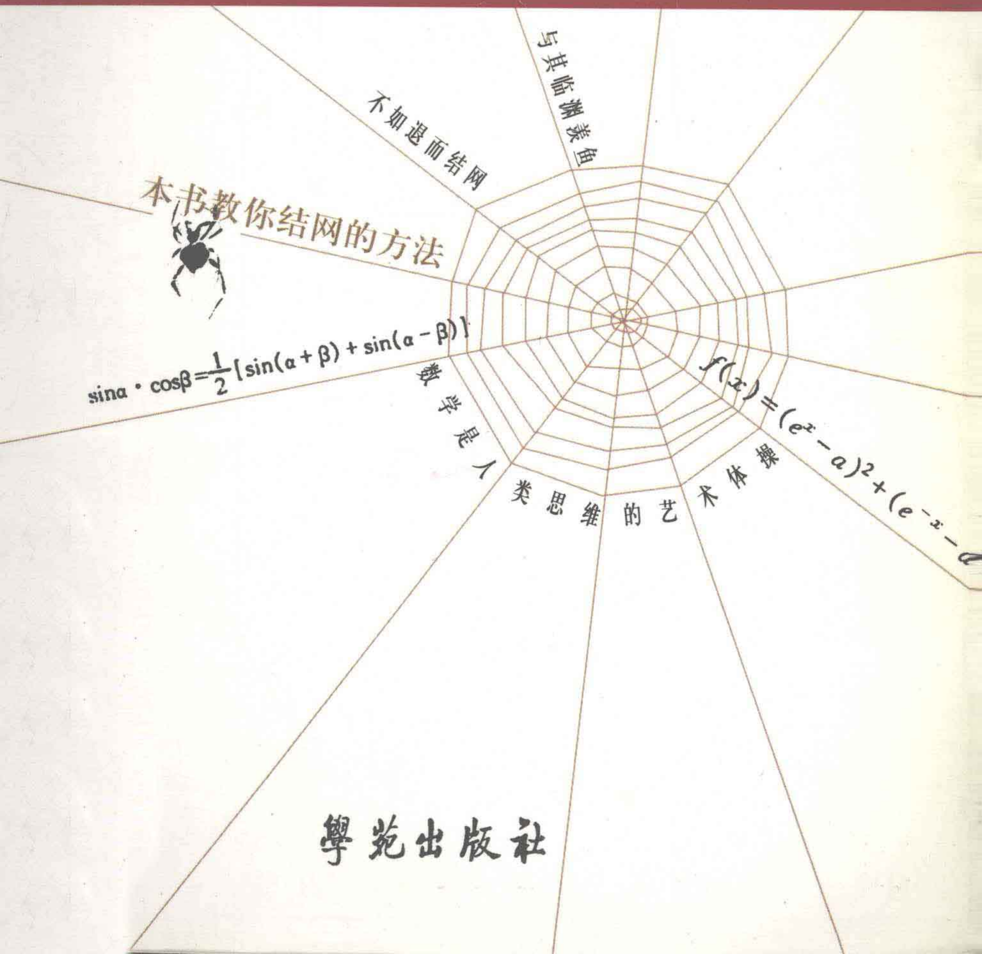
1 数学思维方法

柏均和高中数学指导

柏均和 著



學苑出版社

数学思维方法

柏均和高中数学指导

第一册

柏均和 著

学 苑 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

数学思维方法:柏均和高中数学指导(第一册)/柏均和著.
-北京:学苑出版社,2000.3
ISBN 7-5077-0306-1

Ⅰ.数…　Ⅱ.柏…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料
Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 07521 号

学苑出版社出版发行
北京市万寿路西街 11 号　100036
高碑店市印刷厂印刷　新华书店经销
850×1168　32 开本　10.625 印张　220 千字
2000 年 3 月北京第 1 版　2000 年 3 月北京第 1 次印刷
印数:5000 册
定价:11.00 元

序　言

该书是高中学生学习数学的一部有特色的实用参考书。

该书对高中数学知识进行了颇有新意的梳理,揭示了知识要素之间的内在的、系统的联系,使学生站在一个逻辑体系上去认识、理解和记忆数学知识。

该书对高中数学中的重点、难点进行了深入的剖析,不就题论题,而是教其知,授其法,以法述知,揭示规律,由例及类,举一反三,这对于促使高中学生建立数学思想,提高学生的数学能力,培养学生的数学素养具有重要的作用。

该书还对学生的学习策略,结合高中数学各章的具体内容进行了深入的论述,这对于帮助高中学生建立正确的学习方法很有启发。

该书还配备了经过精选的练习题,这些习题主要是经过重点学校学生反复实练后的主客观复习题,同时还对二十多年我国高考题进行了按章的分类介绍,这对于学生深刻认识高中数学考点的要求,提高学习数学的实效性,具有特殊作用。

该书不是以某一版本的数学教材为准,而是兼顾了现行的数学通用教材和一些实验教材。既适合于学生参加高考的毕业复习,更适合日常教学参考。因为作者认为,掌握知识比应考更重要。而真正掌握了知识,应考也就成了知识的运用而已。因此,将该书选为学习数学的重要参考书,使学生在学习过程中,不仅知其然,更知其所以然,对磨练学生智力、提高学生能力均有很大帮助。

在本书编写过程中,作者将自己四十年中学数学教学的经验,特别是在近二十年来,运用该书成果,指导学生参加数学高考取得优异成绩和突出效果上所积累的经验,均无保留地介绍了出来。在当前全面实施素质教育的过程中,在对数学高考内容进行改革

的过程中,数学做为高中的一个基础学科,任务十分艰巨,而该书的实践与探索均有一定的参考价值。

在本书编辑过程中,天津第一中学的优秀青年老师王悦、何智理、袁爽等同志参加了书中热点训练题的选编和做答,并对高考题进行了抄写,特别是王悦绘制了该书的全部图形,并以原稿为本,进行了认真的校对。对此,本书作者表示衷心的感谢。

目 录

§1 幂函数、指数函数和对数函数

一 要点梳理(4个问题) …… (1)

1 集合…… (1)

2 映射与函数…… (3)

3 幂函数…… (6)

4 指数函数与对数函数…… (9)

二 难点剖析(4个问题) …… (12)

1 深刻地认识集合的知识以及映射与函数的概念 …… (12)

2 函数的基本性质及其应用规律 …… (24)

3 二次函数的知识规律与典型应用 …… (31)

4 指数方程、对数方程的解法及参数讨论问题…… (40)

三 热点训练…… (51)

四 答案提示…… (89)

五 学法指导…… (97)

§2 三角

一 要点梳理(3个问题) …… (105)

1 三角函数…… (105)

2 两角和与差的三角函数,解斜三角形 …… (108)
——两角和与差的三角函数

3 两角和与差的三角函数,解斜三角形 …… (112)
——解斜三角形

4 反三角函数和简单三角方程…… (115)

二 难点剖析(5个问题) …… (118)

1 三角函数的性质图象和典型应用例析…… (118)

2 三角式的化简、证明、求值问题及其变形规律…… (127)

3 解斜三角形的知识规律与典型应用例析…… (154)

4 深刻地认识反三角函数概念…… (165)

5　简单三角方程的解法规律……………………………………………………(175)
三　热点训练 ……………………………………………………………………(186)
四　答案提示 ……………………………………………………………………(221)
五　学法指导 ……………………………………………………………………(231)
§3　不等式
一　要点梳理(2个问题) ………………………………………………………(241)
1　不等式的概念、性质和证明 ………………………………………………(241)
2　不等式的解法……………………………………………………………………(243)
二　难点剖析(3个问题) ………………………………………………………(245)
1　深刻地认识不等式的概念与性质……………………………………………(245)
2　证明不等式的基本方法…………………………………………………………(249)
3　不等式的解法的分类研究及有关规律………………………………………(263)
三　热点训练 ……………………………………………………………………(284)
四　答案提示 ……………………………………………………………………(311)
五　学法指导 ……………………………………………………………………(320)

§1　幂函数、指数函数和对数函数

一　要点梳理

1　集合

〈1〉集合

是数学中最原始的概念之一,不能以其它更基本的概念给它下定义,是不定义概念.其每一组对象的全体形成一个集合(或简称集),各个对象叫这集合的元素.

〈2〉分类

⑴有限集:含有限个元素的集合,

⑵无限集:含无限个元素的集合,

⑶空集:不含任何元素的集合.

〈3〉特征

⑴确定性:一给定集合 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{X}$ 为某一具体对象,则 $\boldsymbol{X}$ 或为 $\boldsymbol{A}$ 的元素或不是,二者必居其一.

⑵互异性:一集合中的元素分别代表不同的对象,相同对象归入一集合时,只能算作这集合中的一个元素.

⑶无序性:一给定集合 $\boldsymbol{A}$ 中的元素,不论其顺序如何排列,只能算一个确定的集合,不能视为不同的集合.

⑷广泛性:即集合中的元素所代表的对象允许有意义上的广泛性.

〈4〉表示法

⑴列举法:把集合中的元素逐一列出,写在大括号内.

⑵描述法:把集合中元素的公共属性描述出来写在大括号内.

⑶习惯表示:

①集合:大写拉丁字母表示,

②元素:小写拉丁字母表示,

③a 是集合 A 中的元素:记为 $a\in A$,

④b 不是集合 A 中的元素:记为 $b\notin A$ 或$b\bar{\in} A$,

⑤自然数集:N,

⑥整数集:Z,

⑦有理数集:Q,

正有理数集:Q^{+},

负有理数集:Q^{-},

⑧实数集:R,

正实数集:R^{+},

负实数集:R^{-}.

〈5〉**关系**

(1)子集:两个集合 A 与 B,如 A 的任一元素都是 B 的元素,则 A 叫 B 的子集,记为 $A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$),

①任一集合是它本身的子集,记为 $A\subseteq A$,

②空集是任何集合的子集,记为 $\Phi\subseteq A$,(注意 Φ 与$\{\Phi\}$不同),

③真子集:如 A 是 B 的子集,且 B 中至少有一个元素不属于 A,则 A 是 B 的真子集,记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$),

④空集是任何非空集的真子集.

(2)集合相等:两个集合 A 与 B,如 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,则 $A=B$.

(3)交集:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合,叫 A 与 B 的交集,记为 $A\cap B$.

(4)并集:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合,叫 A 与 B 的并集,记为 $A\cup B$.

(5)全集:在研究集合间关系时,有时一些集合是某一给定集合的子集,该给定集合为全集,记为 I.

(6)补集:如 $A\subseteq I$,由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫 A 在 I 中的补集,记为 $\bar{A}$.

2　映射与函数

〈1〉映射

设 A、B 是两个集合，如按某种对应法则 f，对 A 中任一元素，在 B 中都有唯一元素和它对应，这样的对应(包括 A、B 以及 f)，叫从 A 到 B 的映射，记为 $f:A\to B$.

简而言之，映射的特征是：

一对一
多对一，均可，但不能一对多，即

A 无余，或 A 中每一元素有象，
B 可余　　B 中元素不一定有原象.

〈2〉一一映射

设 A、B 是两个集合，$f:A\to B$ 是从 A 到 B 的映射，在这映射的作用下，对 A 的不同元素如能在 B 中有不同的象，而 B 中每一元素都有原象，则这映射叫 A 到 B 上的一一映射.

简而言之，一一映射的特征是：

单射——对一，

射满—A 无余，

满射—B 无余.

〈3〉逆映射

设 A、B 是两个集合，并且 $f:A\to B$ 是 A 到 B 上的一一映射，如对 B 中每一元素 b，使 b 在 A 中原象 a 与之对应，这样所得映射叫映射 $f:A\to B$ 的逆映射，记为 $f^{-1}:B\to A$.

注意，在一一映射的基础上才能谈到逆映射.

〈4〉函数

⑴定义

①传统定义：如在某变化过程中有两个变量 x、y，并对 x 在某一范围内的每一确定的值，按照某个对应法则，y 都有唯一确定的值和它对应，那 y 就是 x 的函数.

x—自变量，

x 取值范围—函数的定义域，

和 x 值对应的 y 值—函数值,

函数 y 值的集合—函数的值域.

②近代定义:设 A、B 都是非空数的集合,f 是 A 到 B 的一个对应法则,那 A 到 B 的映射 $f: A \to B$,叫 A 到 B 的函数,记为 $y=f(x)$

$x \in A$,$y \in B$,

原象集合 A—函数 $y=f(x)$ 的定义域,

象集合 C—函数 $y=f(x)$ 的值域,$C \subseteq B$.

比较:

相同点:

ⅰ 实质一致,

ⅱ 定义域、值域意义一致,

ⅲ 对应法则一致.

不同点:

ⅰ 传统定义从运动变化观点出发,描述生动、直观.

ⅱ 近代定义从集合、映射观点出发,其描述更具广泛性.

这里有以下问题应当注意:

ⅰ 函数是具备以下特点的特殊映射:

A、B 是非空数的集合,

$f: A \to B$ 是 A 到 B 的映射.

ⅱ 函数的核心—对应法则 f,其 f 对 $y=f(x)$,是 x 拉着 y 的纽带与法则,

f 简单时,可用解析式表示,

f 复杂时,可用其它方式表示.

ⅲ 函数的重要部分:

定义域:如函数的解析式相同,但定义域不同,视为不同的函数.

值域:单值函数.

符号:$y=f(x)$,仅表 y 是 x 的函数,当 $y=f(x)$ 是一解析式,也可视为一方程.

(2)性质

①单调性:如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数(或减函数),就说 $f(x)$ 在这一区间上具有(严格的)单调性,这一区间叫做 $f(x)$ 的单调区间.

这里有以下问题应当注意:

ⅰ 有些函数在整个定义域内都是增函数或减函数;

有些函数在某些区间上是增函数,而在另一些区间上是减函数;

有的函数定义域不是区间,则无单调区间;

有的函数,如 $f(x)=\frac{1}{x}$,区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数,在 $(-\infty,0)$ 上也是减函数,但不可说在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数.

ⅱ 正确理解单调含义,即在单调区间内,只增不减或只减不增,不能又增又减,显然不单调.

ⅲ 正确理解两个区间的公共端点处,函数的单调性是对某个区间而言的,对单独的一点,其函数值是唯一确定的值,无增减变化,也就不存在单调性问题.

ⅳ 现主要研究连续函数或分段连续函数,对闭区间上的连续函数,只要开区间单调,则闭区间也单调,包不包括端点均可.

②奇偶性

奇函数:

ⅰ 定义:对于函数 $f(x)$,如对其定义域内任一 x,都有 $f(-x)=-f(x)$,那函数 $f(x)$ 就叫奇函数.

ⅱ 几何特征:图象关于原点成中心对称图形,由此画其图象可先画一半,另半由对称性描出.

ⅲ 如函数 $f(x)$ 是奇函数,又在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 也是增函数.

偶函数

ⅰ 定义:对于函数 $f(x)$,如对其定义域内任一 x,都有 $f(-x)=f(x)$,那函数 $f(x)$ 就叫偶函数.

ⅱ 几何特征:图象关于 y 轴成轴对称图形,由此画其图象也可先画一半,另半由对称性画出.

ⅲ 如函数 $f(x)$ 是偶函数,又在 $(0,+\infty)$ 上是增函数,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 是减函数.

注意:定义域不对称,一定不具备奇偶性,但定义域对称时,也不一定就具有奇偶性.

〈5〉反函数

⑴定义:

式子 $y=f(x)$,

表示自变量为 x,y 是 x 的函数,

设定义域为 A，值域为 C，

从式子 $y=f(x)$ 中解出 x，得式子 $x=\Phi(y)$，当原函数的映射为一一映射时，即在 C 中对 y 的任何一个值，由 $x=\Phi(y)$，必能在 A 中有唯一确定的 x 值和它对应，

这时 $x=\Phi(y)$ 就可视为 y 是自变量，x 是 y 的函数，

这样的函数 $x=\Phi(y)$ 叫函数 $y=f(x)$ 的反函数.

记为 $x=f^{-1}(y)$，习惯记为 $y=f^{-1}(x)$.

(2)求法：

第一步将 $y=f(x)$ 视为方程，解出 $x=f^{-1}(y)$，

第二步将 x、y 互换，得 $y=f^{-1}(x)$.

互为反函数的两函数如有解析式，一般不同，但少数例外，如 $y=x$ 的反函数为 $y=x$，又如 $y=\frac{1-x}{1+x}$ 的反函数为 $y=\frac{1-x}{1+x}$.

(3)互为反函数的函数图象间关系：关于直线 $y=x$ 对称.

注意：应用本结论画图时，x 轴与 y 轴的长度单位应一致，另本结论可应用于规律作图，即先画出原函数图象，再利用对称性画出其反函数的图象.

3 幂函数

〈1〉定义

(1)函数 $y=x^n$ 叫做幂函数，x 是自变量，n 是常数，现阶段只研究 $n\in Q$ 的情况.

(2)定义域

因为现阶段只研究 n 为有理数的情况，有理数的分类表为：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

其定义域分以下情况叙述

①当 $n=0$ 时.

$x^n=x^0=1(x\neq0)$，

得 $y=1$，

定义域为 $\{x\mid x\in R\quad 且\ x\neq0\}$，

②当 $n=1$ 时,

得 $y=x$,

定义域为$\{x|x\in R\}$.

③当 $n\in N$ 但 $n\neq 1$ 时

得 $y=x\cdot x\cdots\cdots x$(共 n 个 x 相乘)

显然定义域为$\{x|x\in R\}$.

④当 n 是正分数(设此正分数是既约分数$\frac{p}{q}$时,

得 $y=x^{\frac{p}{q}}, y=\sqrt[q]{x^p}$,

定义域为$\{x|$使$\sqrt[q]{x^p}$有意义$\}$

⑤当 n 是负整数时(设 $n=-p, p\in N$),

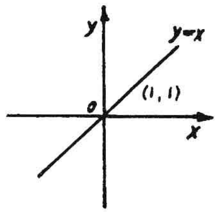
得 $y=x^{-p}, y=\frac{1}{x^p}$,

定义域为$\{x|$使$\frac{1}{x^p}$有意义$\}$.

⑥当 n 是负分数(设此负分数为负的既约分数$\frac{p}{q}$)时,

得 $y=x^{-\frac{p}{q}}, y=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$,

定义域为$\{x|$使 $y=\frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}$有意义$\}$.



〈2〉图象与性质

当 $n>0$ 时:

(1)如 $n=1$,图象如图,其图象

①过(0,0),(1,1)点,

②函数值随 x 增大而增大,

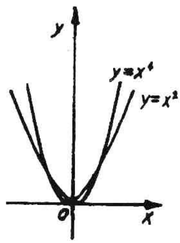
(2)如 $n=2,4,6,8\cdots$时,部分图象如图,其图象

①过(0,0),(1,1)点,

②在第一象限,函数值随 x 增大而增大,

③在第二象限,函数值随 x 增大而减小,

④在第一象限,$x>1$,指数越大,图象越靠近 y 轴.

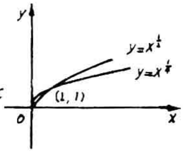


(3)如 $n=\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\cdots$,时,部分图象如图,其图象

①过(0,0),(1,1)点,

②在第一象限,函数值随 x 增大而增大,

③在第一象限,$x>1$,指数越小,图象越靠近 x 轴.

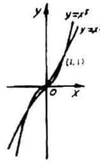


(4)如 $n=3,5,7,\cdots$,时部分图象如图,其图象

①过(0,0),(1,1)点,

②在第一、三象限,函数值随 x 增大而增大,

③在第一象限,$x>1$,指数越大,图象越靠近 y 轴.

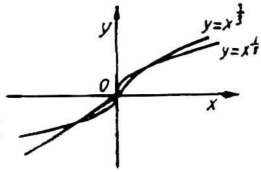


(5)如 $n=\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\cdots$,时部分图象如图,其图象

①过(0,0),(1,1)点,

②在第一、三象限,函数值随 x 增大而增大,

③在第一象限,$x>1$,指数越小,图象越靠近 x 轴.



总结:其共同的性质为:

ⅰ 图象都通过点(0,0),(1,1);

ⅱ 在第一象限内,函数值随 x 的增大而增大.

当 $n<0$ 时

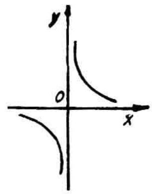
(1)如 $n=-1$,

图象如图,其图象

①过(1,1),(−1,−1)点,

②在第一象限,函数值随 x 增大而减小,

③在第三象限,函数值随 x 增大而减小.



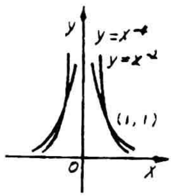
(2)如 $n=-2,-4,-6,\cdots$,时

部分图象如图,其图象

①过(1,1),(−1,1)点,

②在第一象限,函数值随 x 增大而减小,

③在第二象限,函数值随 x 增大而增大.



(3)如 $n=-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{6},\cdots$,时

部分图象如图,其图象

①过(1,1)点,

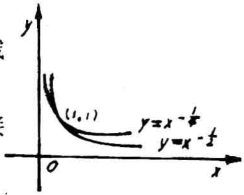
②在第一象限,函数值随 x 增大而减小.

总结:其共同的性质为:

ⅰ 图象都通过(1,1)点;

ⅱ 在第一象限内,函数值随着 x 的增大而减小;

ⅲ 在第一象限内,图象向上与 y 轴无限地接近,向右与 x 轴无限地接近.



4 指数函数与对数函数

〈1〉指数函数

(1)定义:形如 $y=a^x$ 的函数叫指数函数.

ⅰ 定义域$\{x|x\in \boldsymbol{R}\}$,

ⅱ 对底数 a 的限定$a>0$ 且 $a\neq 1$,即 a 的范围为$(0,1)\cup(1,+\infty)$,

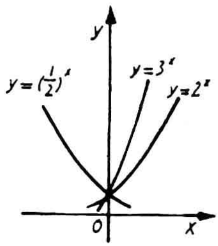
ⅲ 注意:

限定 a 的范围的原因,若 $a<0$,当 $x\in \boldsymbol{R}$,例$(-4)^{\frac{1}{2}}$无意义;若 $a=0$,当 $x\in \boldsymbol{R}$,例 0^{-2}无意义;若 $a=1$,当 $x\in \boldsymbol{R}$,变为 $y=1$,归到一次函数去研究.

应用中要区分指数函数 $y=a^x$ 与幂函数$y=x^n$ 的特征.

(2)图象与性质

为深入理解指数函数的性质:



ⅰ 抓关键:指数函数的关键在底,

底决定了函数的增减性.

$a>1$,为增函数,

$0<a<1$,为减函数.

ⅱ 抓界限:对于指数函数 $y=a^x$,

底 a 当然应大于零,其分界是 1,分 $0<a<1$ 与 $a>1$.

其 x 的分界是零,分 $x<0$ 与 $x>0$.

函数 y 必大于零,其分界是 1,分 $0<y<1$ 与 $y>1$.

ⅲ 抓特殊:

x 无特殊,$\{x|x\in \boldsymbol{R}\}$,

y 有特殊,$y>0$,当 $x=0$ 时 $y=1$.

ⅳ 抓趋势:

当 $a>1$ 时,

随 a 的值增大，其函数图象越靠近 y 轴，

当 $0<a<1$ 时，

随 a 的值增大，其函数图象越远离 y 轴.

〈2〉对数函数

(1)定义：形如 $y=\log_a x$ 的函数叫对数函数.

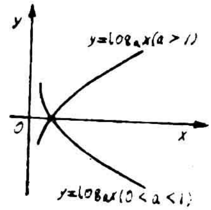
ⅰ 定义域 $\{x \mid x\in R^+\}$，

ⅱ 对底数 a 的限定 $a>0$ 且 $a\neq 1$，即 a 的范围为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$，

ⅲ 注意：

一般地，当 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数.

(2)图象与性质



为深入理解对数函数的性质

ⅰ 抓关键：对数函数的关键在底，

底决定了函数的增减性，

$a>1$ 为增函数，

$0<a<1$ 为减函数.

ⅱ 抓界限：对于对数函数 $y=\log_a x$.

其底 a 当然应大于零，其分界是 1，分 $0<a<1$ 与 $a>1$.

其 x 当然必大于零，其分界是 1，分 $0<x<1$ 与 $x>1$.

其 y 的分界是零，分 $y<0$ 与 $y>0$.

ⅲ 抓特殊：

x 有特殊，$x>0$，当 $x=1$ 时 $y=0$，

y 无特殊，$\{y \mid y\in R\}$.

ⅳ 抓趋势

当 $a>1$ 时

随 a 的值增大，其函数图象越靠近 x 轴.

当 $0<a<1$ 时，

随 a 的值增大，其函数图象越远离 x 轴.

〈3〉重要指对数公式

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}\,(a>0,m,n\in Q)$，

(2) $(a^m)^n=a^{mn}\,(a>0,m,n\in Q)$，

(3) $(ab)^n=a^nb^n\,(a>0,n\in Q)$，