问题，经过 BLUE BACKS 编辑部和作者商量，然后由作者回答整理而成的。

这本书中的问题涉及到数学的各个方面，我们把它分类为：数的奥秘；计算中的为什么；你想知道的几何学问题；对策论与对策以及再深一步的问题。

作者对这些问题，试图尽量在不需要预备知识的条件下做出解答，但是在有些问题中，如"圆周率 π 的值是怎么求出来的。"要回答这个问题，需要不少预备知识，而要说明这些预备知识，不如把它先承认下来，采取通俗易懂的解答办法；又如有的读者提出：请说明"半径为 r 的圆的面积 πr^2 的道理"，"半径为 r 的球的表面积是 $4\pi r^2$ 的道理"，"半径是 r 的球体积是 $\frac{4}{3}\pi r^3$ 的道理"等等，则采用直观的或稍用一些数学知识的方法说明；也有正式的数学证明方法。在这种情况下，作者将自己所知道的各种各

样的办法尽可能地介绍给读者。

再则，在提问中如“对于任意给定的角，为什么不能用直尺、圆规作三等分”，“五次以上方程求根公式为什么不存在”，“马尔可夫过程是什么”，要回答这些问题，需要相当程度的数学知识，对于这种情况与其用数学本身的内容来说明，不如采取叙述其道理的作法。又如“在物理学中四维世界是什么样的世界”，“相对论中黎曼几何是什么样的几何”，对于这种理论性的问题，作者在力所能及的条件下，试图对它给出一个形象的解释。

作者没有把读者提出的问题全部做出回答。譬如“如何证明 π 是无理数”，“高斯怎么样用直尺、圆规作出正十七边形”，这些问题不是这本书所能解答的，请读者自己看有关专著。

在学习数学中，为了加深理解，最好的办法是不断地提出问题，再不断地解决它。我衷心地希望通过这本小书，进一步提高读者学数学的兴趣。

在编写本书的时候，作者参考了很多书籍，这里不一一列出，在此向这些书的作者表示感谢。本书中出现的人名的读法是根据岩波数学辞典来的。

本书的编成，自始至终得到了编辑部小宫浩民的全力支持，在此向他表示衷心地感谢。

1979.12. 矢野健太郎

编辑部的话

对于数学，编辑部收到许多信，这些信中提到了各种各样的疑问和感想。

有的说："我并不是不喜欢数学，但感到非常棘手……，怎样才能对数学产生兴趣呢？"

"在学校里，老师教负数和负数相乘得正，为什么是这样呢？我不清楚。"

"在三角函数中，tg、sin、cos 等这些符号是谁发明的？"等等。

问题各种各样，象这样的朴素的反映，包含着最基本的问题，那就是对于任何问题都是一样的，只要把基础知识确实掌握了，这才是提高自己的一个捷径。从这个观点出发，对读者提出的关于数学的朴素的疑问，有必要做出回答。这本书就是在这种愿望的基础上编出来的。我们已经出版了《物理问题信箱》。本书和其一样是通过报纸广告，征集了读者的问题。

我们收到了约八百名读者提出的，总数达二千五百道各种各样的问题。通过对这些问题的整

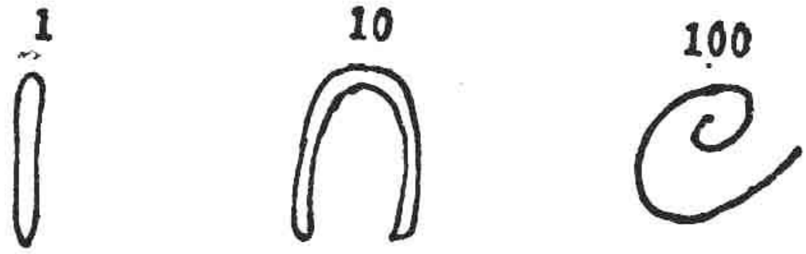
理和分类，对疑问最集中的问题进行了回答。我们请矢野健太郎先生帮助回答这些问题。正如矢野先生在前言中说的，在本书的范围内，要回答读者提出的所有问题，从量上和质上都有比较困难的地方，因此对某些问题不能不避开，在此表示歉意。

由于篇幅上的原因，对于提问者的姓名不能一一地登载出来，在此深表歉意。本书如果能对读者愉快的学习数学起到点滴的作用的话，编辑部的同志将感到万分高兴。

1 数的奥秘

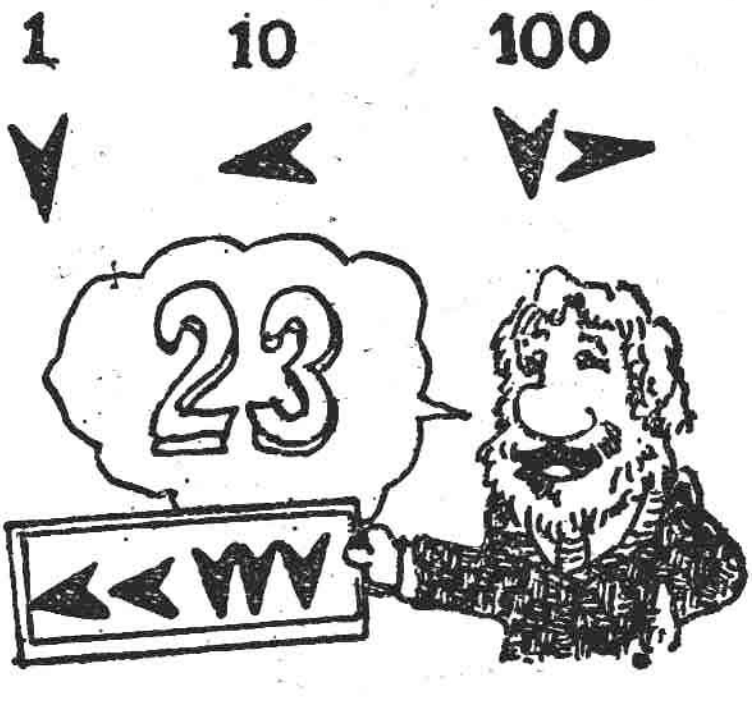
【问题】零是什么时候，什么地方，怎样发现的？〔译注〕

【回答】古时候的记数法并没有定位的原理。在埃及的记数法里，1、10、100的写法分别如下图所示：



23就写成：

在巴比伦的记数法里，1、10、100的写法如图所示：



(巴比伦记数法)

在希腊的记数法里，1、5、10的写法分别表示为：

1	5	10
I	Γ	Δ

27就写成ΔΔΓII。

在罗马的记数法里，1、5、

为：

1	5	10
I	V	X

27就写成XXⅦ。

如上所述的我们可以知道，虽然很早以前，人们就用到十进位法，但是从那里面看不出定位数的原理。

从他们留下来的记录里有平方表：

$1^2=1$、$2^2=4$、$3^2=9$、$4^2=16$、…、$7^2=49$

可是接下去他们就写成：

$8^2=1,4$、$9^2=1,21$、$10^2=1,40$、$11^2=2,1$

从这里可看出逗号前面1的意思是$60\times1=60$，2的意思是$60\times2=120$，因此可以肯定地说，那时他们已经有了定位数的原则。

根据公元前200年巴比伦人的记录，他们为了填补数字的空位，已经用到相当于零这个记号，可是在计算上并没有用它。

“0”这个记号和定位数的原则，据说是印度人发现的，但是在公元前二世纪印度的记录里

还没有0这个记号，也没有定位数的原则。

印度记号中的零，最初是用点“·”来表示的。这个记号是用来代替数字的空位。

现在我们所使用的零的记号，是公元876年在印度的记录中才有记载的。

由印度人所发现的零与定位数的原则，通过阿拉伯人传到了欧洲，因此欧洲人就以为是阿拉伯人发现的。

【译注】1.巴比伦人懂得位值制的道理，但用的是60进制。使用位值制而又是十进制的，以中国人为最早。甲骨文和金文早已使用十进制（郭沫若全卷第一卷《甲骨文字研究·释五十》1962）。后来用算筹来记数，十进位值制就十分明确。

筹，就是一些小竹片，木棍。1954年在长沙左家公山一座战国晚期的楚墓出土文物中，有一个竹筒，其中装有天平、法码、铜削、毛笔等物品，很象是一套办公用具。其中还装有竹棍四十根，长短一致，约12厘米。实际上，这就是算筹实物。1978年在河南登封出土的战国早期陶器上刻有算筹记数的陶文，这是已发现的关于算筹记数的最早的实物证据。在战国时期的货币中，也有一些是用算筹记写的数目为纹式的。筹算的产生应在春秋战国（约公元前5世纪）之前，到春秋战国时期臻于成熟。《老子》提到“善计者不用筹策”，可见这时候筹算已经相当普遍了。日

本三上义夫也认为，算筹的使用恐怕还在“书契”（古代文字多用刀刻）之前（见三上义夫《中国算学之特色》林科棠译（1929）P.45），可见筹算的出现不会晚于公元前三世纪，大概可以上推到战国初期。

用筹来表示数目，有纵横两种方式：

纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

记数时，个位用纵式，十位用横式，百位又用纵式，千位用横式，…。这样纵横相间，再加上遇零空位的方法，就可摆出任意的自然数。例如6728用算筹摆就是𝍮𝍦𝍪𝍧；6708就摆成：𝍮𝍦 𝍧，空一格的地方表示零。由于各位数字纵横相间，所以不致看错。这种记数法是符合十进位值制原则的。“十进”是指“逢十进一”，“位值制”也叫“地位制”，例如同样是2，在十位就是20，在百位就是200，根据这个2在数目中的位置不同，它所表示的数值也不同。

十进位值制的记数法是我国古代劳动人民的一项极为出色的创造。它比古巴比伦、古埃及和古希腊所用的计算方法要优越得多。印度到了公元

七世纪才有采用十进位值制记数法的明显证据。

2.我国的十进位值制创建得最早，而且早就用空位位置表示零，所以零的出现和十进位值制与空位的使用是分不开的。我国古代习惯于用“□”形式来表示脱落文字，记数时就用“□”表示空位。后来，为了书写方便，逐渐将“□”演变为“○”形，这是很自然的发展形式。据考证，最早出现“0”的地方在中印两国边界记有年代（公元683年）的碑文上。印度最早发现有“0”的记载是在公元870年。究竟“0”的发明归功于中国还是印度，还很难说，有待进一步考证。所以有人说，中国是0的父亲，印度是它的母亲。

【问题】零是偶数，还是奇数呢？

【回答】零是偶数。通常把，

$$\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \cdots$$

叫做偶数。把，

$$\cdots, -3, -1, 1, 3, 5, 7, \cdots$$

叫做奇数。

【问题】负数是怎样发现的？〔译注〕

【回答】埃及、巴比伦以及希腊的数学里都没有负数的想法。

最初有负数的想法据说是印度人。印度人把财产用正数来表示，负债就用负数来表示。

印度的数学家巴斯喀拉（Bhaskara，1114—1185年）说：“正数的平方、负数的平方都是正数。所以，正数的平方根有两个，其中一个是正数，另一个是负数。”

当时巴斯喀拉已经知道二次方程有两个根。这里我们用一个例子说明巴斯喀拉的想法。对于二次方程：

$$x^2-2x-15=0。$$

首先把所给的式子写为：

$$x^2-2x=15,$$

两边各加1，得

$$x^2-2x+1=16,$$

$$(x-1)^2=16。$$

但是16的平方根有两个，一个是+4，另一个是-4，故，

$$x-1=4 \quad 或 \quad x-1=-4,$$

所以，$x=5$ 或 $x=-3$。

但是到了这一步，他认为负根（-3）这个解答可能不会被人们所信服。因此他说这个题的解答只取正根（5）。

这个负数的想法和其它数学一起由印度传入到欧洲。不过当时负数的想法在欧洲也很难在人们之间传播开来。

负数被人们当作是理所当然的接受下来，那是从笛卡尔（René Descartes，1596—1650年）

在直线上用刻度来表示负数的时候才开始的。

【译注】《九章算术》是现传我国古代最早的一部数学专著。也是举世公认的古典数学名著之一，在世界数学史上占有重要的地位。负数最早出现于这部书的“方程章”。本章中载有：“正负术曰：同名相除、异名相益，正无入负之，负无入正之；其异名相除，同名相益，正无入正之，负无入负之。”此术前半就是现在的正负数减法法则，后半是现在的正负数加法法则。

其中负数概念的引入和正负数的加减运算法则等，都比印度早八百年左右，比欧洲国家则早千余年。

【问题】有理数和无理数相比，哪边多呢？

【回答】要回答这个问题，首先需要说明一下可数集合这个名词。

在无限集合中，我们最熟悉的要算是自然数1，2，3，4，5，…这样的集合。

现在我们来看看和自然数集合成一一对应的无限集合。和自然数集合成一一对应的集合是：对集合中的元素都能够附上第一，第二，第三，……等等号码的无限集合。

如果把这种集合的第一个元素写成a_1，第二