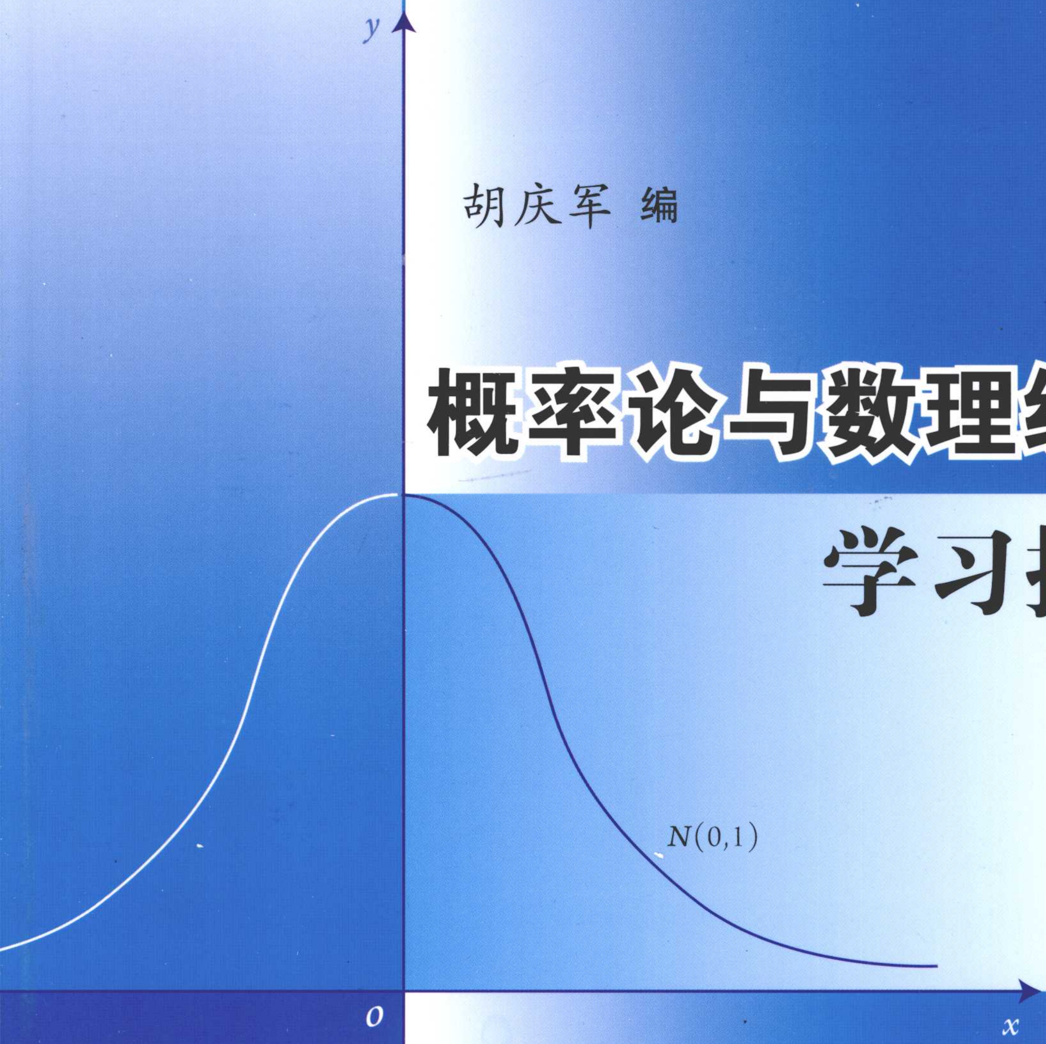
胡庆军 编

概率论与数理统计学习指导



清华大学出版社

胡庆军 编

概率论与数理统计
学习指导

清华大学出版社
北京

内容简介

本书是高等院校工科类本科生数学基础课程"概率论与数理统计"的学习参考书，全书共分 9 章，每章按 6 节撰写（内容归纳、学习要求与技巧、例题解析、释疑解难、自测题、自测题详解），包括阐述基本概念、归纳主要结论、总结学习技巧、解惑疑难问题等，其中包含例题 248 道、自测题 363 道及其详细解答，并将 1998—2007 年 10 年间考研试题（个别题未选入）及详解按内容排序安排在各章的例题与自测题中. 另外，附录中汇集了 2008—2013 年考研试题（共 40 多道）及其详解.

本书是高等院校工科、理科（非数学专业）各专业学生课程学习、复习考研的好帮手，也是青年教师和科技工作者的良师益友.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计学习指导/胡庆军编. --北京：清华大学出版社，2013. 4

ISBN 978-7-302-31666-4

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①胡…　Ⅲ. ①概率论－高等学校－教学参考资料 ②数理统计－高等学校－教学参考资料　Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 042685 号

责任编辑：石　磊　陈　明
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京富博印刷有限公司
装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：25.25　　**字　　数**：617 千字
版　　次：2013 年 4 月第 1 版　　**印　　次**：2013 年 4 月第1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：42.00 元

产品编号：050799-01

前　言

本书是高等院校工科类本科生数学基础课程“概率论与数理统计”的学习参考书，是按照教育部颁布的高等学校本科数学(非数学专业)教学大纲和全国硕士研究生入学统一考试最新数学大纲的基本要求而编写的，是作者近30年的教学经验和10多年考研辅导经验的积累而形成的. 本书的大多数素材已在教学中多次使用过，深受学生们的喜爱.

全书共分9章：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念和抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析. 每章按6节撰写(内容归纳、学习要求与技巧、例题解析、释疑解难、自测题、自测题详解)，包括阐述基本概念、归纳主要结论、总结学习技巧、解惑疑难问题等，其中包含例题248道、自测题363道及其详细解答，并将1998—2007年10年间考研试题(个别题未选入)及详解按内容排序安排在各章的例题与自测题中. 金治明、李永乐编写的《概率论与数理统计》(科学出版社，2008)一书的绝大多数习题收录在本书各章的自测题中. 另外，附录中汇集了2008—2013年考研试题及详解.

本书的特点是：基本概念清晰、完整，主要结论突出，层次分明，解题方法独特，图文并茂，通俗易懂.

阅读本书时请读者注意如下几个方面：

1. 概率论与数理统计是研究大量随机现象的统计规律性的一门数学学科，基本概念很重要. 因此，读者应深刻理解本书归纳的基本概念，熟练掌握本书总结的主要结论，还应充分了解实际问题的背景，在解答问题时才能灵活运用，游刃有余.

2. 在每章的第1节的基本概念和补充结论中有个别项带“*”号，如8.1.2节的第*5条，6.1.2节的第*6条，6.1.4节的第*8条和第*9条等，这些内容或者概念有深度或结论有难度，是考虑到内容的完整性才纳入本书. 读者对这些内容作一般了解即可，考研也未涉及.

3. 在每章的第2节中总结了一些学习技巧，希望读者领会其实质，熟练掌握.

4. 对一些例题给出了解题分析，强调解题的切入点和解题思路，这样能启

发读者的数学思维,提高数学逻辑推理能力;对少数例题给出了多种解法,以强调对已学知识的灵活运用和各方面知识的连接,扩大读者的知识面.

5. 在每章的第4节中汇集了一些疑难问题,这些问题是读者在学习中常常遇到且感到困惑不解的问题,作者给出了详细的解答.

6. 要学好一门数学课程,做习题是必不可少的,本书汇集了大量的自测题.读者在做自测题时,不要急于看已给的解答,一定要多思考、多动脑,多动手书写表达,而且是系统的书写表达.只有这样,才能加深对概念的理解,巩固从教材中学到的知识,掌握各种技巧;才能提高读者的基本推理、运算和应试能力.

7. 为了扩大读者的视野,本书选入了少量带"*"号的例题和自测题,如1.3节的*例49和8.5节自测题的*29题等,这些题有一定的难度或广度,难是难在解题技巧上,广是超出了教学基本要求.这些题超出了考研范围,有精力的读者可思考.

8. 对于考研的读者而言,第9章不作要求.从2009年开始,全国硕士研究生入学统一考试数学试卷分数学一、数学二和数学三.数学一的考纲要求是第1章～第8章的全部内容;数学二不考概率统计;数学三的考纲要求是第1章～第7章的内容,且第7章中的区间估计不作要求.

本书的出版得到了国防科技大学理学院易东云教授、李建平教授和冯良贵教授的热情关心和大力支持,获得了国防科技大学数学学科重点建设项目与数学公共课程国家级教学团队建设项目经费的资助;本书的编写得到黄建华教授、郑言博士的鼓励和帮助;同时,本书的素材也吸纳了众多同类书籍的精华,在此一并表示衷心的感谢!

本书可供高等院校工科、理科(非数学专业)各专业学生课程学习、复习及考研之用,也是青年教师和科技工作者的良师益友.

由于作者水平有限,纰漏之处在所难免,恳望读者批评指正.

编 者

2013.1

目　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　内 容 归 纳

1.1.1　内容提要

样本空间与事件、事件的关系与运算规律、频率、概率及性质、古典概型及概率计算、几何概率及计算、条件概率、乘法定理、全概率公式、贝叶斯公式、事件的独立性.

1.1.2　基本概念

1. 在一定条件下,可以预言的,或者说必然会出现的现象称为**必然现象**;在一定条件下,事先无法预知其确切结果,或者说在相同条件下,重复进行试验,每次结果未必相同,这类现象称为**随机现象**;具有以下三个特征的试验称为**随机试验**(简称**试验**):

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 进行一次试验之前,不能确定哪一个结果会出现.

2. 样本空间与事件

(1) 将一个随机试验 E 的所有可能结果组成的集合,称为试验 E 的**样本空间**,记为 Ω;样本空间的元素称为**样本点**.

(2) 对于试验 E,样本空间为 Ω,设 A 为 Ω 的任一子集,称 A 为试验 E 的**随机事件**,简称**事件**;在一次试验中,若 A 中的一个样本点出现,则称事件 A **发生**;每个样本点构成的单点集称为**基本事件**;样本空间 Ω(在每次试验中必然发生)称为**必然事件**;空集 $\varnothing$(在每次试验中都不发生)称为**不可能事件**.

3. 事件的关系

(1) 若事件 A 中的每一个样本点都包含在事件 B 中,则称**事件 B 包含了事件 A**(见图 1.1),记为 $A\subset B$;若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称事件 A 与 B **相等**,记为 $A=B$.

(2) $A\cup B \overset{\text{def}}{=\!=} \{\omega|\omega\in A,或\ \omega\in B\}$,称为事件 A 与 B 的**并事件**(见图 1.2);n 个事件 A_1,A_2,…,A_n 的并事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$;可列个事件 A_1,A_2,…的并事件记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(3) $A\cap B \overset{\text{def}}{=\!=} \{\omega|\omega\in A,且\ \omega\in B\}$,称为事件 A 与 B 的**交事件**,简记为 AB(见图 1.3);n 个事件 A_1,A_2,…,A_n 的交事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$;可列个事件 A_1,A_2,…的交事件记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(4) 对于样本空间 Ω,事件 A 与 B,若 $A\cup B=\Omega$,$A\cap B=\varnothing$,则称 B 为 A 的**对立事件**(**或逆事件**),记为 $\overline{A}$(见图 1.4),即 $\overline{A}=B$.

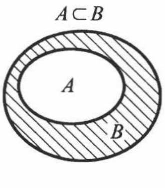


图 1.1

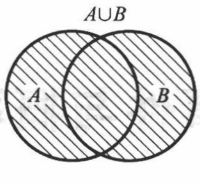


图 1.2

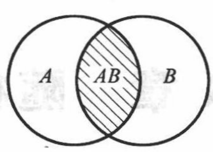


图 1.3

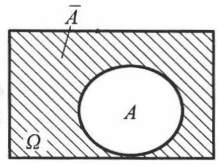


图 1.4

(5) $A-B\stackrel{\text{def}}{=}\{\omega\mid\omega\in A,\text{且 }\omega\notin B\}$,称为 A 与 B 的**差事件**(见图 1.5).

(6) 若事件 A,B 满足 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B **互不相容**(见图 1.6);对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,若

$$A_iA_j=\varnothing,\quad i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n,$$

则称这 n 个事件**两两互不相容**.

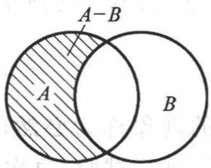


图 1.5

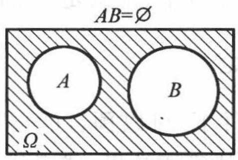


图 1.6

(7) 设 E 为试验,Ω 为样本空间,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是一组事件,若

① $B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$;

② $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$.

则称 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 Ω 的一个**划分**.

4. 设 E 是随机试验,Ω 为样本空间,对于 E 的每一个事件 A,赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 的**概率**,如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列三条:

(1) $P(A)\geqslant 0,\forall A\subset\Omega$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots,$$

且称上式为**可列可加性**.

5. 具有以下特征的试验称为**等可能概型**(或**古典概型**):

(1) 样本空间只含有限个元素;

(2) 每个基本事件发生的可能性相等.

6. 设事件 $A=\{$在区域 G 中随机地取一点,而该点落在区域 g 中$\}$,其中 $g\subset G$,且 g,G 的度量大小记为 $\mu(g),\mu(G)$(如长度、面积、体积等),事件 A 发生的概率定义为

$$P(A)=\frac{\mu(g)}{\mu(G)},\tag{1.1}$$

且称为**几何概率**.

7. 设 A,B 为两个事件，且 $P(A)>0$，称

$$P(B \mid A) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在 A 已发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

8. 事件的独立性

(1) 设 A,B 为两个事件，如果有

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

则称事件 A,B **相互独立**.

(2) 设 A,B,C 是三个事件，若有等式

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A) \cdot P(B), \\ P(AC) &= P(A) \cdot P(C), \\ P(BC) &= P(B) \cdot P(C), \\ P(ABC) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C), \end{aligned}$$

则称事件 A,B,C **相互独立**.

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意 $k(1<k\leqslant n)$ 和任意 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

其中上式应含有 $\binom{n}{2}+\binom{n}{3}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n-n-1$ 个等式成立，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**.

(4) 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件相互独立，则称为**两两相互独立**.

9. 将一个试验重复进行 n 次，若各次试验的结果互不影响，即每次试验结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果，则称这 n 次试验**相互独立**.

1.1.3 主要结论

1. 事件的运算顺序：先逆运算、后交运算，再并运算，有括号者先算括号；事件的运算规律有

交换律：$A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$；

结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

德莫根律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}, \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

2. 概率的基本性质

(1) $P(\varnothing)=0$；

(2) 概率的**有限可加性**：若 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(3) 若事件 $A\subset B$，则

$$P(B-A) = P(B)-P(A), \quad P(B)\geqslant P(A);$$

(4) $P(A)\leqslant 1, P(\overline{A})=1-P(A)$；

(5) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$；对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot P(A_1A_2\cdots A_n).$$

此性质称为概率的**加法公式**(或**多除少补定理**).

3. 对于古典概型，事件 A 的概率计算公式为

$$P(A)=\frac{A\text{ 含基本事件个数 }k}{\Omega\text{ 中基本事件总数 }n}\left(=\frac{k}{n}\right). \tag{1.2}$$

4. 对于事件 A,B，且设 $P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A). \tag{1.3}$$

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1})\cdot P(A_{n-1}\mid A_1\cdots A_{n-2})\cdots P(A_2\mid A_1)\cdot P(A_1). \tag{1.4}$$

称(1.3)式、(1.4)式均为**乘法定理**.

5. 对于样本空间 Ω，A 为一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(B_i)>0$，$i=1,2,\cdots,n$. 则

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A\mid B_1)+P(B_2)\cdot P(A\mid B_2)+\cdots+P(B_n)\cdot P(A\mid B_n). \tag{1.5}$$

称(1.5)式为**全概率公式**.

6. 设 Ω 为样本空间，A 为一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A)>0$，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$. 则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)\cdot P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)\cdot P(A\mid B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{1.6}$$

称(1.6)式为**贝叶斯(Bayes)公式**.

7. 若事件 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 亦相互独立.

1.1.4 补充结论

1. 对于试验 E，样本空间为 Ω，$\varnothing$ 为不可能事件，A,B 为事件，则

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A,\quad \varnothing\subset A\subset\Omega,$$
$$\overline{A}=\Omega-A,\quad A-B=A\overline{B}=A-AB.$$

2. 若事件 A,B 满足 $A\subset B$，则

$$A\cup B=B,\quad A\cap B=A.$$

且当 A 发生时，事件 B 一定发生.

3. 对于事件 A,B，则

(1) 并事件 $A\cup B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生或 B 发生；

(2) 交事件 $A\cap B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A,B 同时发生；

(3) 差事件 $A-B$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 A 发生但 B 不发生.

4. 概率的**减法公式**：对于任何事件 A,B，则

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

5. 在相同条件下进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为 A 发生的**频数**，称 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$. 则频率 $f_n(A)$ 具有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$；若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

6. 在古典概型的概率计算中，经常要用到一些排列与组合公式：

(1) 从 n 个不同元素中取出 k 个排成一排，则所有不同的排法总数为

$$\mathrm{A}_n^k\overset{\text{def}}{=}n(n-1)\cdots(n-k+1);$$

(2) 从 n 个不同元素中取出 k 个，则所有不同的取法总数为

$$\mathrm{C}_n^k=\binom{n}{k}\overset{\text{def}}{=}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!};$$

(3) 将 n 个不同元素排成一圈，则所有不同的排法总数为 $(n-1)!$；

(4) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},\quad \binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}=\binom{n+1}{m}$；

(5) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n,\quad \binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$；

(6) 若 $r_1+r_2+\cdots+r_k=n$，把 n 个不同的元素分成 k 个部分，第 i 部分为 r_i 个 $(i=1,2,\cdots,k)$. 则不同的分法总数共有

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}=\binom{n}{r_1}\binom{n-r_1}{r_2}\cdots\binom{n-r_1-r_2-\cdots-r_{k-1}}{r_k};$$

(7) 若 n 个元素中有 n_i 个带标号 $i(i=1,2,\cdots,k)$，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 从这 n 个元素中取出 r 个，使得带 i 的元素有 $r_i(i=1,2,\cdots,k)$ 个，满足 $r_i\leqslant n_i$，$\sum_{i=1}^k r_i=r$，这时不同取法总数为

$$\binom{n_1}{r_1}\binom{n_2}{r_2}\cdots\binom{n_k}{r_k}.$$

7. 条件概率符合概率定义的三条：

(1) $P(B|A)\geqslant 0,\forall B\subset\Omega$；

(2) $P(\Omega|A)=1$；

(3) 若 $B_iB_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots$，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\mid A\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i\mid A)$.

8. 若 A,B 为两个事件，且 $P(A)>0$，则 A,B 相互独立的充要条件是下式成立：

$$P(B\mid A)=P(B).$$

9. 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中的任意 $k(2\leqslant k<n)$ 个事件亦相互独立.

10. 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则一定两两相互独立.

1.2 学习要求与技巧

1.2.1 学习要求

1. 了解随机现象与随机试验的概念，理解样本空间和事件的概念，掌握事件的关系与运算规律，会用事件的关系表示事件.

2. 了解频率的概念，熟悉概率的定义，熟练掌握概率的基本性质；理解和掌握条件概率的定义，熟练掌握乘法定理、全概率公式，掌握贝叶斯公式，并能应用这些性质和公式进行概率计算.

3. 掌握古典概型的概率计算公式，会做基本习题；了解几何概型的概念，能处理有关几何概率的简单问题.

4. 理解事件独立性的概念，掌握事件独立性的性质，并会用事件独立性进行概率计算；理解重复独立试验的概念，掌握计算有关事件概率的方法.

5. 本章的重点是概率的性质、古典概型的概率计算、条件概率、乘法定理、全概率公式、事件的独立性；难点是古典概型的概率计算(包括排列与组合)、贝叶斯公式.

1.2.2 学习技巧总结

1. 样本空间 Ω 是一个集合，任一事件 A 是一个子集合. 注意到，事件之间的关系与运算规律是按集合论中集合之间的关系与运算规律来处理的，而集合之间的关系与运算规律是读者熟悉的，那么，事件之间的关系与运算规律就不难掌握. 要强调的是，读者要熟悉它们在概率论中的含义.

2. 在解决实际问题或概率计算中(特别是第 1 章)，要学会用事件的关系表示事件(参见本章例 1、例 4 和例 11).

3. 古典概型中许多概率的计算相当繁琐且技巧性强，计算的要点是构造适当的样本空间，求出样本点(即基本事件)总数，再求出所论事件包含的基本事件个数，最后由(1.2)式得所求事件的概率. 在这些计算中，经常要用到读者在中学中熟悉的两条计数原理：乘法原理和加法原理. 在这里的难点是所论事件包含的基本事件个数的计数. 值得一提的是，在求解这类问题时，常常会想到公式

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

或者概率的其他性质以此来简化求解问题的方法(参见本章例 19、例 23 和例 26).

4. 事件 A,B 同时发生的概率为 $P(AB)$，而条件概率 $P(B|A)$ 表示已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率大小. 由此说明，$P(AB)$ 与 $P(B|A)$ 是有不同的含义，不能混淆(参见本章例 27 和例 29).

5. 乘法定理(1.3)式实际上是条件概率公式的变形. 它的重要意义在于：当概率 $P(AB)$ 不易求，但 $P(A)$，$P(B|A)$ 已知时，则由乘法定理(1.3)式得 $P(AB)$ 的值. 对(1.4)式有类似的解释.

6. 如果一项试验可分先后两个阶段进行，第一阶段有 $B_1,B_2,\cdots,B_n$(称为“原因”)种可

能情况出现，第二阶段也有多种可能情况（称为“结果”）出现. 那么，要求某一种“结果”A 出现的概率时，则用全概率公式(1.5)（参见本章例 30、例 31 和例 33），也叫“由因导果”；若已知“结果”A 出现了，要求由“原因”$B_i(i=1,2,\cdots,n)$引起的概率 $P(B_i|A)$时，则用贝叶斯公式(1.6)（参见本章例 32 和例 33），也叫“由果溯因”.

7. 贝叶斯公式是难点，读者常常感到困惑. 它难在两个方面：怎样使用和如何记忆. 前者在上面已做了表述. 至于后者，则公式不必死记，它可从三个方面表达出来：其一，用条件概率公式 $P(B_i|A)=\dfrac{P(B_iA)}{P(A)}$；其二，分子用乘法定理 $P(B_iA)=P(B_i)\cdot P(A|B_i)$；其三，分母用全概率公式(1.5)，则得贝叶斯公式(1.6).

8. 事件的独立性是概率论中的一个非常重要的概念. 在实际应用中，对于事件的独立性，往往不是根据定义来判断而是根据问题的实际意义来加以来判断的. 根据实际背景判断事件的独立性，往往并不困难（参见本章例 44 的事件 A_1,A_2、例 45 的事件 B_1,B_2,B_3）.

9. 概率的性质、条件概率、乘法定理及事件的独立性在问题讨论或求解中常常混合使用，要熟练掌握，才能灵活运用.

1.3　例题解析

例 1　设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件：

(1) 三个事件中至少有两个发生；

(2) 三个事件中不多于一个发生.

分析　首先应清楚：在事件的表示中，“至少”及“或者”两字一定是用并“$\cup$”的关系表示，“同时发生” 一定是用交“$\cap$”的关系表示. 另一方面，对于三个事件 A,B,C 可分为：三个都不发生，或者恰好有一个发生，或者恰好有两个发生，或者恰好有三个发生. 还注意到，事件“三个事件中至少有两个发生”可表为事件“至少有两个不发生的对立事件”；事件“三个事件中不多于一个发生”可表为事件“至少有两个不发生”，也可表示为“至少有两个发生的对立事件”.

答案　(1) $AB\cup BC\cup AC(=ABC\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup \bar{A}BC=\overline{\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}})$；

(2) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C(=\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}=\overline{AB\cup BC\cup AC})$.

注　答案(1)中的三种表示也可由事件的运算规律而转化，即

$$\begin{aligned}ABC\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC&=(ABC\cup AB\bar{C})\cup(ABC\cup A\bar{B}C)\cup(ABC\cup\bar{A}BC)\\&=[AB(C\cup\bar{C})]\cup[AC(B\cup\bar{B})]\cup[BC(A\cup\bar{A})]\\&=AB\cup BC\cup AC.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}}&=(B\cup C)\cap(A\cup C)\cap(A\cup B)\\&=(AB\cup C)\cap(A\cup B)\ \text{（用事件运算的分配律得）}\\&=AB\cup BC\cup AC.\end{aligned}$$

例 2　一个工人生产了 n 个零件，以事件 A_i 表示“他生产的第 i 个零件是正品”$(1\leqslant i\leqslant n)$. 试用 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 表示事件“至少有两个零件不是次品”.

分析　事件“至少有两个零件不是次品”理解为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有两个发生，即

$\bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(A_iA_j)$，也可用如下方式考虑.

对于 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，可分为：n 个事件都不发生，或 n 个事件中恰好有一个发生，或者恰好有两个发生，……，或者恰好有 n 个发生. 而 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有两个发生可理解为事件“n 个事件都不发生，或 n 个事件中恰好有一个发生”的对立事件 $\overline{\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)\cup\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(A_i\cap\left(\bigcap\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\overline{A}_j\right)\right)\right]}$.

答案 $\bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(A_iA_j)\left(=\overline{\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{A}_i\right)\cup\left[\bigcup\limits_{i=1}^{n}\left(A_i\cap\left(\bigcap\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\overline{A}_j\right)\right)\right]}\right)$.

例 3 试把事件 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示成 n 个两两互不相容事件之并.

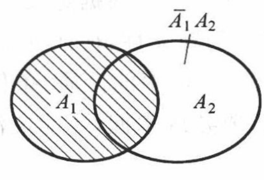


图 1.7

解 由 $A_1\cup A_2=A_1\cup\overline{A}_1A_2$（见图 1.7），$A_1$ 与 $\overline{A}_1A_2$ 互不相容，则

$$\begin{aligned}A_1\cup A_2\cup A_3&=A_1\cup A_2\cup(\overline{A_1\cup A_2}A_3)\\&=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,\end{aligned}$$

且 $A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 两两互不相容. 依次类推，则

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup\cdots\cup\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{n-1}A_n,$$

且 n 个事件 $A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3,\cdots,\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{n-1}A_n$ 两两互不相容.

例 4 以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 是 【 】

(A) 甲种产品滞销，乙种产品畅销. (B) 甲、乙两种产品均畅销.

(C) 甲种产品滞销. (D) 甲种产品滞销或乙种产品畅销.

解 记事件 $B=\{$甲种产品畅销$\}$，$C=\{$乙种产品滞销$\}$，则 $A=BC$. 由此可得

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\{\text{甲种产品滞销}\}\text{或}\{\text{乙种产品畅销}\}.$$

所以答案应选(D).

例 5 当事件 A 和 B 同时发生时，事件 C 必发生，则下列结论中正确的是 【 】

(A) $P(C)=P(AB)$. (B) $P(C)=P(A\cup B)$.

(C) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$. (D) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)$.

解 注意到，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB),$$
$$P(A\cup B)\leqslant 1.$$

已知事件 A 和 B 同时发生时，事件 C 必发生，则有 $AB\subset C$. 由此

$$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

所以答案应选(C).

例 6 设 A,B 为两个随机事件，且 $P(B)>0,P(A|B)=1$. 则必有 【 】

(A) $P(A\cup B)>P(A)$. (B) $P(A\cup B)>P(B)$.

(C) $P(A\cup B)=P(A)$. (D) $P(A\cup B)=P(B)$.

解 由 $1=P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\ \Rightarrow\ P(AB)=P(B)$. 则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A).$$

故答案应为(C).

例 7 设 A,B 是两个随机事件,已知 $P(A)=1$,则必有 【 】

(A) A 是必然事件. (B) $B\subset A$.

(C) 事件 A,B 相互独立. (D) $P(B)<P(A)$.

解 由 $P(A)=1 \Rightarrow P(\overline{A})=0 \Rightarrow P(\overline{A}B)=0 \Rightarrow P(AB)=P(B)$

$$\Rightarrow \quad P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

则事件 A,B 相互独立.所以答案应选(C).

例 8 设 A,B,C 为三个事件两两独立,则 A,B,C 相互独立的充分必要条件是 【 】

(A) A 与 BC 独立. (B) AB 与 $A\cup C$ 独立.

(C) AB 与 AC 独立. (D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立.

解 已知 A,B,C 为三个事件两两独立,若要 A,B,C 相互独立,则应有

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

于是,当 A 与 BC 独立时,则

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(BC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

所以答案应为(A).

例 9 设 A,B 是两事件且 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$.问:

(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值,最大值是多少?

(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值,最小值是多少?

解 已知 $P(A)=0.6,P(B)=0.7$,由

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

可知

(1) 若 $A\subset B$ 时,则 $P(AB)$ 达最大,且最大值为

$$P(AB)=P(A)+P(B)-P(B)=P(A)=0.6;$$

(2) 若 $A\cup B=\Omega$ 时,则 $P(AB)$ 达最小,且最小值为

$$P(AB)=P(A)+P(B)-1=0.3.$$

例 10 设 $A\subset B,P(A)=0.1$,求 $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ 的值.

解 方法 1 由 $A\subset B \Rightarrow P(AB)=P(A)$.则

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A)=0.9.$$

方法 2 由 $A\subset B \Rightarrow \overline{A}\supset\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A}$.则

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{A})=1-P(A)=0.9.$$

例 11 对于事件 A,B,C,已知 $P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},P(ABC)=\frac{1}{16}$,求 A,B,C 中至多只有一个事件发生的概率.

分析 求解本题的关键之一(也是难点)是如何表示事件"A,B,C 中至多只有一个事件发生".根据已知条件,结合例 1 的分析,则

"A,B,C 中至多只有一个事件发生"="至少有两个发生的对立事件"

$$=\overline{AB\cup AC\cup BC}.$$

求解本题的关键之二是用对立事件的概率公式及三个事件并事件的概率加法公式(亦叫多除少补定理):

$$P(AB\cup AC\cup BC)=P(AB)+P(AC)+P(BC)-3\cdot P(ABC)+P(ABC)$$
$$=P(AB)+P(AC)+P(BC)-2\cdot P(ABC).$$

解　所求概率为

$$P\{A,B,C\text{中至多只有一个事件发生}\}=P(\overline{AB\cup AC\cup BC})$$
$$=1-P(AB\cup AC\cup BC)$$
$$=1-[P(AB)+P(AC)+P(BC)-2\times P(ABC)]$$
$$=1-\left(3\times\frac{1}{4}-2\times\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{8}.$$

例 12　设两两相互独立的三事件 A,B,C 满足条件：$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=9/16$，求 $P(A)$ 的值.

解　设 $P(A)=x$，由

$$\frac{9}{16}=P(A\cup B\cup C)$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

且事件两两独立及题中已知条件，则

$$\frac{9}{16}=3x-3x^2\quad\Rightarrow\quad x^2-x+\frac{3}{16}=0.$$

解得 $x=\frac{1}{4}$ 或 $x=\frac{3}{4}$. 又由 $P(A)\leqslant P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}\quad\Rightarrow\quad x=\frac{1}{4}$，则 $P(A)=\frac{1}{4}$.

例 13　对于事件 A,B，已知 $P(A)=0.3$，$P(B|\overline{A})=0.4$，求 $P(A\cup\overline{B})$ 的值.

解　方法 1　$P(A\cup\overline{B})=P(A\cup\overline{A}\overline{B})=P(A)+P(\overline{A}\overline{B})=P(A)+P(\overline{A})\cdot P(\overline{B}|\overline{A})$
$$=P(A)+P(\overline{A})\cdot[1-P(B|\overline{A})]$$
$$=0.3+0.7\times(1-0.4)=0.72.$$

方法 2　$P(A\cup\overline{B})=1-P(\overline{A\cup\overline{B}})=1-P(\overline{A}B)=1-P(\overline{A})\cdot P(B|\overline{A})$
$$=1-[1-P(A)]\cdot P(B|\overline{A})$$
$$=1-(1-0.3)\times 0.4=0.72.$$

例 14　设 A,B 是两事件，$P(A)=P(\overline{B})$，$P(A|B)=0.2$，$P(B|A)=0.3$，求 $P(A)$ 的值.

解　由 $0.2=P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\quad\Rightarrow\quad P(AB)=0.2P(B)$，

$$0.3=P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}\quad\Rightarrow\quad P(AB)=0.3P(A).$$

则

$$0.3P(A)=0.2P(B)=0.2[1-P(\overline{B})]=0.2[1-P(A)]$$
$$\Rightarrow\qquad P(A)=0.4.$$

例 15　设事件 A 与 B 相互独立，且在事件 A,B 中只有 A 发生的概率与只有 B 发生的概率都是 0.25，求 $P(A)$ 的值.

解　由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=0.25$，及 A 与 B 相互独立，则

$$P(A)\cdot P(\overline{B})=P(\overline{A})\cdot P(B)$$
$$\Rightarrow\qquad P(A)\cdot[1-P(B)]=[1-P(A)]\cdot P(B)$$
$$\Rightarrow\qquad P(A)=P(B).$$