数学建模入门

杨桂元 李天胜 编著

——125个有趣的经济管理问题

中国科学技术大学出版社

数学建模入门

——125个有趣的经济管理问题

杨桂元 李天胜 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是数学在实际问题特别是在经济、管理问题中的应用实例，根据实际问题涉及的数学模型，编写了125个与大学数学教学内容相配套的数学模型应用实例.每一篇内容独立成文，以经济管理和日常生活中的问题为切入点，然后用数学方法求解，有前提有结论，并且对该篇应用的数学方法——理论依据和应用推广进行评注.全书分为4篇，分别是：第1篇微积分模型；第2篇线性代数模型；第3篇概率论模型；第4篇数理统计模型.

本书可作为高等院校学生学习数学建模的辅导用书，也可作为相关领域学者研究经济、管理问题时的参考读物.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模入门：125个有趣的经济管理问题/杨桂元，李天胜编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2013.6
ISBN 978-7-312-03226-4

Ⅰ. 数… Ⅱ. ① 杨… ② 李… Ⅲ. 经济管理—数学模型 Ⅳ. ① F2 ② O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013)第 095888 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 中国科学技术大学印刷厂
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm × 960 mm 1/16
印张 19.25
字数 378千
版次 2013年6月第1版
印次 2013年6月第1次印刷
定价 33.00元

序

近十年来,随着我国国民经济的高速发展,高等教育事业也相应地有了长足的进步.如果说目前高教事业的形势已处于历史的最好状态,并不为过.

但高教事业的这种变化主要是表现在高等教育理念的转化方面.除了加大办学力度、增设新型专业以及提升办学层次等人所瞩目的成绩外,我认为最近几年来最突出的转变是高等教育从教学内容和教学实施等方面开始转向面向社会和面向未来.在这种形势下,无疑地,对于教材的改革与更新以及对于教学手段和方法的现代化和科学化的强烈要求,更是一项处于瓶颈地位的课题.事实上,不少高校教师都面临这样一个现实问题:如何为教本式的教育垫铺一块跳板,以便将严谨但呆板的课堂内容与活生生的社会现实有机地结合在一起?近年来的教材建设规模已经相当可观,例如不少出版社已经将课件等教学软件连同教材一起发行,并辅以相应的参考材料等,考虑不可谓不周,但唯独缺少一本合乎上述要求的参考书,以与教材匹配.想来也许是因为此项工作难度相当大,不是一人或一校可以完成的.我也一直在想,如果教本的编写者们能随书配一本上述那样的书,这不光对于师生,甚至对于整个教育战线都是一件功德无量的事,可谓善莫大矣!

去年夏天收到杨桂元教授发来的一本书稿,让我提意见.细看之下,我惊喜地发现,我所考虑的问题,他其实早已进行思索,所不同的是,他更已付诸行动了.此书收集了一百多个问题,大都是我们在日常生活中常遇的但不用数学却不易说清楚的问题.我十分佩服作者匠心独具的观察能力和耐心,能够发掘出如此丰富的材料.作为经济专业数学课程的辅助教材,我相信它将使学生们大开眼界,极为受益,如同我一样.

本书不但材料丰富,演绎严密,而且语言通俗,富有启发性.即使因为学时限制不能在课堂全部讲述,但它一定能成为备受师生欢迎的课外读物.此外,本

书另一个潜在的优点是，对于一位勤勉的学生，它将教会他或她如何培养良好的思考习惯. 正是这样的特色，更体现出本书的科学化和现代化.

桂元教授嘱我写序，所以勉为其难，写了以上一些话，不足为训.

盛立人谨识

2013年元月于安徽大学

前 言

“创新是一个民族进步的灵魂，是国家兴旺发达的不竭动力.”创新能力是诸多能力的综合和最高发展形式，对大学生的创新能力的培养是高等教育永恒的话题，大学数学教育是对大学生的应用能力和创新能力培养的重要途径之一.

大学数学教育要教给学生的不仅仅是严密的数学理论，还要培养学生应用数学的意识、兴趣和能力，让学生学会用数学的思维方式观察事物，用数学的方法分析和解决实际问题，这就是应用数学方法的“建模”能力.“建模”能力的培养是一个潜移默化的过程，由数学理论到数学建模也不可能一蹴而就，这就需要在两者之间建立某种“过渡”，我们的努力就是为了填补这个空白所进行的一种尝试.从这种意义上说，这本书也可以说是数学建模的“启蒙教材”.

微积分、线性代数、概率论与数理统计是大学数学重要的基础课，这是所有理工科、经济、管理专业的必修课程.长期以来，在大学数学教学中，怎样将经济管理问题和实际应用问题与数学有机地联系起来，培养和激发学生学习数学的兴趣，是每一位从事大学数学教学的教师应思考的问题.然而现在很多高校的大学数学的教学中，在讲授这些课程时，注重的往往是数学知识的传授，至于怎样运用数学知识解决实际应用问题却讲得很少，形成了学生只会计算和解题而不知道如何应用的局面.随着教育改革的逐步深入和数学建模竞赛活动的开展，如何提高学生的数学素养以及用数学思想和方法解决实际问题的意识，培养学生的“建模”能力和创新能力，就成了大学数学教学改革的切入点和当务之急.

进入本世纪以来，为了改变教学上的被动局面，我们针对学生的实际，结合

安徽省省级精品课程“经济数学基础”的课程建设和相关教学研究课题的研究，参考了国内外大量教材和文献，努力挖掘数学方法在实际问题特别是在经济、管理和日常生活问题中的应用实例，整理编写了一些与教材内容配套的数学模型，并尝试在教学中穿插讲授，提高了学生学习数学的兴趣和积极性，收到了很好的教学效果．我们于2000年开始进行教学研究项目“经济数学基础应用实例研究”，2007年承担安徽省教学研究项目“数学建模与大学生创新能力培养研究”(项目编号:2007jyxm282)，2010年承担全国高等学校教学研究中心科技部项目“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”(项目编号:2009IM010400)的子项目“经济管理中的数学应用案例研究”(项目编号:2009IM010400－1－43)的研究．经过多年的研究与积累，研究成果融入《经济数学基础》系列教材并获得省级教学成果三等奖；“数学建模与大学生创新能力培养研究”的研究成果获得省级教学成果二等奖．《经济数学基础应用实例》编辑成册后受到多所高校师生的青睐并给予了高度的评价．我们又参阅了大量资料，通过归纳、整理和不断修改才形成了本书．

本书是数学在实际问题特别是在经济、管理问题中的应用实例，根据实际问题涉及的数学模型，编写了125个与大学数学教学内容配套的数学模型应用实例．每一篇内容独立成文，以经济管理和日常生活中的问题为切入点，然后用数学方法求解，有前提有结论，并且对该篇应用的数学方法——理论依据和应用推广进行评注．

本书分为4篇，分别是:第1篇微积分模型；第2篇线性代数模型；第3篇概率论模型；第4篇数理统计模型．其中第1篇由李天胜编写；第2篇、第3篇和第4篇由杨桂元编写．

本书是全国高等学校教学研究中心科技部项目“科学思维、科学方法在高等学校教学创新中的应用与实践”子项目“经济管理中的数学应用案例研究”(项目编号:2009IM010400－1－43)的研究成果．本书的出版得到安徽财经大学教学质量工程和教材出版基金的资助．

在本书的编写过程中，我们参考了国内外一些相关教材、精品课程网站的内容，大部分实例后都列出了对应的参考文献；安徽大学盛立人教授在百忙中认真地审阅了书稿，提出了宝贵的建议并欣然为之作序；安徽财经大学教务处领导、安徽财经大学统计与应用数学学院的领导和同事给予了很大的支持和帮助；中国科学技术大学出版社在出版过程中做了大量的工作．在此一并致谢！

由于编者水平有限，书中有些实例挖掘得不够深入，疏漏之处在所难免，敬请同行和广大读者批评指正．

杨桂元　李天胜

2013年3月于龙子湖畔

（Email：yangguiyuan57@163.com）

目　录

第1篇　微积分模型

第 2 篇 线性代数模型

第 3 篇　概率论模型

第 4 篇 数理统计模型

第1篇 微积分模型

在微积分部分的应用实例中,通过对应用问题建模,主要培养读者应用极限、连续、相对变化率、微元、无穷级数、最优化和微分与差分方程等思想解决实际应用问题的能力.

函数的性质包括分段性质、单调性、奇偶性等,由函数的基本性质可以产生对函数进行分类的方法.与函数基本特性相关的应用实例有:市话费是降了还是升了,外币兑换与股票交易中的涨跌停板,库存问题与库存曲线,"另类"的常量函数,蠓虫分类的初等数学模型,核军备竞赛问题等.

数列与函数的极限和函数连续性质是处理变量变化过程的工具,如:应用重要极限计算连续复利利率,应用函数的连续性和介值定理解决特殊的应用问题.与极限和连续等内容相关的应用实例有:从科赫雪花谈起,复利、连续复利与贴现,出售相同产品的公司为什么喜欢扎堆,椅子为什么能放稳等.

导数、微分是函数的相对变化的极限过程,函数的特性和极值理论可以解决经济管理中的实际应用问题,导数、微分在经济管理中的应用反映为边际、弹性等.相关的应用实例有:影子为什么那么长,边际是什么,弹性是什么,商家应该怎样制定自己的价格策略,不同消费群体的需求弹性问题,机械与人工的调配问题,易拉罐的形状,这批酒什么时候出售最好,该不该接受供货商的优惠条件,作者与出版商的利益冲突等.

微元分析是微积分中一种重要的分析方法,特别是函数的连续求和归结为该函数的积分.与积分和微元分析内容相关的应用实例有:洛伦兹曲线与基尼系数,均匀货币流的总价值与投资回收期的计算,下雪时间的确定,第二宇宙速度是怎样计算出来的等.

离散变量的求和可以用无穷级数来表达,无穷级数的求和是一个极限过程.与无穷级数内容相关的应用实例有:最大货币供应量的计算,政府支出的乘数效应,运用现值计算进行投资项目的评估,谈谈龟兔赛跑悖论等.

如果影响研究问题的主要因素有两个或者两个以上，则要用多元函数的微积分学来处理，涉及多元函数偏导数、偏边际、偏弹性和交叉弹性、条件极值等内容.相关的应用实例有：空调销售量的预测，相互关联商品的需求分析，衣物怎样漂洗最干净，拉格朗日乘数与影子价格等.

变量的变化过程可以用微分方程或差分方程来描述，通过对微分方程或差分方程的建立与求解，可以研究变量的形态和变化规律.与微分方程和差分方程相关的应用实例有：人口模型，单种群动物模型，相对封闭环境中的传染病模型，江河污染物的降解系数，怎样计算固定资产的折旧，放射性元素衰变模型，市场上的商品价格是怎样波动的，再谈下雪时间的确定，溶液浓度模型，饲养物的最佳销售时机，信贷消费中每月还款金额的确定，资源的合理开发与利用，从诺贝尔奖谈起，蛛网模型，梵塔问题，平面内直线交点的个数，斐波那契数列的通项公式等.

1.1　市话费是降了还是升了

自 2001 年 1 月 1 日起,我国的电信资费进行了一次结构性的调整,其中某地区固定电话的市话费由原来的每三分钟(不足三分钟以三分钟计)0.18 元调整为前三分钟 0.22 元,以后每一分钟(不足一分钟以一分钟计)0.11 元.那么,与调整前相比,市话费是降了还是升了?升或降的幅度是多少?

若以 $y(t)$、$Y(t)$ 分别表示调整前后市话费与通话时间 t 之间的函数关系,则有

$$y(t)=\begin{cases}0.18, & 0<t\leqslant 3\\ 0.18\times\dfrac{t}{3}, & t>3\text{ 且}\dfrac{t}{3}\text{ 是整数}\\ 0.18\left(\left[\dfrac{t}{3}\right]+1\right), & t>3\text{ 且}\dfrac{t}{3}\text{ 不是整数}\end{cases}$$

$$Y(t)=\begin{cases}0.22, & 0<t\leqslant 3\\ 0.22+0.11(t-3), & t>3\text{ 且 }t\text{ 是整数}\\ 0.22+0.11([t-3]+1), & t>3\text{ 且 }t\text{ 不是整数}\end{cases}$$

为便于二者进行比较,我们可以按具体的时段计算上述两个函数对应的函数值及相应的调价幅度,并列成如表 1.1.1 所示的对照表.

表 1.1.1　两个函数对应的函数值及相应的调价幅度对照表

t	(0,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]	(6,7]	(7,8]	(8,9]	…	(59,60]	…
$y(t)$	0.18	0.36	0.36	0.36	0.54	0.54	0.54	…	3.60	…
$Y(t)$	0.22	0.33	0.44	0.55	0.66	0.77	0.88	…	6.49	…
升降幅度	22%	−8%	22%	53%	22%	43%	63%	…	80%	…

不难看出,只有当通话时间 $t\in(3,4]$ 时,调整后的市话费才稍微有所降低,其余的时段均比调整前有较大幅度的提高.

评注

1. 理论依据

建立分段函数的方法及取整函数的应用.

2. 应用与推广

许多以时间、重量、距离等为计量单位的收费系统，如场地租赁费、邮政信函及包裹的邮寄费、各类交通工具的行李运输费等，通常都规定了最小的计量单位，且不足一单位的部分以一个单位计. 此类问题均可以参照此例提供的方法借助取整函数建立函数关系.

1.2 外币兑换与股票交易中的涨跌停板

按某个时期的汇率，若将美元兑换成加拿大元，币面值增加 12%；而将加拿大元兑换成美元，币面值减少 12%. 现有一美国人准备到加拿大度假，他将一定数额的美元兑换成了加元，但后来因故未能成行，于是他又将加元兑换成了美元. 经过这样一来一回的兑换，结果白白亏损了一些钱. 这是为什么呢?

对于这个问题，我们只要将两种不同的兑换用函数关系表示出来进行分析，就不难发现造成他亏损的原因.

设 x 美元可兑换的加元数为 $y=f(x)$，y 加元可兑换的美元数为 $x=\varphi(y)$，则

$$y = f(x) = x + 0.12x = 1.12x \tag{1.2.1}$$

$$x = \varphi(y) = y - 0.12y = 0.88y \tag{1.2.2}$$

于是，先把 x 美元兑换成加元，可得的加元数为 $f(x)$；再把这些加元兑换成美元，所得的美元数应为 $z=\varphi[f(x)]$，即

$$z = \varphi[f(x)] = 0.88f(x) = 0.88 \times 1.12x = 0.9856x < x$$

显然，他亏损了 1.44%. 之所以会出现这样的结果，是因为两种兑换所对应的函数(1.2.1)和(1.2.2)不互为反函数. 因为假若(1.2.1)和(1.2.2)互为反函数，则根据 $f[f^{-1}(x)]=x$ 的性质，应有 $\varphi[f(x)]=x$，他也就不会亏损了.

类似的例子还有股票交易中的涨、跌停板. 上海及深圳证券交易所为抑制股票市场中的过度投机，规定了一只股票在一个交易日内的涨、跌幅均不得超过 10% 的限制，分别称之为“涨停板”和“跌停板”. 假若某只股票第一个交易日涨停，而第二个交易日又跌停，则股价并不是简单地回到原价，而是比上涨前更低了. 这其中的道理与造成外币兑换损失的原理是完全相同的.