高中数学
题组教学与课堂设计

（参考答案）

（内部使用）

目　录

代数部分

第一章　幂函数、指数函数与对数函数

§1　集合的概念与基本运算 …………(1)
§2　含参数的集合运算 …………(1)
§3　映射与函数 …………(2)
§4　函数的定义域 …………(3)
§5　函数的值域 …………(3)
§6　函数的奇偶性 …………(5)
§7　函数的单调性 …………(5)
§8　反函数 …………(7)
§9　函数的表达式 …………(8)
§10　函数的图象…………(9)
§11　二次函数与二次方程、二次不等式(Ⅰ)…………(9)
§12　二次函数与二次方程、二次不等式(Ⅱ) …………(11)
§13　函数的最值 …………(12)
§14　幂函数、指数函数与对数函数(Ⅰ)(概念、图象、奇偶性) …………(13)
§15　幂函数、指数函数与对数函数(Ⅱ)(性质的综合应用) …………(15)
§16　指数方程与对数方程 …………(16)

第二章　不等式

§18　不等式的性质 …………(17)
§19　整式、分式不等式的解法…………(18)
§20　绝对值不等式和无理不等式的解法 …………(18)
§21　指数与对数不等式的解法 …………(19)
§22　含参数的不等式的解法 …………(20)
§23　不等式的证明方法(Ⅰ)——比较法 …………(21)
§24　不等式的证明方法(Ⅱ)——公式法、分析法与综合法 …………(22)
§25　不等式的证明方法(Ⅲ)——数学归纳法与放缩法 …………(23)
§26　不等式的证明方法(Ⅳ)——换元法与判别式法 …………(24)
§27　绝对值不等式的证明及反证法的应用 …………(25)

第三章　数列、极限、数学归纳法

§29　数列及等差、等比数列的基本概念、基本公式…………(26)
§30　等差、等比数列的基本运算…………(26)
§31　等差、等比数列的性质及其应用(Ⅰ) …………(27)
§32　等差、等比数列的性质及其应用(Ⅱ) …………(28)
§33　等差、等比数列的综合应用…(29)
§34　数列的通项 …………(30)
§35　数列的求和 …………(30)
§36　数列的极限及其应用 …………(31)
§37　数学归纳法及其应用 …………(32)
§38　归纳、猜想、证明 …………(33)

第四章　复　数

§40　复数的基本概念 …………(35)
§41　复数的代数形式及其运算 …………(36)
§42　复数的三角形式及其运算(Ⅰ)(三角形式及辐角主值) …………(37)
§43　复数的三角形式及其运算(Ⅱ)(乘、除、乘方、开方运算及应用)…(38)
§44　复数的几何意义(Ⅰ)(加、减、乘、除法的几何意义及应用)…………(39)
§45　复数的几何意义(Ⅱ)(模与最值) …………(40)
§46　复数的几何意义(Ⅲ)(复平面上的轨迹问题) …………(42)
§47　复数集内的方程 …………(43)

第五章　排列、组合、二项式定理

§49　加法、乘法原理…………(44)
§50　排列问题 …………(44)
§51　组合问题 …………(45)
§52　排列、组合混和题…………(45)

§ 53　二项式定理 …………………… (46)
§ 54　二项式系数的性质 …………… (46)
§ 55　二项式定理的应用 …………… (46)

平面三角部分

第六章　三角函数

§ 57　三角函数的概念与基本公式 ……………………………… (47)
§ 58　三角函数的性质(Ⅰ) ………… (48)
§ 59　三角函数的性质(Ⅱ) ………… (48)
§ 60　三角函数的图象与变换 ……… (48)

第七章　两角和与差的三角函数

§ 62　三角函数式的恒等变形 ……… (49)
§ 63　三角恒等式的证明 …………… (50)
§ 64　三角函数的求值(Ⅰ) ………… (51)
§ 65　三角函数的求值(Ⅱ) ………… (51)
§ 66　三角条件等式的证明 ………… (52)
§ 67　三角中的计算与证明 ………… (53)
§ 68　三角函数的最大值与最小值 ……………………………… (54)
§ 69　三角函数的代换与消元 ……… (55)

第八章　反三角函数与三角方程

§ 71　反三角函数的概念、图象和性质 ……………………………… (56)
§ 72　反三角函数的运算 …………… (56)
§ 73　反三角函数的求值与等式证明 ……………………………… (56)
§ 74　简单三角方程的解法 ………… (57)
§ 75　三角不等式的证明 …………… (57)

立体几何部分

第九章　直线与平面

§ 77　平面、空间的两条直线………… (58)
§ 78　空间直线与平面 ……………… (58)
§ 79　空间平面与平面 ……………… (59)
§ 80　平行的判定与性质 …………… (60)
§ 81　垂直的判定与性质 …………… (61)
§ 82　异面直线及直线与平面所成的角 ………………………… (62)
§ 83　二面角与二面角的平面角 …… (63)
§ 84　点与点、点与线、点与面的距离 ……………………………… (64)
§ 85　线与线、线与面、面与面的距离 ……………………………… (65)
§ 86　三垂线定理及其逆定理的应用 ……………………………… (67)

第十章　多面体和旋转体

§ 88　棱柱、棱锥、棱台的有关概念和性质 ……………………………… (68)
§ 89　棱柱、棱锥、棱台侧面积及全面积 ……………………………… (69)
§ 90　圆柱、圆锥、圆台的有关概念、性质及侧面积 ……………………… (70)
§ 91　多面体和旋转体的侧面展开图 ……………………………… (71)
§ 92　球的有关概念、性质和计算…… (72)
§ 93　多面体的体积计算及其应用 ……………………………… (74)
§ 94　旋转体的体积计算及其应用 ……………………………… (76)
§ 95　截面问题 ……………………… (78)

平面解析几何部分

第十一章　直线和圆

§ 97　充要条件与坐标法的应用…(79)
§ 98　直线与直线系 ………………… (80)
§ 99　定比分点公式及其应用 ……… (81)
§ 100　圆的方程和圆系……………… (81)
§ 101　对称问题……………………… (82)
§ 102　直线和圆的关系……………… (84)

第十二章　圆锥曲线

§ 104　曲线与方程…………………… (85)
§ 105　椭圆…………………………… (86)
§ 106　直线与椭圆的位置关系……… (87)
§ 107　双曲线………………………… (88)
§ 108　直线和双曲线的位置关系…… (90)
§ 109　抛物线………………………… (91)
§ 110　直线和抛物线的位置关系…… (92)
§ 111　圆锥曲线定义的应用………… (94)
§ 112　坐标轴的平移及作图………… (95)
§ 113　圆锥曲线系…………………… (96)
§ 114　与圆锥曲线有关的轨迹问题

…………………………………… (97)

第十三章　参数方程、极坐标

§116　曲线参数方程的概念………… (99)
§117　直线的参数方程及其应用 … (100)
§118　圆、椭圆的参数方程………… (101)
§119　双曲线、抛物线的参数方程 ………
…………………………………… (102)
§120　应用参数求曲线的轨迹方程………
…………………………………… (104)
§121　极坐标系 ……………………… (105)
§122　直线、圆以及等速螺线的极坐标方程
…………………………………………… (107)
§123　圆锥曲线的统一的极坐标方程
　　及其应用…………………… (108)
§124　用极坐标法求曲线方程 …… (110)

第一章　幂函数、指数函数与对数函数

§1　集合的概念与基本运算

一、基本知识与基本技能检测

1. 选择题　(1)　C；　(2)　B.

2. 填空题　(1)　$\{3,2\}$；　(2)　7.

3.　4.

4. 解：由 $x=a^2+2a+4=(a+1)^2+3$，可知 $A=\{x|x\geqslant 3\}$. 由 $y=b^2-4b+3=(b-2)^2-1$，可知 $B=\{y|y\geqslant -1\}$，　∴　$A\subset B$.

三　典型例题

例 1　解：分析：所给集合是有限集，用韦恩氏图解答较为方便.

∴　$A\cup B=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

$B=\{2,4,6,8\}$，　$A=\{2,3,5,7\}$

例 2　解：由集合的性质知 $\lg(xy)=0$，即 $xy=1$

∴　$|x|=1$ 或 $|x|=x$. 当 $x=1$ 时不符合题意，则 $x=-1$，有 $y=-1$，　∴　$C=\{x+y|A=B\}=\{-2\}$.

例 3　解：设 $x_0\in A$，则 $x_0=f(x_0)$，

∴　$x_0=f[f(x_0)]$，即 $x_0\in B$，于是 $A\subseteq B$.

即 $A\cup B=A$，$A\cap B=A$，当 $a=1,b=2$ 时，

$x=f(x)$ 变为 $x^2+2=0$，此方程无实根，即

$A=\varnothing$，而方程 $x=f[f(x)]$ 变为 $(x^2+x+2)^2+x^2+4=0$，此方程也无实根，即 $B=\varnothing$，

故 $A\cup B=A\cap B=\varnothing$.

例 4　由 $A=\{x|x^3+2x^2-x-2>0\}$，得 $A=\{x|-2<x<-1$ 或 $x>1\}$，由 $B=\{x|x^2+ax+b\leqslant 0\}$，得 $B=\{x|\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，$\alpha,\beta$ 为方程 $x^2+ax+b=0$ 的两个实数根$\}$，

∵　$A\cup B=\{x|x>-2\}$，

∴　$-2<\alpha\leqslant -1$，$\beta\geqslant 1$，又 $A\cap B=\{x|1<x\leqslant 3\}$，

∴　$\alpha\geqslant -1$，$\beta=3$. 综上所述，得 $\alpha=-1$，$\beta=3$.

故 $a=-(\alpha+\beta)=-2$，$b=\alpha\beta=-3$.

四　课堂练习与作业

1. 选择题　(1)D；　(2)C.

2. 填空题　(1)$x\in M$，$y\notin M$；(2)$A=\{0,2,4\}$.

3. $q=\dfrac{1}{2}$.

4. 提示：$x=12m+8n=4(3m+2n)=(20-16)(3m+2n)=20(3m+2n)+16(-3m-2n)$.

故　$M=N$.

5. 解：由题设易求得 $B=\{2,3\}$，$C=\{2,-4\}$，由 $A\cap B\supset\varnothing$ 知 A 与 B 的交集为非空集.

故　2,3 两数中至少有一个适合方程 $x^2-ax+a^2-19=0$.

又　$A\cap C=\varnothing$，　∴　$2\notin A$ 且 $-4\in A$.

从而知 $3\in A$，　即 $9-3a+a^2-19=0$，解之，得 $a=5$ 或 $a=-2$，当 $a=5$ 时，$A=\{2,3\}$，于是

$A\cap C=\{2\}\neq\varnothing$，故 $a=5$(舍去)

当 $a=-2$ 时，$A=\{3,5\}$，于是 $A\cap B=\{3\}\supset\varnothing$ 且 $A\cap C=\varnothing$，故 $a=-2$ 为所求.

§2　含参数的集合运算

一　基本知识与基本技能检测

1. 选择题　(1)　D；　(2)　B.

2. 填空题　(1)　$A\cup B=\varnothing$，$A\cap B=\{x|x<-1\}\cup\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}\cup\{x|x>7\}$；(2)$\overline{M}\cap P=\{x|x=6k,k\in N\}$.

3. 解　∵　$A\cap B=\{1\}$，　∴　1 是方程 $x^2-px-q=0$ 的根，也是 $x^2+qx-p=0$ 的根.

∴　$\begin{cases}1-p-q=0,\\1+q-p=0.\end{cases}$　解之　$\begin{cases}p=1,\\q=0.\end{cases}$

∴　$x^2-x=0$　解之　$\begin{cases}x=0\\x=1\end{cases}$

$x^2-1=0$　∴　$x=\pm 1$，

∴　$A\cup B=\{-1,0,1\}$

4. 运用解析几何的知识易求出$[0,\sqrt{2}-1]$.

三　典型例题

例 1　解：由于 $\overline{A}=\{5\}$，∴$A=\{2,3\}$，∴　$|a-1|=3$，∴$a=-2$ 或 $a=4$ 且 $a^2+6a+13=5$，$a^2+6a+8=0$，解之 $a=-4$，$a=-2$，检验可知，当 $a=-2$ 时，$a^2+6a+13=5$，$|a-1|=3$，$a=-4$ 时 $|a-1|=|-4-1|=5$(舍去)，　∴　所求 a 的值是 -2.

例 2　解由 $10+3x-x^2\geqslant 0$ 得 $-2\leqslant x\leqslant 5$，所以集合 $A=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$，若 $B=\varnothing$，则 $A\cap B=\varnothing$ 成立. 这时 $m+1>2m-1$，由此得 $m<2$. 若 $B\neq\varnothing$ 则 $m\geqslant 2$，要 $A\cap B=\varnothing$ 必须 $m+1>5$，由此得 $m>4$. 故 $m<2$ 或 $m>4$ 为所求.

例 3　解若 $A=\varnothing$，则有 $(m+2)^2-4<0$，　∴　$-4<m<0$，若 A 集中含有单元素且 $x\in R^-$，则有 $\begin{cases}(m+2)^2-4=0,\\m+2>0.\end{cases}$　∴　$-2<m<0$，若 A 集合有两元

素且均为非正数，则有 $\begin{cases}(m+2)^2-4>0,\\ m+2>0.\end{cases}$ ∴ $m>0$ 或 $-2<m<0$，综上所述，m 的取值范围为 $-2<m<0$ 或 $m>0$.

例 4 若 $A\cap B\neq\varnothing$，则方程组

$\begin{cases}y=-3x+2,\\ y=a(x^2-x+1).\end{cases}$ 消去 y，得关于 x 的方程 $ax^2+(3-a)x+a-2=0$ 的两个根均为自然数.

设 x_1,x_2 是方程的两根，

则 $\begin{cases}\triangle(3-a)^2-4a(a-2)=9+2a-3a^2\geqslant 0,\\ x_1+x_2=1-\dfrac{3}{a}>1\\ x_1\cdot x_2=1-\dfrac{2}{a}\geqslant 1\end{cases}$

得 $\begin{cases}-2<\dfrac{1-\sqrt{28}}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{1+\sqrt{28}}{3}<3\\ a<0\end{cases}$ 解之，得 a 的整数解为 -1.

将 $a=-1$ 代入关于 x 的方程检验知，符合题意，故存在整数 $a=-1$ 使 $A\cap B\neq\varnothing$.

四 课堂练习与作业

1. 选择题 (1) D； (2) B.

2. 填空题 (1) $A\cap B=\{x|x=2k+1,k\in Z\}$，$A\cup B=Z$； (2) $A\cap B\cap C=\varnothing$.

3. 解(略).

4. 解：由 $x^2+2x+y^2\leqslant 0\Rightarrow(x+1)^2+y^2\leqslant 1$，由 $x+a-y\leqslant 0\Rightarrow y-x-a\geqslant 0\Rightarrow y\geqslant x+a$，把 $y=x+a$ 代入 $x^2+2x+(x+a)^2\leqslant 0$，$2x^2+(2+2a)x+a^2=0$. 使 $\triangle=(2+2a)^2-4\times 2a^2=0$，即 $(a-1)^2=2$， ∴ $a=1\pm\sqrt{2}$，舍去 $a=1+\sqrt{2}$， ∴ $a\in(-\infty,1-\sqrt{2})$.

5. 解：(1) ∵ $a=2$ 时，由(Ⅰ)得 $\dfrac{1}{1-2}\in S$，即 $-1\in S$，又 $-1\in S$ 时，由(Ⅰ)得 $\dfrac{1}{1-(-1)}\in S$，即 $\dfrac{1}{2}\in S$. 故当 $2\in S$ 时，S 中还有两个数 -1 和 $\dfrac{1}{2}$.

(2) ∵ $a\in S$，由(Ⅰ)，得 $\dfrac{1}{1-a}\in S$， ∴ $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-a}}\in S$. 即 $1-\dfrac{1}{a}\in S$.

(3) 假设 S 中仅有元素 a，由(Ⅰ)可知 $a=\dfrac{1}{1-a}$，即 $a^2-a+1=0$，而 $a\in R$，故方程无解.

故 S 中不可能仅有一个元素.

§3 映射与函数

一 基本知识与基本技能检测

1. 解(1)是；(2)不是. 因为 A 中元素 d 在 B 中没有象；(3)不是. 因为 A 中元素 b 在 B 中的象不唯一；(4)是.

2. 选择题：(1)B； (2)B； (3)D.

3. 解：设 $f(x)=kx+b$，由题设得 $\begin{cases}k+b=0\\ 2k+b=\dfrac{3}{5}\end{cases}$，

∴ $k=\dfrac{3}{5}$，$b=-\dfrac{3}{5}$， ∴ $f(6)=\dfrac{3}{5}\times 6-\dfrac{3}{5}=3$.

三 典型例题

例 1 解：f_1 是映射，但不是一一映射，因 A 中任何一个元素，在 B 中都有唯一的元素和它对应，但 A 中不同的元素(如 ± 2)在 B 中有相同的象(如 5).

f_2 是映射，同时也是一一映射. 因 A 中的不同元素在集合 B 中有不同的象，而且 B 中每一个元素都有原象.

∴ $f_2 x\to y=2^x$ 是从 A 到 B 的一一映射. ∴ 由 $y=2^x$ 得其逆映射 $f_2^{-1}y\to x=\log_2 y$.

例 2 如图 1－1

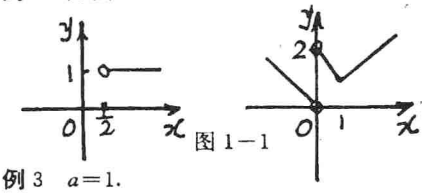


图 1－1

例 3 $a=1$.

例 4 解(1)∵ $l=20-2x$，∴ $y=\dfrac{l}{2}x=x(10-x)$.

(2)由 $y=-x^2+10x=-(x-5)^2+25$ 得

当 $x=5$ 时，$y_{max}=25$，此时扇形弧长 $l=20-2x=20-2\times 5=10$. ∴ $\theta=\dfrac{10}{5}=2$(弧度).

即当 $\theta=2$ 弧度时，圆锥侧面积最大，其最大值为 $25cm^2$.

四 课堂练习与作业

1. 选择题 (1)D； (2) C.

2. 填空题 (1) 11；(2) $(\dfrac{7}{5},-\dfrac{4}{5})$.

3. 解 ∵ $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}>0$，

∴ $f(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2})=0$，

∴ $f[f(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2})]=-e$，

∴ $f\{f[f(\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2})]\}=e^2+1$.

4. 解 ∵ $f(4)=f(4+0)=f(4)\cdot f(0)$，

$f(4)=16\neq 0$, ∴ $f(0)=1$, 又 ∵ $f(4)=f(2+2)=f(2)\cdot f(2)=[f(2)]^2=[f(1+1)]^2=[f(1)]^4$,

∴ $[f(1)]^4=16$, ∴ $f(1)=\pm 2$.

若 $f(1)=-2$, 则 $f(1)=f(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})=[f(\frac{1}{2})]^2=-2$ 是不可能的,

由此可知, $f(1)=2$, 故 $f(0)=1, f(1)=2$.

5. $y=\begin{cases}-3x+5 & (x\leqslant 1)\\ -x+3 & (1<x\leqslant 2)\\ 3x-5 & (x>2)\end{cases}$

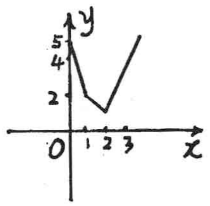


图 1—2

§4 函数的定义域

一 基本知识与基本技能检测

1. 选择题 (1) D; (2) D.

2. 填空题 (1) $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)$; (2) $[-2,4]$.

3. 解 $\begin{cases}3-x>0\\ -x^2+x+12\geqslant 0\\ x\neq -1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\ x<-3\\ x\neq -1\end{cases}\Rightarrow$

$-3<x<3$, 且 $x\neq -1$.

∴ 函数的定义域是 $(-3,-1)(-1,3)$.

4. 当 $a>1$ 时, 定义域为 $\{x|x>0\}$, 当 $0<a<1$ 时, 定义域为 $\{x|x<0\}$.

三 典型例题

例 1 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

例 2 解(1) ∵ $f(x)$ 定义域为 $[0,1]$, ∴ $0\leqslant x^2\leqslant 1$, 由于不论 x 为任何实数, 不等式 $0\leqslant x^2$ 永远成立, 故只需 $x^2\leqslant 1$,

∴ $-1\leqslant x\leqslant 1$.

∴ 函数 $y=f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$;

(2) 由 $0\leqslant 2x-5\leqslant 1$, 得 $\frac{5}{2}\leqslant x\leqslant 3$,

∴ 函数 $y=f(2x-5)$ 的定义域是 $[\frac{5}{2},3]$.

(3) 由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$, 由于不论 x 取何值, 不等式 $\sin x\leqslant 1$ 永远成立, 故只须解 $\sin x\geqslant 0$, 得

$2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi(k\in Z)$.

∴ $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi,(2k+1)\pi], k\in Z$.

例 3 解 ∵ $f(x^2-3)=\lg\frac{x^2}{x^2-6}=\lg\frac{x^2-3+3}{x^2-3-3}$. ∴ $f(x)=\lg\frac{x+3}{x-3}$.

由 $\frac{x+3}{x-3}>0$, 得 $|x|>3$. ∴ $-3>x$ 或 $x>3$.

所以 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$.

例 4 当 $k\leqslant 0$ 时, 定义域为一切实数; 当 $k>0$ 时, 若 $a>2$, 则定义域为 $x>\log_{\frac{a}{2}}k$; 若 $a=2$ 时, 则当 $k\geqslant 1$ 时无解; 当 $0<k<1$ 时, 定义域为一切实数, 若 $0<a<2$, 则定义域为 $x<\log_{\frac{a}{2}}k$.

四 课堂练习与作业

1. 选择题: (1) B; (2) C.

2. 填空题: (1) $\overline{A}=\{x|-\infty<x<-1\}\cup\{x|\sqrt{2}-1\leqslant x<+\infty\}$; (2) $D=\{x|-4\leqslant x\leqslant -\pi\}\cup\{x|0\leqslant x\leqslant\pi\}$.

3. 解: ∵ $ax^2+3x+a>0$, 且 x 为实数集, 若 $a>0$, 则 $\triangle=3^2-4a^2<0$, 解之得 $a>\frac{3}{2}$; 若 $a<0$, 且使 x 为实数集, 则无解. ∴ a 的取值范围是 $(\frac{3}{2},+\infty)$.

4. 解 $\begin{cases}-x^2-x>0 & (1)\\ \log_a(-x^2-x)\geqslant 0 & (2)\end{cases}$

当 $a>1$ 时, (2) 变为 $-x^2-x\geqslant 1$, ∴ $\begin{cases}-x^2-x>0\\ -x^2-x\geqslant 1\end{cases}$ 不等式组无解, 故 $a>1$ 时, 函数式不成立;

当 $0<a<1$ 时, (2) 式变为 $0<-x^2-x\leqslant 1$

∴ $\begin{cases}-x^2-x>0\\ 0<-x^2-x\leqslant 1\end{cases}$ 解之, $-1<x<0$.

故当 $0<a<1$ 时, 函数定义域为 $-1<x<0$.

5. 解由 $f(x)=a^x$, $f(2\log_a x)<\log_a f(x)$ 得, $a^{2\log_a x}<\log_a ax$, 由 $x>0$, 可知

$a^{\log_a x^2}<\log_a a^x$

∴ $x^2<x$, 解之得 $0<x<1$.

§5 函数的值域

一 基本知识与基本技能检测

一. 1. 选择题 (1) D; (2) A.

2. 填空题

(1) $(-4,1)$; (2) $[0,\frac{3}{2}]$; (3) $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

3. 解 显然 $y=\frac{x+1}{x+2}$ 的反函数是 $x=\frac{1-2y}{y-1}$ 其定义域为 $y\neq 1$ 的实数, 故函数 $y=\frac{x+1}{x+2}$ 的值域是 $\{y|y\neq$

$1, y\in R\}$.

4. 解：用判别式法：将函数变形为 $(y-2)x^2+(y-2)x+y-3=0$

(1)当 $y\neq 2$ 时，$\Delta=(y-2)^2-4(y-2)(y-3)\geqslant 0 \Rightarrow 2\leqslant y\leqslant\frac{10}{3}$；

(2)当 $y=2$ 时，方程 $x-1=0$ 无解，故函数的值域为 $2<y\leqslant\frac{10}{3}$.

三　典型例题

例 1　(1)解　$y+x=-2\sqrt{x^2+3x+4}$,

∴　$(y+x)^2=4(x^2+3x+4)$ 展开并化简整理成 x 的二次方程：

$3x^2+(12-2y)x+16-y^2=0$, ∵　$x\in R$,

故　$\Delta=4(6-y)^2-12(16-y^2)=16(y^2-3y-3)\geqslant 0$

解之，$y\leqslant\frac{3-\sqrt{21}}{2}$ 或 $y\geqslant\frac{3+\sqrt{21}}{2}$，又因

$y=-x-2\sqrt{x^2+3x+4}<0$ 对一切 x 都成立，故 $y>\frac{3+\sqrt{21}}{2}$ 应舍去. 因此函数值域为 $\{y|y\leqslant\frac{3-\sqrt{21}}{2}\}$.

(2)用换元法 $\{y|y\leqslant 3\}$

例 2　解　∵　$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$ 在 $x\in[1,b]$ 上是单调增函数，∴　$f(1)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$.

又 $f(x)$ 的值域是 $[1,b]$，∴　$f(1)=1, f(b)=b$.

即 $\frac{1}{2}(b-1)^2+1=b$，解得 $b=1$ 或 $b=3$.

∵　$b>1$，舍去 $b=1$，得 $b=3$.

例 3　原函数整理为：

$2y+y\cos x=1+\sqrt{5}\sin x$.

变形为 $\sqrt{5}\sin x-y\cos x=2y-1$.

∴　$\sqrt{5+y^2}\sin(x+\varphi)=2y-1$，其中 φ 由 $\sin\varphi=\frac{-y}{\sqrt{5+y^2}}$, $\cos\varphi=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+y^2}}$ 来确定，又 $\sin(x+\varphi)=\frac{2y-1}{\sqrt{5+y^2}}$，由 $|\sin(x+\varphi)|\leqslant 1$，得

$|\frac{2y-1}{\sqrt{5+y^2}}|\leqslant 1$，即 $(2y-1)^2\leqslant 5+y^2$，整理

$3y^2-4y-4\leqslant 0$，解得

$-\frac{2}{3}\leqslant y\leqslant 2$，故函数值域为 $\{y|-\frac{2}{3}\leqslant y\leqslant 2\}$（也可用万能公式求）

例 4　解　∵　$f(x)$ 的值域为 $[\frac{3}{8},\frac{4}{9}]$,

∴　$\frac{3}{8}\leqslant f(x)\leqslant\frac{4}{9}$.

∴　$\frac{1}{9}\leqslant 1-2f(x)\leqslant\frac{1}{4}$,

故 $\frac{1}{3}\leqslant\sqrt{1-2f(x)}\leqslant\frac{1}{2}$.

令 $\sqrt{1-2f(x)}=t(\frac{1}{3}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2})$，则 $f(x)=\frac{1}{2}(1-t^2)$

∴　$y=\frac{1}{2}(1-t^2)+t=\frac{1}{2}(t-1)^2+1$，而 $1\notin[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$.

∴　当 $t=\frac{1}{3}$ 时，y 有最小值 $\frac{7}{9}$，当 $t=\frac{1}{2}$ 时，y 有最大值 $\frac{7}{8}$. ∴　y 的值域为 $[\frac{7}{9},\frac{7}{8}]$.

四　课堂练习与作业

1. 选择题　(1)C；　(2)C.

2. 填空题

(1) $\{y|y>1$ 或 $y<-1\}$；　(2) $(-\infty,\lg 5)$；

3. 解　$y=-2(x^2+4x+\frac{7}{2})=-2[(x+2)^2-4+\frac{7}{2}]=-2(x+2)^2+1$.

∴　当 $x=-2$ 时，$y_{max}=1$，函数对称轴 $x=-2$，当 $x=5$ 时，$y=-2\times 5^2-8\times 5-7=-97$.

∴　函数值域 $\{y|-97\leqslant y\leqslant 1\}, x\in[-5,5]$.

4. 解　$y=\log_2 x+\log_x 2+1=\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}+1$.

当 $x>1$ 时，$\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}\geqslant 2$，∴　$y\geqslant 3$，（当 $x=2$ 时取等号）

当 $0<x<1$ 时，$\log_2 x+\frac{1}{\log_2 x}=-[(-\log_2 x)+\frac{1}{(-\log_2 x)}]\leqslant -2$，∴　$y\leqslant -1$（当 $x=\frac{1}{2}$ 时取等号）

即函数值域为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$.

5. 解　考虑到函数的定义域为 $0\leqslant x\leqslant 1$

∴　令 $x=\sin^2\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$

∴　$y=\sqrt{\sin^2\theta}+\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4})$ 上述函数显然连续，而当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，$y_{max}=\sqrt{2}$，$\theta=0$ 时，$y=1$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$y=1$，故函数的值域为 $\{y|1\leqslant y\leqslant\sqrt{2}\}$.

6. 解　原函数式变为 $(y-a)x^2+8x+(y-b)=0$，∵　$x\in R$，∴　$\Delta=(-8)^2-4(y-a)(y-b)\geqslant 0$.

即 $y^2+(a+b)y+(ab-16)\leqslant 0$.　　(1)

由已知可知 $(1\leqslant y\leqslant 9)$，$(y-1)(y-9)\leqslant 0$，即

$y^2-10y+9\leqslant 0$　　(2)

比较(1)、(2)的系数得

$\begin{cases}a+b=10\\ab=25\end{cases}$　解之得 $a=b=5$，为所求.

§6 函数的奇偶性

一 基本知识与基本技能检测

1. 选择题 (1)B； (2)B； (3)D.

2. 利用奇函数的性质 $f(7)=-17$.

3. 奇函数.

4. $f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg(\frac{1-x}{1+x})^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x)$. ∴ 是奇函数.

三 典型例题

例1 解 (1)首先，函数定义域关于原点对称，其次，$f(-x)=-f(x)$，因此原函数是奇函数.

(2) ∵ $x\in R$，又 $f(x)+f(-x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}+\frac{\sqrt{x^2+1}-x-1}{\sqrt{1+x^2}-x+1}$

$=\frac{(1+x^2)-(x-1)^2+(1+x^2)-(x+1)^2}{(\sqrt{1+x^2}+x+1)(\sqrt{1+x^2}-x+1}=0$,

∴ $f(-x)=-f(x)$，故函数是奇函数.

例2 解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $x\in R$，又 $f(-x)=\frac{(1+2^{-x})^2}{2^{-x}}=2^x(1+\frac{1}{2^x})^2$

$=2^x(1+\frac{2}{2^x}+\frac{1}{2^{2x}})=2^x+2+\frac{1}{2^x}$

$=\frac{2^{2x}+2\cdot 2^x+1}{2^x}=\frac{(1+2^x)^2}{2^x}=f(x)$.

∴ $f(x)$ 在定义域 R 上是偶函数.

例3 解 ∵ $x<0$ ∴ $-x>0$

由已知 $f(-x)=\sqrt{-x}+1$，又∵$f(x)$是奇函数，∴ $f(-x)=-f(x)$.

故当 $x<0$ 时，$f(x)=-f(-x)=-(\sqrt{-x}+1=-\sqrt{-x}-1$.

例4 解 当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；当 $x\neq 0$ 时，$\frac{f(-x)}{f(x)}=\frac{[1-(\sin x+\cos x)^2]}{[1-(\sin x-\cos x)^2]}=-1$.

因此，原函数是奇函数.

说明：将原函数表达式化简为 $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$，也可知 $f(x)$ 为奇函数.

四 课堂练习与作业

1. 选择题 (1)B； (2)A.

2. (1)证明：∵$f(x)$的定义域是 $x\neq 0$，

又 $f(x)-f(-x)=(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2})\cdot x-(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2})(-x)=(\frac{1}{2^x-1}-\frac{2^x}{2^x-1}+1)\cdot x=0$.

∴ 函数 $f(x)$ 是偶函数.

当 $x>0$ 时，显然 $f(x)>0$，当 $x<0$ 时，$f(x)=f(-x)>0$， ∴ 对于定义域内的任一 x 总有 $f(x)>0$.

(2)解 由 $x+t\neq 0$，且 $x-t\neq 0$，可知，$F(x)$ 的定义域为 $x=\pm t$.

∵ $F(-x)=f(-x+t)-f(-x-t)=f(x-t)-f(x+t)=-F(x)$.

∴ 函数 $F(x)$ 为奇函数.

3. 解 设 $a=0$，则 $f(b)=f(0)+f(b)$.

∴ $f(0)=0$. 又设 $a=-x,b=x$，则 $f(0)=f(-x)+f(x)$.

∴ $f(-x)=-f(x)$. ∴ $f(x)$是奇函数.

4. 解 由 $x=\ln f(x)$ 得，$f(x)=e^x$，

∴ $G(x)=\frac{1}{2}(e^x-\frac{1}{e^x})=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

又 $G(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}-e^x)=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=-G(x)$，

∴ $G(x)$为奇函数.

5. 证明：∵ $f(x_1-x_2)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{1+f(x_1)f(x_2)}$

∴ $f(0)=f(0-0)=\frac{f(0)-f(0)}{1+f(0)f(0)}=0$

又 ∵ $f(-x)=f(0-x)=\frac{f(0)-f(x)}{1+f(0)f(x)}=\frac{-f(x)}{1}=-f(x)$. ∴ $f(x)$为奇函数.

§7 函数的单调性

一 基本知识与基本技能检测

1. 选择题 (1)D； (2)C.

2. 填空题

(1)$\{x|x>6\}$； (2)$(-\infty,\frac{3}{2}]$.

3. 解 设 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$，且 $x_1<x_2$

$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\frac{1}{x_1})-(x_2+\frac{1}{x_2})$

$=(x_1-x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}(1-x_1x_2)$

∵ $x_1,x_2\in(1,+\infty)$且 $x_1<x_2$.

∴ $x_2-x_1>0,x_1x_2>1$.

由此可知，$\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0,(1-x_1x_2)<0$

∴ $\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}(1-x_1x_2)<0$.

即 $f(x_1)-f(x_2)<0$，于是 $f(x_1)<f(x_2)$

∴ 函数 $f(x)=x+\frac{1}{x}$ 在$(1,+\infty)$上是增函数.

4. (1)在 $y=f(x)$ 的定义域内任设 $x_1<x_2$，则有 $x_2-x_1>0$，$f(x_1)-f(x_2)=-[f(x_2)-f(x_1)]=-f(x_2-x_1)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

∴ $f(x)$是增函数.

(2)左边$=f(2x-1)+f(1-x)=f(2x-1)-f(x-1)=f(x)$.

∵ $x<x^2+1$,且$y=f(x)$是增函数,∴ $f(x)<f(x^2-1)$.

故$f(2x-1)+f(1-x)<f(x^2+1)$.

三 典型例题

例1 解 在$(-\infty,+\infty)$上任取x_1,x_2,且$x_1<x_2$,则有

$f(x_2)-f(x_1)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$

∵ $x_1<x_2$, ∴ $x_1-x_2<0$.

当$x_1x_2<0$时,有$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2>0$

当$x_1x_2\geqslant0$时,有$x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$,

∴ $f(x_2)-f(x_1)=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$.

即 $f(x_2)<f(x_1)$.

∴ 函数$f(x)=-x^3+1$在$(-\infty,+\infty)$上是减函数.

例2 解 令$t=\log_a x$,则$x=a^t$,

于是$f(t)=\dfrac{a}{a^2-1}\cdot\dfrac{a^{2t}-1}{a^t}=\dfrac{a}{a^2-1}(a^t-a^{-t})$,

即$f(x)=\dfrac{a}{a^2-1}(a^x-a^{-x}$,取$x_1,x_2\in R^+$且$x_1<x_2$,

$f(x_2)-f(x_1)=\dfrac{a}{a^2-1}[(a^{x_2}-a^{-x_2})-(a^{x_1}-a^{-x_1})]$

$=\dfrac{a}{a^2-1}[(a^{x_2}-a^{x_1})+(a^{-x_1}-a^{-x_2})]$.

当$a>1$时,$\dfrac{a}{a^2-1}>0,a^{x_2}-a^{x_1}>0,a^{-x_1}-a^{-x_2}>0$

∴ $f(x_2)-f(x_1)>0$.

当$0<a<1$时,$\dfrac{a}{a^2-1}<0,a^{x_2}-a^{x_1}<0,a^{-x_1}-a^{-x_2}>0$,

∴ $f(x_2)-f(x_1)>0$.

∴ $f(x)$在定义域R^+上为增函数.

例3 解(1)由$y=ax^2+bx+c$的对称轴$x=-\dfrac{b}{2a}=0$. ∴ $b=0$,从而$a=1$.

所以$y=x^2+c$……① $y^2+1=(x^2+c)^2+c$……②

解①和②组成的方程组得 $c=1$,

∴ $g(x)=(x^2+1)^2+1$.

(2)(略解)根据函数单调性定义,分别求得$F(x)$在$(-\infty,\dfrac{-\sqrt{2}}{2})$内是减函数的充要条件是$\lambda\leqslant3$,在$[-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0)$内是增函数的充要条件是$\lambda\geqslant3$,满足题设条件的$\lambda$存在$\lambda=3$.

例4 解(1)在$f(xy)=f(x)+f(y)$中令$x=2,y=1$,

则有,$f(2\cdot1)=f(2)+f(1)=f(2)=1$,

∴ $f(1)=0$.

(2)由$x>0$,且$x-3>0$,得$x>3$…(1)

∵ $f(x)+f(x-3)=f(x^2-3x)$.

而$2=f(2)+f(2)=f(4)$,

∴ $f(x^2-3x)\geqslant f(4)$.

$x^2-3x\geqslant4$(∵ $f(x)$为非减函数)

∴ $x\geqslant4$或$x\leqslant-1$.

综合(1),(2)可知$x\geqslant4$

四 课堂练习与作业

1.选择题 (1)D; (2)A.

2.填空题

(1)$(3,+\infty)$; (2)$a<1$或$a>9$.

3.解 ∵ $-x^2+2x+8\geqslant0$,

∴ $x\in[-2,4]$.

设$t=\sqrt{-x^2+2x+8}$,则$y=2^t$,对于$-x^2+2x+8$,当$x=1$时,$(-x^2+2x+8)_{\max}=9$,由$-x^2+2x+8\geqslant0$,知$x\in[-2,4]$,故当$x=1$时,$t_{\max}=\sqrt{9}=3$.

故单调区间分为$[-2,1]$,$(1,4]$.

当$-2\leqslant x_1<x_2<1$时,

$t_1^2-t_2^2=(-x_2^2+2x_1+8)-(-x_1^2+2x_2+8)$

$=(x_2^2-x_1^2)+2(x_1-x_2)$

$=(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)$

$=(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$

∵ $x_1<x_2$,∴ $x_2-x_1>0$,

∴ $-2\leqslant x_1<1,-2<x_2<1$

∴ $-4\leqslant x_1+x_2<2$,

∴ $-4-2\leqslant x_1+x_2-2<2-2$.

即 $-6\leqslant x_1+x_2-2<0$.

∴ $t_1^2-t_2^2<0$,即$t_1^2<t_2^2$.

又 $t_1>,t_2>0$,∴ $t_1<t_2$.

因$y=2^t$是单调递增函数,从而当$x_1<x_2$时有$t_1<t_2$即$y_1<y_2$.

故$y=2^{\sqrt{-x^2+2x+8}}$在$[-2,1)$上是单调递增函数,$[-2,1)$为单调递增区间.

同理可求得$[1,4]$为单调递减区间.

4. 解　设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，

$\because$　$f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于 x 轴对称，

故 $y=g(x)$ 的定义域也为 D，任取 $x_1,x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，，则 $f(x_1)<f(x_2)$.

又 $\because f(x_1)=-g(x_1)$，$f(x_2)=-g(x_2)$，

$\therefore$　$-g(x_1)<-g(x_2)$，$\therefore$　$g(x_1)>g(x_2)$.

由 $x_1<x_2$，可知 $y=g(x)$ 在其定义域上是减函数.

5. 解　由题设，知 $f(1-\sin\alpha)<-f(1-\sin^2\alpha)=f(\sin^2\alpha-1)$，

可得，$\frac{1}{2}>1-\sin\alpha>\sin^2\alpha-1>-\frac{1}{2}$，

解得，$2k\pi+\frac{\pi}{4}<\alpha<2k\pi+\frac{3\pi}{4}$，且 $\alpha\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$.

6. 证明：$\because$　$f(x+1)=\sin[\frac{\pi}{2}f(x)]\Rightarrow$

$f(x)=\sin[\frac{\pi}{2}f(x-1)]$

先证 $0<f(x)<1$，

$\because$　$n=1$ 时，$0<f(1)=\frac{1}{2}<1$ 成立，

设 $n=k$ 时，$0<f(x)<1$ 成立，

则 $0<\frac{\pi}{2}f(k)<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0<\sin\frac{\pi}{2}f(x)<1$

即 $0<f(k+1)<1$，$\therefore$　当 $n=k+1$ 时成立，

$\therefore$　$0<f(x)<1$，当 $x\in N$ 时成立，

又　$\because$　$f(2)=\sin[\frac{\pi}{2}f(1)]=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore$　$f(1)<f(2)$ 成立.

设 $n=k$ 时，$0<f(k)<f(k+1)<1$ 成立.

则　$0<\frac{\pi}{2}f(k)<\frac{\pi}{2}f(k+1)<\frac{\pi}{2}$.

$\therefore$　$0<\sin[\frac{\pi}{2}f(k)]<\sin[\frac{\pi}{2}f(k+1)\leqslant\sin\frac{\pi}{2}=1$.

即　$f(k+1)<f(k+2)$.

$\therefore$　当 $n=k+1$ 时不等式成立.

故当 $n\in N$ 时，$f(n)<f(n+1)$.

$\therefore$　$f(x)$，$x\in N$ 时是增函数.

§8　反函数

一　基本知识与基本技能检测

1. 选择题　(1)D；　(2)D；　(3)B.

2. 填空题

(1)-2；　(2)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

3. 解　$\because$　(1,2)在 $y=\sqrt{ax+b}$ 的图象上，又在其反函数 $y=\frac{x^2-b}{a}$ 的图象上.

$\therefore$　$\begin{cases}\sqrt{a+b}=2 & ①\\ \frac{1-b}{a}=2 & ②\end{cases}$　解之得 $\begin{cases}a=-3,\\ b=7.\end{cases}$

三　典型例题

例 1　解：$\because$　$y=(x^3-9x^2+27x-27)+27$

$=(x-3)^3+27$，$\therefore$　$x=\sqrt[3]{y-27}+3$.

$\therefore$　函数 y 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-27}+3$.

又　$\because$　原函数 $y=x(x^2-9x+27)$

$=x[(x-\frac{9}{2})^2+\frac{27}{4}]$.　当 $x\leqslant 0$ 时，$y\in(-\infty,0)$.

故反函数 $y=\sqrt[3]{x-27}+3$ 的定义域为 $(-\infty,0)$.

例 2　解：由 $f(x)=\frac{2+x}{4+3x}$ 得 $f^{-1}(x)=\frac{2-4x}{3x-1}$，

$$\therefore\quad f^{-1}[f(x)]=\frac{2-4\cdot\frac{2+x}{4+3x}}{3\cdot\frac{2+x}{4+3x}-1}=x.$$

$$f[f^{-1}(x)]=\frac{2+\frac{2-4x}{3x-1}}{4+3\cdot\frac{2-4x}{3x-1}}=x.$$

例 3　解：(1)由 $y=x^2-1(0\leqslant x\leqslant 1)$，可知 $-1\leqslant y\leqslant 0$，

$\therefore$　$x^2=y+1\Rightarrow x=\sqrt{y+1}$，

$\therefore$　$y=\sqrt{x+1}(-1\leqslant x\leqslant 0)$.

(2)由 $y=x^2(-1\leqslant x<0)$ 可知 $0<y\leqslant 1$.

$\therefore$　$x^2=y\Rightarrow x=\sqrt{y}$，

$\therefore$　$y=\sqrt{x}\ (0<x\leqslant 1)$

因此，原函数的反函数

$$y=\begin{cases}\sqrt{x+1} & (-1\leqslant x\leqslant 0),\\ \sqrt{x} & (0<x\leqslant 1).\end{cases}$$

例 4　证明(利用反证法)

假设 $y=f^{-1}(x)$ 在定义域内不是增函数，则有 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域内任取 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，令 $f^{-1}(x_1)=y_1$，　$f^{-1}(x_2)=y_2$，则 $y_1\geqslant y_2$，又 y_1,y_2 在原函数 $y=f(x)$ 的定义域内且 $y_1\geqslant y_2$.

$f(y_1)=x_1$，$f(y_2)=x_2$，而 $y=f(x)$ 在定义域内是增函数，

$\therefore$　$x_1\geqslant x_2$ 与假设 $x_1<x_2$ 矛盾，故 $f^{-1}(x)$ 在其定义域内也是增函数.

若 $f(x)=f^{-1}(x)$，在 $y=f(x)$ 的定义域内任取一点 $x=x_1$，且设 $f(x_1)=y_1$，

则有 $x_1=f^{-1}(y_1)\equiv f(y_1)$

当 $x_1<y_1=f(x_1)$ 时，$\because$　$f(x)$ 是增函数，$\therefore$　$f(x_1)<f(y_1)$，即 $y_1<x_1$，这与 $x_1<y_1$ 相矛盾，所以 $f(x)$ 不能大于 x_1.

当 $x_1>y_1=f(x_1)$，由于 $f(x)$ 是增函数，

$\therefore$ $f(x_1)>f(y_1)$，即 $y_1<x_1$，这与 $x_1>y_1$ 相矛盾，所以 $f(x_1)$ 不能小于 x_1，

由以上讨论可知，$f(x_1)=x_1$，

$\therefore$ x_1 是函数定义域内任意值，

故 $f(x)=x$.

例 5 解 $\because$ $f(x)=y=\dfrac{ax+b}{x}=a+\dfrac{b}{x}$，

当 $b=0$ 时，反函数不存在，

$b\neq0$ 时，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 值域为 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$.

要 $f(x)=f^{-1}(x)$，则 $f(x)$ 定义域等于它的值域，因此 $a=0$，

$\therefore$ 当 $a=0$ 时，$f(x)=f^{-1}(x)$.

四 课堂练习与作业

1. 选择题 (1)B； (2)D.

2. 填空题

(1)$a=1$；$b=2$；$c=-3$.

(2)$f^{-1}(x)=\begin{cases}-x & (0\leqslant x<1),\\ x & (-1\leqslant x<0).\end{cases}$

3. 解 由 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}(x>-1)$ 得

$\sqrt{x+1}=\dfrac{1}{y}$，$x+1=\dfrac{1}{y^2}$，

$x=\dfrac{1}{y^2}-1$，$\therefore$ $y=\dfrac{1}{x^2}-1(x>0)$

4. 解一次函数为 $y=kx+b$

$\therefore$ $kx=y-b$，$x=\dfrac{y-b}{k}$，$\therefore$ $y=\dfrac{x-b}{k}$.

因原函数与反函数相同，

$\therefore$ $kx+b=\dfrac{b}{k}-\dfrac{b}{k}$.

$\therefore$ $\begin{cases}k=\dfrac{1}{k}, & ①\\ b=-\dfrac{b}{k}; & ②\end{cases}$

解之 $k=\pm1$，

当 $k=1$ 时，$b=0$；$k=-1$ 时 $b=b$(舍去)

$\therefore$ 一次函数为 $y=x$.

5. 解 令 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，则 $x(cy-a)=b-dy$

$\therefore$ $cy-a\neq0$，

$\therefore$ $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$，即 $f^{-1}(x)=\dfrac{b-dx}{cx-a}$，

再由 $f^{-1}(x)=f(x)$，比较系数得 $a=-d$.

§9 函数的表达式

一 基本知识与基本技能检测

1. 选择题 (1) A； (2) B.

2. 填空题 (1) 1； (2)x^2-1.

3. $f(x)=\begin{cases}x(1-\sqrt[5]{x}) & (x<0)\\ x(1+\sqrt[5]{x}) & (0\leqslant x\leqslant1)\end{cases}$.

4. (1)由 $f(x)=-x^2+2x$，知 $f(x+2)=(x+2)[2-(x+2)]=-x(x+2)$ $(0\leqslant x\leqslant2)$；

(2)由 $f(x)=-x^2+2x$，知 $f(-x)=-x[2-(-x)]=-x(x+2)$ $(-2\leqslant x<0)$.

$\therefore F(x)=\begin{cases}-x(x+2) & (0\leqslant x\leqslant2)\\ -x(x+2) & (-2\leqslant x<0)\end{cases}$

由 $F(x)=-x(x+2)$ $(-2\leqslant x\leqslant2)$.

三 典型例题

例 1 解：$\because$ $\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=(\dfrac{x+1}{x})^2-\dfrac{x+1}{x}+1$.

$\therefore$ $f(\dfrac{x+1}{x})=(\dfrac{x+1}{x})^2-\dfrac{x+1}{x}+1$.

故 $f(x)=x^2-x+1$.

例 2 解：由 $\dfrac{1}{x}$ 代 x 得方程组

$$\begin{cases}f(x)+\lg x f(\dfrac{1}{x})=b^x, & ①\\ f(\dfrac{1}{x})+\lg(\dfrac{1}{x})f(x)=b^{\frac{1}{x}}. & ②\end{cases}$$

①$-$②$\times\lg x$，得：

$f(x)+\lg^2x\cdot f(x)=b^x-\lg x\cdot b^{\frac{1}{x}}$.

$\therefore$ $f(x)=\dfrac{b^x\sqrt[x]{b}\lg x}{1+\lg^2x}$.

例 3 解：因为 $f(x)$，$g(x)$ 分别是偶函数，奇函数故用 $-x$ 代 x 得下列方程组：

$$\begin{cases}f(x)+g(x)=x\sqrt{5-x^2}+x^2\\ f(-x)+g(-x)=(-x)\sqrt{5-x^2}+x^2\end{cases}$$

整理，$f(x)+g(x)=x\sqrt{5-x^2}+x^2$， ①

$f(x)-g(x)=-x\sqrt{5-x^2}+x^2$； ②

$\dfrac{①+②}{2}$ 得，$f(x)=x^2$，

$\dfrac{①-②}{2}$ 得，$g(x)=x\sqrt{5-x^2}$，检验可知，它们是所求函数的解析式。

例 4 解：$\because$ 复合函数 $f\{f[f(x)]\}$ 不改变 $f(x)$ 的次数，故可设 $f(x)=ax+b$，则：

$f[f(x)]=a(ax+b)+b=a^2x+b(a+1)$

$f\{f[f(x)]\}=f[a^2x+b(a+1)]=a[a^2x+b(a+1)]+b=a^3x+b(a^2+a+1)$

$\therefore$ $a^3+b(a^2+a+1)=27x+13$.

$\therefore$ $\begin{cases}a^3=27\\ b(a^2+a+1)=13\end{cases}$ 解之 $\begin{cases}a=3\\ b=1.\end{cases}$

$\therefore$ $f(x)=3x+1$.

四 课堂练习与作业

1. 选择题 (1) B; (2) C.

2. 填空题 (1) 98; (2) $\lg\frac{x+3}{x-3}$; (3) 2.

3. 解：已知 $2f(x^2)+f(\frac{1}{x^2})=x$ (1)，用 $\frac{1}{x}$ 代替(1)中的 x 得 $2f(\frac{1}{x^2})+f(x^2)=\frac{1}{x}$ (2).

(1)×2−(2)得：$3f(x^2)=2x-\frac{1}{x}$，

$\therefore\ f(x^2)=\frac{2x^2-1}{3x}$

用 x 代换 x^2 得 $f(x)=\frac{2x-1}{3\sqrt{x}}$.

4. $y=\begin{cases} x & (0\leqslant x\leqslant 1), \\ \sqrt{1+(x-1)^2} & (1<x\leqslant 2), \\ \sqrt{1+(3-x)^2} & (2<x\leqslant 3), \\ 4-x & (3<x\leqslant 4); \end{cases}$

$f(\frac{5}{2})=\sqrt{1+(3-\frac{5}{2})^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

5. $f(x)=x^2+x+1$.

6. 解：设所求的二次函数为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

$\therefore\ f(x+1)=a(x+1)^2+b(x+1)+c$

$f(x-1)=a(x-1)^2+b(x-1)+c$.

$\therefore\ f(x+1)+f(x-1)=2ax^2+2bx+2(a+c)$.

$\because\ f(x+1)+f(x-1)=2x^2-4x$,

$\therefore\ 2ax^2+2bx+2(a+c)=2x^2-4x$.

比较系数，得 $a=1,b=-2,c=-1$.

故 $f(x)=x^2-2x-1$，则 $f(1-\sqrt{2})=0$.

§10 函数的图象

一 基本知识与基本技能检测

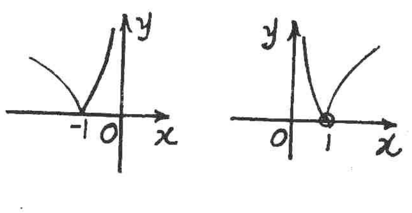
1. 选择题 (1)D; (2)D; (3)C.

2. 填空题

(1)D; (2)A; (3)C; (4)B.

三 典型例题

例 1



(Ⅰ) (Ⅱ)

图 1−3

例 2 (1)$y=\frac{1-x}{1+x}$，(2)$y=\pm\sqrt{3-x}-2$

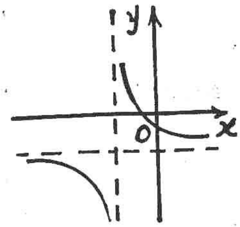


图 1−4

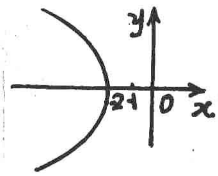
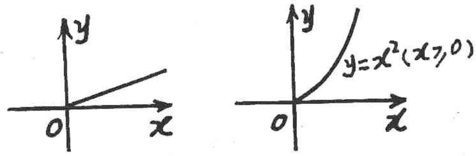


图 1−5

例 3



(1) (2)

图 1−6

例 4

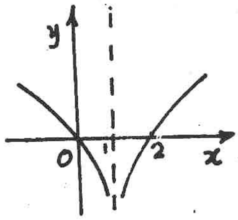


图 1−7

四 课堂练习与作业

1. 选择题 (1)B; (2)C.

2. 填空题 (1)$m<6$; (2)$y=\frac{2-mx}{x-3}(x\neq 3)$，$m=-3$.

3.

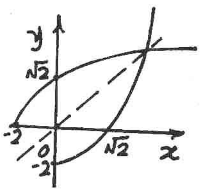


图 1−8

4.

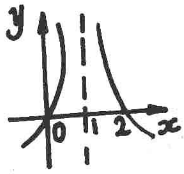


图 1−9

§11 二次函数与二次方程、二次不等式(Ⅰ)

一 基本知识与基本技能检测

1. 选择题 (1) D; (2) D.

2. 填空题

(1)(5,23); (2)$f(x)=x^2-8x+15$.

3. 解 抛物线与 x 轴交点

$x=\frac{-(m^2-2m+24)\pm m(m-14)}{2(m^2-4)}$.

$\therefore\quad x_1=\dfrac{-b}{m-2}, x_2=\dfrac{8}{m+2}-1.$

由$\dfrac{-b}{m-2}$为正整数，得 $m=-4,-1,0,1.$

由$\dfrac{8}{m+2}-1$ 为正整数，得 $m=-1,0,2.$

当 $m=0$ 时，$x_1=x_2=3$，(不含题意，舍去)

所以 $m=-1$ 为所求.

4. 解：设 $f(x)=a(x+m)^2+14(a\neq 0)$

由 $f(2)=f(-1)=5$，代入上式，得

$$\begin{cases}a(2+m)^2+14=5, & ①\\ a(m-1)^2+14=5; & ②\end{cases}$$

①－②：$a[(m+2)^2-(m-1)^2]=0.$

$\therefore\quad (m+2+m-1)(m+2-m+1)=0$ 解之 $m=-\dfrac{1}{2}.$

代入①得，$a=-4.$

于是 $f(x)=-4(x-\dfrac{1}{2})^2+14.$

即 $f(x)=-4x^2+4x+13.$

三 典型例题

例 1 解：(1)由 $f(m)+g(m)=m^2+16m+13=5+25$

$\therefore\quad m^2+16m-17=0, \because\quad m>0, \therefore\quad m=1.$

(2)由 $m=1$ 与已知设 $f(x)=-a(x-1)^2+5(a>0)$

$f(x)=-ax^2+2ax-a+5,$

$\because\quad f(x)+g(x)=x^2+16x+13,$

$\therefore\quad g(x)=(1+a)x^2+(16-2a)x+8+a.$

又 $g(x)$ 的最小值为 -2.

$$\frac{4(1+a)(8+a)-(16-2a)^2}{4(1+a)}=-2.$$

解之，$a=2$，$\therefore\quad g(x)=3x^2+12x+10.$

故 $g(x)$ 的解析式是 $g(x)=3x^2+12x+10.$

例 2 解：若 $4-3a=0$，即 $a=\dfrac{4}{3}$ 时，$f(x)=-2x+a$，$\because\quad f(x)$ 是减函数，故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值是 $f(0)=a.$

若 $4-3a\neq 0$，(1)$4-3a<0$，即 $a>\dfrac{4}{3}$ 时，$f(x)$ 的图象是一条开口向下的抛物线又由于对称轴为 $x=\dfrac{1}{4-3a}<0$ 知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减故 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(0)=a.$

(2)$4-3a>0$，即 $a<\dfrac{4}{3}$，$f(x)$ 的图象是一条开口向上的抛物线，当 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{4-3a}$ 时即 $a>\dfrac{2}{3}$ 时，由对称性知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(0)=a$，当 $\dfrac{1}{4-3a}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，由对称性可知，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=2-2a.$

综上所述，当 $a\leqslant\dfrac{2}{3}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)=2-2a$，当 $a>\dfrac{2}{3}$ 时，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(0)=a.$

例 3 解：由 $f(-2+x)=f(-2-x)$ 知直线 $x=-2$ 是二次函数 $f(x)$ 的图象的对称轴.

设 $f(x)=a(x+2)^2+m$，由已知图象与 x 轴交于两点 $(-4,0)$ 与 $(0,0)$ 代入 $f(x)$ 得

$4a+m=0$ ………………………………… (1)

又令 $y=x$，则方程 $x=a(x+2)^2+m$ 有相同的解.

$\therefore\quad \triangle=(4a-1)^2-4a(4a+m)=0$ ……… (2)

由(1)，(2)解得 $a=\dfrac{1}{4}, m=-1.$

故 $y=f(x)=\dfrac{1}{4}(x+2)^2-1$，即 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+x.$

例 4 解：由 $x^2+ax+2=x+1$，依题意得：

$x^2+(a-1)x+1=0$ 在 $[0,2]$ 上有实根，

设 $f(x)=x^2+(a-1)x+1$，$f(x)=0$ 在 $[0,2]$ 上有实根的条件是：

$$\begin{cases}0<\dfrac{1-a}{2}<2,\\ \triangle=(a-1)^2-4\geqslant 0,\\ f(0)=1>0,\\ f(2)=2a+3\geqslant 0;\end{cases}$$

解之，$-\dfrac{3}{2}\leqslant a\leqslant -1.$

四 课堂练习与作业

1. 选择题 (1)A; (2) A.

2. 填空题

(1) $\dfrac{x_1+x_2}{2}$; (2) $-x^2-2mx-m^2-n$;

(3) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+x+\dfrac{3}{2}.$

3. 解：(1)当 $a=0$ 时，$f(x)=-2x+2$，因而由 $f(2)=-2$ 知不合题意；

(2)当 $a<0$ 时，$f(2)=4a-2<0$，不合题意；

(3)当 $a>0$ 时，$f(x)=a(x-\dfrac{1}{a})^2+2-\dfrac{1}{a}$ ………………………………………… (1)

图象是开口向上的抛物线，对称轴为 $x=\dfrac{1}{a}$，

$f(2)=a(2-\dfrac{1}{a})^2+2-\dfrac{1}{a}.$

若 $0<a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则 $f(2)\leqslant 0$，不合题意.

若 $a>\dfrac{1}{2}$，则 $2-\dfrac{1}{a}>0$，因而(1)式对一切实数 x 都有 $f(x)>0$，当然对满足 $1<x<4$ 的一切 x 都有 $f(x)>0$，故 $a>\dfrac{1}{2}$.

4. 解：依题意 $y=a(x+1)^2+bx$（a,b 为非零常数）

∵ 当 $x=1$ 时 $y=14$，∴ $4a+b=14$ …… (1)

当 $x=-2$ 时，$y=-1$，∴ $a-2b=-1$ …… (2)

解(1)和(2)得 $a=3,b=2$.

$$\therefore\quad y=3(x+1)^2+2x=3x^2+8x+3$$
$$=3(x+\frac{4}{3})^2-\frac{7}{3}.$$

由此，y 在 $x\leqslant-\frac{4}{3}$ 时，单调递减，$x\geqslant-\frac{4}{3}$ 时单调递增，∴ 当 $x=-\frac{4}{3}$ 时，$y_{\min}=-\frac{7}{3}$.

令 $g(x)=|x+\frac{4}{3}|$，则 $g(-5)>g(2)>g(-\frac{4}{3})$

∴ 在区间 $-5\leqslant x\leqslant 2$ 中，当 $x=-5$ 时，$y_{\max}=38$.

5. 解：(1)设 $f(x)=0$ 的两根为 x_1,x_2，则

$$\begin{cases} m-1\neq 0, \\ \triangle=(m-2)^2+4(m-1)>0, \\ (\frac{1}{x_1})^2+(\frac{1}{x_2})^2=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2} \\ \quad=(m-2)^2+2(m-1)\leqslant 2 \end{cases}$$

解得 $0<m<1$ 或 $1<m\leqslant 2$.

(2) $|AB|=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=|\frac{m}{m-1}|$.

又 C 的坐标为 $(0,-1)$，而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|x_2-x_1|\cdot|-1|=2$.

∴ $|x_2-x_1|=|\frac{m}{m-1}|=4$，解之，得 $m_1=\frac{4}{3}$ 或 $m_2=\frac{4}{5}$.

§12 二次函数与二次方程、二次不等式（Ⅱ）

一 基本知识与基本技能检测

1. 选择题 (1) A； (2) B；(3) A.

2. 填空题

(1) $(-\frac{1}{2},0)$ 或 $(\frac{1}{2},1)$； (2) $a=-2,b=-3$.

3. 解：$\begin{cases} x-3y=5, \\ 2x-y=k; \end{cases}$ 解之得：$\begin{cases} x=\frac{k}{10}-\frac{1}{2}, \\ y=\frac{k}{5}-1. \end{cases}$

∴ 交点 $P(\frac{k}{10}-\frac{1}{2},\frac{k}{5}-1)$.

设 P 点到原点距离为 y，

则 $y=\sqrt{(\frac{k}{10}-\frac{1}{2})^2+(\frac{k}{5}-\frac{1}{2})^2}$.

∴ $y^2=(\frac{k}{10}-\frac{1}{2})^2+(\frac{k}{5}-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{20}(k^2-10k+25)=\frac{1}{20}(k-5)^2$.

由于 y^2 与 y 同时取得最小值，所以当 $k=5$ 时，$y^2_{\min}=0$，$y_{\min}=0$.

三 典型例题

例 1 解：∵ 方程(1)有实根，所以它的判别式 $a^2-36\geqslant 0$，

∴ $a\leqslant-6,a\geqslant 6$ (2)

方程的根为：$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-36}}{2}$，其中较小根为

$\beta=\frac{a-\sqrt{a^2-36}}{2}$，

从上式可以看出，当 $a<0$ 时，$\beta<0$，$a>0$ 时，$\beta>0$，所以在研究 β 的最大值时，只要考虑

$a\geqslant b$ 的情形即可.

$$由\ \beta=\frac{a-\sqrt{a^2-36}}{2}$$
$$=\frac{(a-\sqrt{a^2-36})(a+\sqrt{a^2-36})}{2(a+\sqrt{a^2-36})},$$
$$\therefore\quad \beta=\frac{18}{a+\sqrt{a^2-36}}.$$

要使 β 尽可能大，a 应在 $a\geqslant 6$ 的范围内尽可能小，所以当 $a=6$ 时，β 取最大值 3.

例 2 解：$x^2+(m-17)x+m-2=0$，设方程的根为 α,β，则 $\alpha+\beta=17-m$ (1)

$\alpha\cdot\beta=m-2$ (2)

由 α,β 是自然数可知(1)，(2)中的 m 也是自然数，且 $17-m>0$，$m-2>0$

∴ $2<m<17$ (3)

又方程 $x^2+(m-17)x+m-2=0$ 的判别式 $\varDelta$

$=(m-17)^2-4(m-2)$

$=(m-19)^2-8^2=(m-11)(m-2)\geqslant 0$ (4)

由(3)，(4)得 $2<m<11$.

例 3 解：(1)设公共根为 α，则

$\alpha^2+a\alpha+b=0$， (1)

$\alpha^2+b\alpha+a=0$； (2)

(1)－(2)，得 $(a-b)(\alpha-1)=0$

若 $a=b$，则方程(1)，(2)的两根都相同，不合题意，所以 $a\neq b$，因而得 $\alpha=1$，代入方程(1)得 $a+b+1=0$.

故 a 与 b 之间关系是 $a+b+1=0$，且 $a\neq b$.

(2)从 $a+b+1=0$ 得 $b=-a-1$ (3)

∴ $a^2+b^2=a^2+(a+1)^2$

所以 a^2+b^2 是 a 的函数，记作 $f(a)=a^2+b^2$ 得 $f(a)=2a^2+2a+1=2(a+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$ (4)

∵ a 为实数，∴ $2(a+\frac{1}{2})^2\geqslant 0$.

由(4)得 $f(a)$ 在 $a=-\frac{1}{2}$ 时，取得最小值 $\frac{1}{2}$ 但这时由(3)式得 $b=-\frac{1}{2}$ 与 $a\neq b$ 矛盾，故 a^2+b^2 不存在最小值.

由于 $-1\leqslant a\leqslant 0$，从(4)得 $f(-1)=f(0)=1$，因而 $f(a)$ 在 $a=-1$ 和 $a=0$ 时，都取得最大值 1.

例 4 解：A 表示通过原点的两条互相垂直的直线与 x 轴交角分别为 45°和 135°. 集合 B 表示圆心在 x 轴上的点 $C(a,0)$ 半径为 1 的动圆，设当动圆与两直线相切时，圆心位置是 C_1,C_2，则 $OC_1=OC_2=\sqrt{2}$. 当动圆圆心 C 在线段 C_1C_2 上时，圆与两直线有公共点，即此时，$A\cap B\neq\varnothing$，

所以 a 的取值范围为 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$.

四 课堂练习与作业

1. 选择题 (1) C； (2) D.

2. 填空题

(1) $x_1=-1$；$x_2=-2$； (2) $-6<k<0$.

3. 设两边分别为 a、b，依题意，得

$$\begin{cases}\triangle=P^2-8\geqslant 0 & ①\\ a+b=-p & ②\\ ab=2 & ③\\ |a-b|<3 & ④\\ a+b>3 & ⑤\end{cases}$$

由①得 $P>2\sqrt{2}$ 或 $P\leqslant -2\sqrt{2}$；由②、⑤得 $P<-3$；由②、④、⑤得 $P^2=(a+b)^2=(a-b)^2+4ab<9+8=17$.

∴ $-\sqrt{17}<P<\sqrt{17}$.

综上所知，P 的范围是 $-\sqrt{17}<P<-3$.

4. 解 ∵ $\log_a(x-3)-\log_a(x+2)-\log_a(x-1)=1$. a 为底数，∴ $a>0,a\neq 1$.

又 $\begin{cases}x-3>0\\ x+2>0\\ x-1>0\end{cases}$ 且 $x-3=a(x+2)(x-1)$

∴ $ax^2+(a-1)x-(2a-3)=0$.

方程有实根的条件为

$\varDelta=(a-1)^2-4a(2a-3)\geqslant 0$，

解之 $a\leqslant\frac{7-2\sqrt{10}}{9}$ 或 $a\geqslant\frac{7+2\sqrt{10}}{9}$.

5. 解：令 $y=x^2+(m-2)x+5-m$.

∵ $a=1>0$. ∴ 抛物线开口向上.

于是有(1)当 $x=2$ 时，$y>0$；

(2) $\varDelta\geqslant 0$； (3) $-\frac{b}{2a}>2$.

∴ $\begin{cases}4+2(m-2)+5-m>0\\ (m-2)^2-4(5-m)\geqslant 0\\ -\frac{m-2}{2}>0\end{cases}$

解之得 $-5<m\leqslant -4$

6. 证明：假设这三条抛物线全都与 x 轴只有一个交点，即 $\varDelta=0$，则

$4b^2-4ac=0,4c^2-4ab=0,4a^2-4bc=0$ 三式相加除以 2，并变形得 $(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2=0$.

∴ $a=b=c$ 这与已知相矛盾，故假设不成立.

∴ 原命题得证.

§13 函数的最值

一 基本知识与基本技能检测

1. 选择题 (1) C； (2) A； (3) B.

2. 填空题

(1) $4-4\sqrt{2}$； (2) $0<a<1$.

3. 解：由已知 $0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$，$x=1-2y$，

∴ $2x+3y^2=2(1-2y)+3y^2=3(y-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}$.

∵ $\frac{2}{3}\notin[0,\frac{1}{2}]$，

∴ 当 $y=0$ 时，$2x+3y^2=3(0-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}=2$(最大)

当 $y=\frac{1}{2}$ 时，$2x+3y^2=3(\frac{1}{2}-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$(最小)

4. 解：由原函数式转化为

$yx^2+yx+y=x^2+4x+1$

∴ $(y-1)x^2+(y-4)x+y-1=0$ (1)

∴ x 为实数，∴ $\varDelta=(y-4)^2-4(y-1)^2\geqslant 0$.

∴ $y^2-4\leqslant 0$，∴ $-2\leqslant y\leqslant 2$.

将 $y=\pm 2$ 代入(1)，解出 $x=\pm 1$，属于函数定义域.

∴ 函数最小值是 -2，最大值是 2.

三 典型例题

例 1 解由 $-2x^2+5x-3\geqslant 0$，解得 $x\in[1,\frac{3}{2}]$

$-\frac{b}{2a}=-\frac{5}{2\cdot(-2)}=\frac{5}{4}$，$\frac{5}{4}\in[1,\frac{3}{2}]$.

∴ 当 $x=\frac{5}{4}$ 时，$-2x^2+5x-3$ 取得最大值 M，

$M=\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4(-2)(-3)-5^2}{4\cdot(-2)}=\frac{1}{8}$.

此时，函数 $y=\sqrt{-2x^2+5x-3}$ 也取得最大值

$\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

由 $-2x^2+5x-3=0$，解得 $x_1=1, x_2=\frac{3}{2}$，故当 $x=1$ 或 $x=\frac{3}{2}$ 时，y 取得最小值 0.

例 2 解：设 $0\leqslant x_1\leqslant x_2\leqslant 3$，则 $x_2-x_1>0$.

$\therefore$ $f(x_2-x_1)<0$，令 $x=x_2-x_1, y=x_1$ 代入 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，得 $f(x_2)=f(x_2-x_1)+f(x_1)<f(x_1)$.

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上是单调递减函数.

$\therefore$ $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 是奇函数，$\therefore$ $f(x)$ 在 $[-3,0]$ 上也是减函数，即 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 是减函数.

$\therefore$ $f(x)_{\max}=f(-3)=f(-2-1)=f(-2)+f(-1)=-3f(1)=6$.

$$f(x)_{\min}=f(3)=3f(1)=-6.$$

例 3 解：

由 $\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}=\frac{x^2+2x+1-x}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{x^2+2x+1}=1-\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=1-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(1+x)^2}$

令 $u=\frac{1}{x+1}$，则 $\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}=1-u+u^2=(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$.

故当 $u=\frac{1}{2}$ 时，即 $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$，$x=1$ 时，

$y_{\min}=\frac{3}{4}$.

例 4 解 $\because$ $f(x)=4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$ 的顶点的横坐标为 $\frac{a}{2}$，且开口向上.

$\therefore$ $f(x)$ 的最值只可能在 $x=0, x=2, x=\frac{a}{2}$ 处取得.

(1) 当 $\frac{a}{2}\leqslant 0$ 时，$f(x)_{\min}=f(0)=3$ 则

$a^2-2a-1=0$，解得 $a=1-\sqrt{2}$.

(2) 当 $0<\frac{a}{2}<2$ 时，$f(x)_{\min}=f(\frac{a}{2})=3$，则

$\begin{cases}0<a<4\\ a=-\frac{1}{2}\end{cases}$ （无解）.

(3) 当 $\begin{cases}\frac{a}{2}\geqslant 2\\ f(x)_{\min}=f(2)=3,\end{cases}$

即 $\begin{cases}a\geqslant 4,\\ a^2-10a+5=0;\end{cases}$

解之，得 $a=5+\sqrt{10}$.

故当 $a=1-\sqrt{2}$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值 3.

$a=5+\sqrt{10}$ 时 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最小值 3.

四 课堂练习与作业

1. 选择题 (1) B； (2) A.

2. 填空题

(1) 4； (2) $y_{\max}=\frac{1}{2}, y_{\min}=-\frac{1}{2}$；

(3) $\sqrt{3}$.

3. 解 整理原函数式

$y=[(x+4)^2-5]^2+4$，则当 $(x+4)^2-5=0$ 时，而 $x\in(-5,5)$ 即 $x=-4+\sqrt{5}$ $(x=-4-\sqrt{5}$ 舍去$)$ 时，$y_{\min}=4$.

4. 解 由原函数式，得

$x^2y+y=ax^2+8x+b$，

$(y-a)x^2-8x+(y-b)=0$，$\because$ $x\in R$，故

$\Delta=(-8)^2-4(y-a)(y-b)\geqslant 0$.

即 $y^2-(a+b)y+(ab-16)\leqslant 0$……①由已知 $1\leqslant y\leqslant 9$ 可得 $(y-1)(y-9)\leqslant 0$，即 $y^2-10y+9\leqslant 0$……②，比较①、②系数得 $\begin{cases}a+b=10\\ ab-16=9\end{cases}$ 解之，$a=b=5$.

5. 解 令 $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}=k$

则 $x=4k+1, y=3k+2, z=2k-3$，由 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$，得 $k\geqslant\frac{3}{2}$.

又 $x^2+y^2-z^2=21k^2+32k-4$

因函数 $f(k)=21k^2+32k-4=21\times(k+\frac{16}{21})^2-\frac{280}{21^2}$

当 $k\geqslant\frac{3}{2}$ 时为增函数.

故当 $k=\frac{3}{2}$ 时，$x^2+y^2-z^2$ 取最小值 $91\frac{1}{4}$.

§14 幂函数、指数函数与对数函数（Ⅰ）

一 基本知识与基本技能检测

1. 选择题 (1) D； (2) B； (3) A.

2. 填空题 (1) 正整数； (2) $\frac{1}{3}$.

3. 解 $\because$ $a>0$，令 $f(x)=a^{x-1}$，当 $x=1$ 时，$f(x)=1$ $\therefore$ $y=1+2=3$，因此 $y=a^{x-1}+2$ 过定点 $(1,3)$.

三 典型例题

例 1 解 $\because$ $0.9<a<1$，故 a^x 为减函数. 又 $a<1$，从而 $a^a>a^1$，即 $x>a$.

再由 0。9$<a<1$ 知在区间 $(0,+\infty)$ 上有 $0<a^a<$