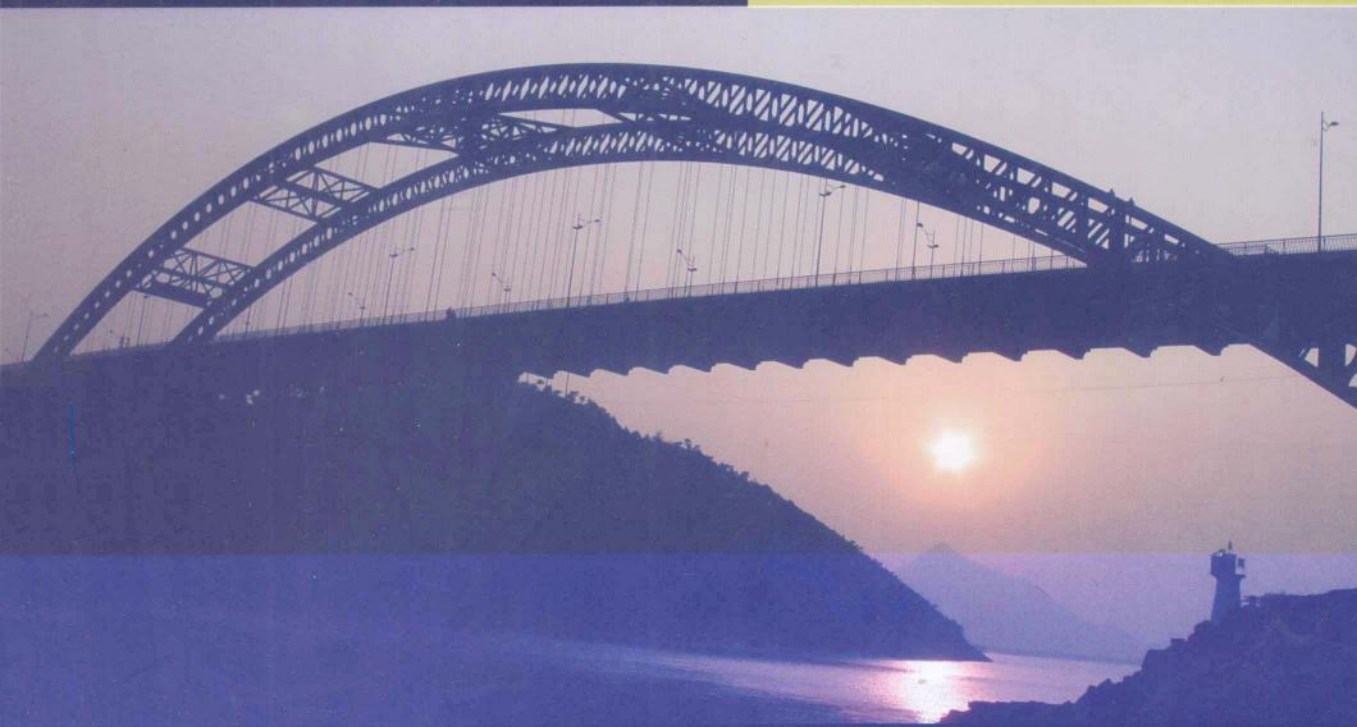


Bridge Structural Calculation  
Principle and Software Application

# 桥梁结构电算 原理与软件应用

彭 卫 王银辉◎主 编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

# 桥梁结构电算原理与软件应用

彭 卫 王银辉 主 编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS  
浙江大学出版社

## 内 容 提 要

本书在矩阵位移法的基础上,介绍平面杆件系统有限单元法的计算步骤和桥梁结构电算的原理与要点。结合新旧设计规范,书中分别以简支梁桥、小跨径等截面连续梁桥、大跨径变截面连续刚构桥、钢管混凝土拱桥为实例,详细阐述运用 Dr. Bridge 软件和 MIDAS/Civil 软件进行桥梁设计与验算的具体计算过程和一般方法。

本书可作为高等院校土木工程专业桥梁工程方向师生的桥梁电算课程参考教材以及课程设计和毕业设计的参考用书,亦可供从事桥梁工程设计的专业技术人员参考使用。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

桥梁结构电算原理与软件应用 / 彭卫,王银辉主编.

—杭州:浙江大学出版社,2013.6

ISBN 978-7-308-11382-3

I. ①桥… IV. ①彭… ②王… III. ①桥梁结构—计算机辅助计算—高等学校—教材 IV. ①U441-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 081033 号

## 桥梁结构电算原理与软件应用

彭 卫 王银辉 主 编

---

责任编辑 王元新

封面设计 续设计

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址: <http://www.zjupress.com>)

排 版 杭州中大图文设计有限公司

印 刷 富阳市育才印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 18.5

字 数 451 千

版 印 次 2013 年 6 月第 1 版 2013 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-11382-3

定 价 39.00 元

---

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部联系方式:0571-88925591; <http://zjdxcbbs.tmall.com>

# 前 言

《桥梁结构电算原理与软件应用》主要是配合桥梁工程结构电算课程教学和桥梁工程毕业设计而编写的教材。

本教材将桥梁结构电算的基本原理——平面杆系有限单元法与常用的桥梁结构专用分析软件结合起来,淡化具体编程,注重基础理论介绍,注重软件应用能力训练,注重计算实例示范。

本书主要包括以下两大部分内容:

第一部分:包括第一章平面杆件系统的有限单元法和第二章桥梁结构电算原理。第一章主要介绍桥梁作为杆系结构的有限单元基本原理和程序设计概要;第二章主要介绍桥梁结构分析中的特殊性因素,如建立不同桥梁结构形式分析模型的要点,桥梁结构内力计算,并概要介绍目前工程中常用的桥梁工程结构分析软件的特点。

第二部分:包括第三章桥梁工程软件 Dr. Bridge 应用实例和第四章桥梁工程软件 MIDAS/Civil 应用实例。主要通过计算示例介绍目前桥梁工程领域常用的两款专用软件 Dr. Bridge 和 MIDAS/Civil。其中第三章采用了预应力混凝土简支 T 梁桥、小跨径等截面连续刚构桥、大跨径变截面连续刚构桥和钢管混凝土系杆拱桥四个计算示例,第四章采用了等截面连续梁桥、变截面连续梁桥和钢管混凝土系杆拱桥三个计算示例。

所有计算示例均结合软件界面,按照桥梁结构分析的过程进行了详细介绍,但各计算模型又有所侧重。第三章中简支 T 梁桥算例、大跨径变截面连续刚构桥和钢管混凝土系杆拱桥均包含结构内力计算、预应力钢筋估束与布置以及结构安全性验算,而小跨径等截面连续刚构桥则仅包含结构安全性验算。为了兼顾新、旧公路桥涵设计规范的应用,第三章的简支 T 梁桥、小跨径等截面连续刚构桥按照旧公路桥涵设计规范编写,其他算例均按照现行公路桥涵设计规范编写。

全书由彭卫教授、王银辉副教授主编,其中第一、二、四章由彭卫编写,第三章由王银辉编写,全书由彭卫教授统稿。

在本书的编写过程中,赵孝平、朱华伟、李凡、常全辉、侯海涛、张存辉、毛雨桥等承担了示例计算复核和部分绘图及文字处理工作,谨在此一并致以诚挚的感谢。本书作为讲义在浙江大学宁波理工学院 2008 级、2009 级土木工程专业(道路桥梁方向)的教学过程中得到试用,对同学们在使用过程中提出的宝贵意见表示感谢。

由于编者水平有限,对规范和软件的理解与应用不够透彻,书中定有不少缺点和错误,恳请读者和同行专家批评指正。

编 者

2013 年 3 月

# 目 录

第一章 平面杆件系统的有限单元法	1
第一节 引 言	1
一、连续体有限单元法分析过程	1
二、杆系结构有限单元法分析过程	3
第二节 平面杆件系统的有限单元法	3
一、单元分析	4
二、整体分析	8
三、支撑条件的引入	12
四、等效结点荷载	13
五、计算步骤和算例	13
六、主要步骤	19
第三节 杆系结构有限元静力分析程序系统	21
一、结构化程序设计	21
二、数据管理	22
三、结构离散化	23
四、边界条件处理	24
第二章 桥梁结构电算原理	26
第一节 桥梁结构数值分析	26
一、桥梁结构分析的内容和特点	26
二、桥梁结构分析的建模	30
三、不同类型桥梁的结构分析	33
第二节 桥梁结构次内力计算	52
一、预应力效应	52
二、混凝土收缩徐变效应	54
三、温度效应	57
第三节 常用桥梁工程软件介绍	62
一、公路桥梁结构设计系统(GQJS 计算程序)	62
二、Dr. Bridge 计算软件	62
三、MIDAS/Civil 计算软件	63



<b>第三章 桥梁工程软件 Dr. Bridge 应用实例</b> .....	65
<b>第一节 简支 T 梁桥</b> .....	65
一、设计基本资料 .....	65
二、内力与位移计算 .....	65
三、预应力估束与布置 .....	85
四、全桥结构安全验算 .....	87
五、计算结果分析 .....	89
<b>第二节 小跨径等截面连续刚构桥</b> .....	96
一、设计基本资料 .....	96
二、输入总体信息 .....	105
三、输入单元信息 .....	106
四、输入钢束信息 .....	114
五、输入施工信息 .....	116
六、输入使用阶段信息 .....	119
七、项目执行计算及输出 .....	121
<b>第三节 大跨径变截面连续刚构桥</b> .....	124
一、设计基本资料 .....	124
二、内力计算 .....	140
三、预应力估算与普通钢筋设置 .....	153
四、全桥结构安全验算 .....	160
<b>第四节 钢管混凝土系杆拱桥</b> .....	174
一、设计基本资料 .....	174
二、内力计算 .....	183
三、系梁预应力估束 .....	197
四、全桥结构安全验算 .....	197
<b>第四章 桥梁工程软件 MIDAS/Civil 应用实例</b> .....	202
<b>第一节 等截面连续梁桥</b> .....	202
一、设计基本资料 .....	202
二、设计要点及结构尺寸拟定 .....	205
三、设定建模环境 .....	208
四、定义材料和截面 .....	209
五、建立结构模型 .....	211
六、建立边界条件 .....	212
七、输入荷载 .....	215
八、查看结果 .....	222
九、预应力钢束输入 .....	226
十、PSC 截面设计 .....	233

---

第二节 变截面连续梁桥	235
一、设计基本资料	235
二、主梁截面尺寸的拟定	238
三、定义建模环境	242
四、定义材料及截面	243
五、建立结构模型	248
六、定义组	250
七、定义边界条件	254
八、定义施工荷载	255
九、定义施工阶段	262
十、定义成桥阶段荷载	266
十一、结果查看	267
第三节 钢管混凝土系杆拱桥	268
一、分析模型与荷载条件	268
二、输入构件材料及截面	269
三、建立拱肋	271
四、建立吊杆	272
五、形成拱的主梁并复制框架	273
六、建立横系梁	274
七、输入结构的边界条件	277
八、输入梁单元连接部的边界条件	277
九、建立虚设梁	278
十、输入车辆移动荷载和静力荷载	280
十一、进行结构分析	286
参考文献	287

# 第一章 平面杆件系统的有限单元法

有限单元法是随着电子计算机的发展而迅速发展起来的一种数值分析方法。它在工程技术领域中的应用十分广泛,几乎所有的弹塑性结构静力学和动力学问题都可用它求得满意的数值结果。

## 第一节 引言

有限单元法在 20 世纪 50 年代起源于航空工程中飞机结构的矩阵分析。结构矩阵分析认为,一个结构可以看做是由有限个力学小单元互相连接而组成的集合体。应用有限单元法求解任意的连续体时,应把连续的求解区域分割成有限个单元,并在每个单元上指定有限个结点,一般可认为相邻单元在结点上连接构成一个整体,用以模拟或逼近求解区域进行分析。

结构力学传统的分析方法有力法和位移法,其相应的计算手段是手算,适用于解决计算图式简单、未知数不太多的结构分析问题。结构矩阵分析方法是电子计算机进入结构力学领域而产生的一种方法,它以传统结构力学作为理论基础,以矩阵作为数学表达式,以电子计算机作为计算手段,是适合电算的分析方法,能够快速、精确地解决手算难以完成的大型复杂问题。根据所选基本未知数的不同,结构矩阵分析方法有矩阵位移法(刚度法)和矩阵力法(柔度法)两种。矩阵位移法由于具有易于实现计算过程程序化的优点而应用较广,是有限单元法的雏形。

### 一、连续体有限单元法分析过程

连续体有限单元法的分析过程,概括起来可以分为以下六个步骤。

#### (一)结构的离散化

将要分析的结构物分割成有限个单元体,并在单元体的指定点设置结点,使相邻单元的有关参数具有一定的连续性,并构成一个单元的集合体,以代替原来的结构。如果是桁架或刚架,可以取每根杆件作为一个单元。如果是板等连续体,就需要考虑选择单元的形状和分割方案以及确定单元和结点的数目等问题,以求有效地逼近实际的连续体。

#### (二)选择位移模式

在结构的离散化完成之后就可以对典型单元进行特性分析了。此时,为了能用结点位移表示单元体的位移、应变和应力(以位移作为基本未知量求解),在分析连续体问题时,必须对单元中位移的分布作出一定的假定,即假定位移是坐标的某种简单的函数,这种函数称为位移模式或插值函数。

选择适当的位移模式是有限单元法分析中的关键,通常选择多项式作为位移模式。因



为多项式的数学运算(微分和积分)比较方便,并且所有光滑函数的局部都可以用多项式逼近。至于多项式的项数和阶次的选择,则要考虑单元的自由度和解的收敛性要求。一般来说,多项式的项数应等于单元的自由度数,其阶次应包含常数项和线性项等。这里所谓单元的自由度是指单元结点独立位移的个数。

根据所选定的位移模式,可以导出用结点位移表示的单元内任一点位移的关系式,其矩阵形式是:

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e \quad (1-1)$$

式中:  $\{f\}$  ——单元内任一点的位移列阵;

$\{\delta\}^e$  ——单元的结点位移列阵;

$[N]$  ——形函数矩阵,它的元素是位置坐标的函数。

在此顺便指出:有限单元法比起经典的近似法具有明显的优越性。例如,在经典的里兹法中,要求选取一个函数来近似地描述整个求解区域中的位移,并满足边界条件;而在有限单元法中则采用分块近似,只需对一种单元选择一个近似位移函数,此时不必考虑位移边界条件,只需考虑单元之间位移的连续性就可以了。这样做比起在整个区域中选取一个连续函数要简单得多,特别是对于复杂的几何形状,或者材料性质、作用荷载有突变的结构,采用分段函数更为适宜。

### (三)分析单元的力学特性

位移模式选定以后,就可以进行单元力学特性的分析了。其包括以下三部分内容。

(1)利用几何方程,由位移表达式(1-1)导出用结点位移表示单元应变的关系式:

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}^e \quad (1-2)$$

式中:  $\{\epsilon\}$  ——单元内任一点的应变列阵;

$[B]$  ——单元应变矩阵。

(2)利用本构方程,由应变的表达式(1-2)导出用结点位移表示单元应力的关系式:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e \quad (1-3)$$

式中:  $\{\sigma\}$  ——单元内任一点的应力列阵;

$[D]$  ——与单元材料有关的弹性矩阵。

(3)利用变分原理,建立作用于单元上的结点力和结点位移之间的关系式,即单元的平衡方程:

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (1-4)$$

式中:  $[k]^e$  称为单元刚度矩阵。用虚位移原理或变分原理可以导得:

$$[k]^e = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad (1-5)$$

式(1-5)的积分应遍及整个单元的体积。利用变分原理还同时导得等效结点力  $\{F\}^e$ 。

在以上三项中,导出单元刚度矩阵是单元特性分析的核心内容。

### (四)集合所有单元的刚度建立整个结构的平衡方程

所有单元的刚度集合过程包括两方面的内容:一是将各个单元的刚度矩阵,集合成整个物体的整体刚度矩阵;二是将作用于各单元的等效结点力列阵,集合成总的载荷列阵。最常用的集合刚度矩阵的方法是直接刚度法。一般来说,集合所依据的理由是要求所有相邻的单元在公共结点处的位移相等。于是,得到以整体刚度矩阵  $[K]$ 、载荷列阵  $\{F\}$  以及整个

结构的结点位移列阵  $\{\delta\}$  表示的整个结构的平衡方程组:

$$[K]\{\delta\} = \{F\} \quad (1-6)$$

这些方程还应对几何边界条件作适当的修改之后,才能够解出所有的未知结点位移。

#### (五) 求解未知结点位移和计算单元应力

由集合起来的平衡方程组(1-6),解出未知位移。在线性平衡问题中,可以根据方程组的具体特点选择合适的计算方法。

#### (六) 求得最后结果

可利用式(1-3)和已求出的结点位移来计算各单元的应力,并加以整理得出所要求的结果。

## 二、杆系结构有限单元法分析过程

对于杆系结构有限单元法,分析步骤具体为以下几步。

### (一) 结构离散化

把指定的杆系结构按适当的方式划分成若干杆件,每个杆件称为一个单元,用杆的轴线代表。各杆轴线之间的交点称为结点。按照自然数的顺序对所有结点和单元编号。全部未知结点位移是整个问题中的基本未知量。

### (二) 单元分析

建立单元刚度矩阵——联系单元结点力和结点位移之间关系的变换矩阵。每个杆件单元都可以看做是在其两端结点处切开并从结构中取出的一个分离体。作用在杆单元两端截面上的结构内力称为单元结点力。单元分析的主要目的是建立用未知的结点位移来确定单元结点力的表达式。

### (三) 整体分析

整体分析的主要任务有:①由单元刚度矩阵组装结构刚度矩阵;②求解结点平衡方程组,解出全部未知结点位移;③求得全部结点位移后,利用单元刚度矩阵计算各单元的内力。

对任一线弹性结构的分析,应同时满足以下条件:①平衡条件,结构的整体和任一单元必须保持静力平衡;②变形协调条件,结构位移除在各单元内部需满足变形协调条件外,整个结构上的各个节点也应同时满足变形协调条件,除此之外,还必须满足边界条件;③应力应变关系服从虎克定律。

整体分析的任务是按照静力平衡条件与变形协调条件把作为分离体的各个单元重新组集成一个完整的结构进行求解。

对于杆系结构分析的位移法而言,各杆之间仅在结点处相互连接。相交于某一结点的各杆件,它们的杆端位移可用上述同一结点的位移表示,因而位移连续条件自动得到满足。结点平衡方程组提供了确定全部未知结点位移的一组代数方程组。对于线弹性结构,这是一组对未知结点位移而言的代数方程组,即结构力学中的正则方程组。方程组中的系数矩阵为结构刚度矩阵,各系数为刚度影响系数。

## 第二节 平面杆件系统的有限单元法

在同一平面内的若干杆件以一定方式连接起来形成结构物,杆件截面的一个主轴以及

所承受的荷载也在该平面内,则此结构物通常称为平面杆件系统,如图 1-1 所示。

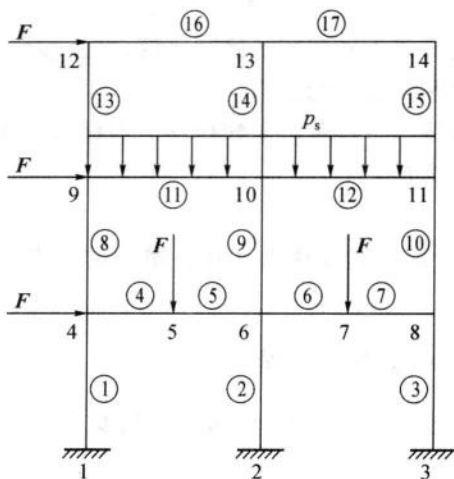


图 1-1 平面杆件系统及单元

杆件系统的有限单元法和结构力学中经典的位移法相比,并没有很大的区别,只是“基本结构”的选取有所不同。在有限单元法中,凡是杆系的交叉点、边界点、集中力作用点都应列为结点,而结点之间的杆件均可作为单元(见图 1-1)。也就是说,用单元代替了经典位移法中的“基本结构”。

## 一、单元分析

单元分析的任务是求出单元的刚度方程和单元刚度矩阵,也就是单元结点力与结点位移之间的关系。结构力学中的直杆转角位移方程实际上就是梁单元的刚度方程。

### (一)局部坐标系下的单元刚度矩阵

图 1-2 所示为平面刚架中的等截面直杆单元  $e$ 。设杆件除弯曲变形外,还有轴向变形。每个结点各有 3 个位移分量(2 个平移、1 个转动),单元共有 6 个杆端位移分量,这是平面结构杆件单元的一般情况。设杆长为  $l$ ,截面面积为  $A$ ,截面惯性矩为  $I$ ,材料弹性模量为  $E$ 。

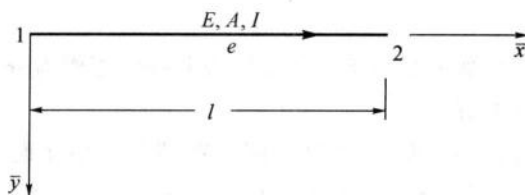


图 1-2 局部坐标系下的杆件单元

图 1-2 中采用坐标系  $\bar{x}\bar{y}$ ,其中  $\bar{x}$  轴与杆轴重合。这个坐标系称为单元坐标系或局部坐标系。在局部坐标系中,一般单元的每端各有 3 个位移分量  $\bar{u}$ 、 $\bar{v}$ 、 $\bar{\theta}$  和对应的三个力分量  $\bar{F}_x$ 、 $\bar{F}_y$ 、 $\bar{M}$ 。图 1-3 中的位移分量、力分量的方向为正方向。

局部坐标系下的单元刚度方程为:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \bar{\mathbf{k}}^e \bar{\mathbf{\Delta}}^e \quad (1-7)$$

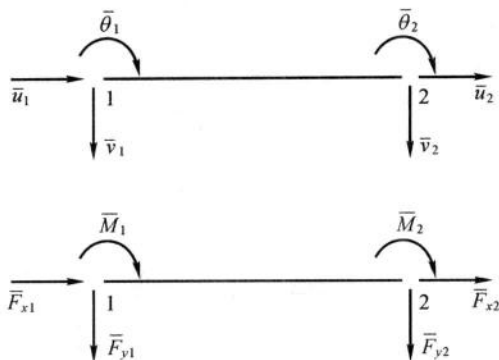


图 1-3 平面单元位移和力的正方向

其中,单元杆端力向量  $\bar{\mathbf{F}}^e$  为

$$\bar{\mathbf{F}}^e = (\bar{F}_{x1} \quad \bar{F}_{y1} \quad \bar{M}_1 \quad \bar{F}_{x2} \quad \bar{F}_{y2} \quad \bar{M}_2)^{eT} \quad (1-8)$$

单元杆端位移向量  $\bar{\mathbf{\Delta}}^e$  为

$$\bar{\mathbf{\Delta}}^e = (\bar{u}_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{\theta}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{\theta}_2)^{eT} \quad (1-9)$$

局部坐标系下的单元刚度矩阵  $[\bar{k}^e]$  为:

$$[\bar{k}^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \quad (1-10)$$

在计算连续梁时,通常忽略轴向变形,所以每个结点只有一个转角位移分量,平移动移分量为 0。此时,单元刚度方程可简化为:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix}^e \quad (1-11)$$

单元刚度矩阵为

$$[\bar{k}^e] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \quad (1-12)$$

在计算平面铰接杆单元时,每个结点只有两个平移动移分量,转角位移分量为 0。此时,单元刚度方程为:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}^e \quad (1-13)$$

单元刚度矩阵为:

$$[\bar{k}^e] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^e \quad (1-14)$$

在结构矩阵分析中,我们着眼于计算过程的程序化、标准化和自动化。因此,我们不去把各种非标准化的特殊单元刚度矩阵都罗列出来,以免头绪太多;而只采用一种标准化形式——一般单元的刚度矩阵(1-10),关于单元刚度矩阵的各种特殊形式将由计算机程序去自动形成。

### (二) 单元刚度矩阵的性质

(1) 单元刚度系数的意义。\$[\bar{k}^e]\$ 中的每个元素称为单元刚度系数,代表由单位杆端位移所引起的杆端力。如式(1-10)中的第 6 行第 3 列元素 \$\bar{k}\_{63}^e\$ (即元素 \$2EI/l\$) 代表当第 3 个杆端位移分量 \$\bar{\theta}\_1 = 1\$ 时引起的第 6 个杆端力分量 \$\bar{M}\_2\$。一般来说,第 \$i\$ 行第 \$j\$ 列元素 \$\bar{k}\_{ij}^e\$ 代表当第 \$j\$ 个杆端位移分量等于 1 (其他位移分量为零) 时所引起的第 \$i\$ 个杆端力分量的值。

(2) \$[\bar{k}^e]\$ 是对称矩阵。根据反力互等定理可以得出

$$\bar{k}_{ij}^e = \bar{k}_{ji}^e \quad (j \neq i) \quad (1-15)$$

(3) 一般单元的 \$[\bar{k}^e]\$ 是奇异矩阵,即:

$$|\bar{k}^e| = 0 \quad (1-16)$$

由此可知, \$[\bar{k}^e]\$ 不存在逆矩阵。也就是说,根据单元刚度方程(1-7),可以由杆端位移推算出杆端力的唯一解;但不能由杆端力反推出杆端位移。

### (三) 单元坐标转换矩阵

前面我们选用局部坐标系,以杆件轴线作为 \$\bar{x}\$ 轴,目的是希望导出的单元刚度矩阵具有最简单的形式。而在一个复杂的结构中,各个杆件的杆轴方向不尽相同,各自的局部坐标系也不尽相同,很不统一。为了便于进行整体分析,必须选用一个统一的公共坐标系,称为整体坐标系。为了区别,用 \$\bar{x}, \bar{y}\$ 表示局部坐标系,用 \$x, y\$ 表示整体坐标系。局部坐标系下的杆端力向量和杆端位移向量分别为 \$\bar{F}^e, \bar{\Delta}^e\$, 整体坐标系下的杆端力向量和杆端位移向量分别为 \$F^e, \Delta^e\$。

图 1-4(a) 所示为一单元 \$e\$, 其局部坐标系为 \$\bar{Ox}\bar{y}\$, 整体坐标系为 \$Oxy\$, 由 \$x\$ 轴到 \$\bar{x}\$ 轴的夹角 \$\alpha\$ 以顺时针转向为正。局部坐标系下的杆端力分量用 \$\bar{F}\_x^e, \bar{F}\_y^e, \bar{M}^e\$ 表示, 整体坐标系下的杆端力分量用 \$F\_x^e, F\_y^e, M^e\$ 表示, 如图 1-4(b) 所示。

所以, 以下关系式成立:

$$\bar{F}^e = TF^e \quad (1-17)$$

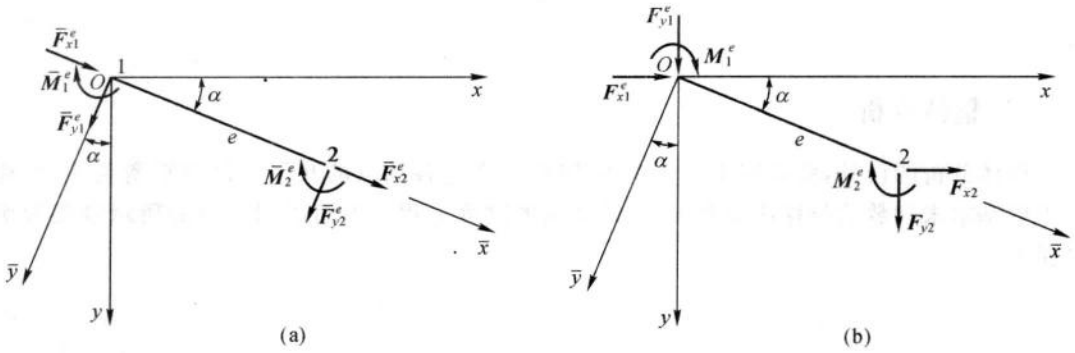


图 1-4 局部坐标系与整体坐标系

式中:  $T$  称为单元坐标转换矩阵。

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

可以证明,单元坐标转换矩阵  $T$  为一正交矩阵,即:

$$T^{-1} = T^T \quad (1-19)$$

或

$$TT^T = T^T T = I \quad (1-20)$$

式中:  $I$  为与  $T$  同阶的单位矩阵。

式(1-17)的逆变换为:

$$F^e = T^T \bar{F}^e \quad (1-21)$$

同理,可以求出单元杆端位移在两种坐标系中的转换关系,即:

$$\bar{\Delta}^e = T \Delta^e \quad (1-22)$$

$$\Delta^e = T^T \bar{\Delta}^e \quad (1-23)$$

#### (四)整体坐标系中的单元刚度矩阵

单元杆端力与杆端位移在整体坐标系中的关系式可写为:

$$F^e = k^e \Delta^e \quad (1-24)$$

其中,  $k^e$  称为在整体坐标系下的单元刚度矩阵,它与局部坐标系下的单元刚度矩阵之间的转换关系为:

$$k^e = T^T \bar{k}^e T \quad (1-25)$$

由于在以后的整体分析中,是对结构的每个结点分别建立平衡方程,因此为了以后讨论方便,可把式(1-24)按单元的始末端结点  $i, j$  进行分块,并写成如下形式:

$$\begin{Bmatrix} F_i^e \\ F_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii}^e & k_{ij}^e \\ k_{ji}^e & k_{jj}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i^e \\ \delta_j^e \end{Bmatrix} \quad (1-26)$$

展开后,即为:



$$\begin{aligned} F_i^e &= k_{ii}^e \delta_i^e + k_{ij}^e \delta_j^e \\ F_j^e &= k_{ji}^e \delta_i^e + k_{jj}^e \delta_j^e \end{aligned} \quad (1-27)$$

## 二、整体分析

整体分析的任务,就是在单元分析的基础上,考虑各结点的几何条件和平衡条件,以建立求解基本未知数的位移法典型方程,即结构的刚度方程。下面以图 1-5(a)所示刚架为例来说明。

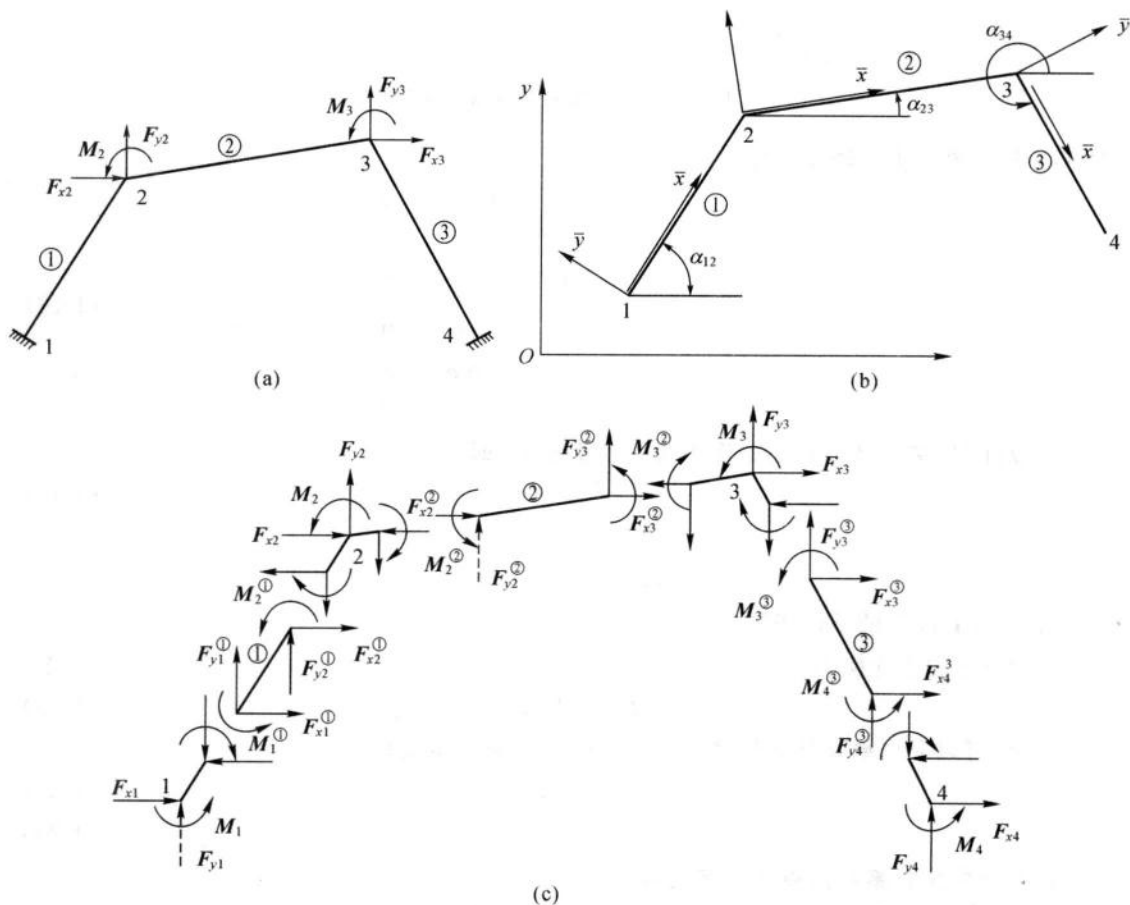


图 1-5 平面刚架单元图

由于在整体分析中将涉及许多单元及联结它们的结点,为了避免混淆,必须对各单元和结点进行编号,现用①,②,⋯表示单元号,用 1,2,⋯表示结点号,这里支座也视为结点。同时,选取结构坐标系和各单元的局部坐标系如图 1-5(b)所示。这样,各单元的始末两端  $i, j$  的结点号码将如表 1-1 所示。

表 1-1 各单元始末端的结点号码

单元	始末端节点号	
	<i>i</i>	<i>j</i>
①	1	2
②	2	3
③	3	4

各单元刚度矩阵的 4 个子块应该为：

$$\mathbf{k}^{(1)} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}^{(2)} = \begin{bmatrix} k_{22}^{(2)} & k_{23}^{(2)} \\ k_{32}^{(2)} & k_{33}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}^{(3)} = \begin{bmatrix} k_{33}^{(3)} & k_{34}^{(3)} \\ k_{43}^{(3)} & k_{44}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (1-28a)$$

在平面刚架中，每个结点可能有两个线位移和一个角位移。此刚架有 4 个结点，共有 12 个结点位移分量，按一定顺序将它们排成一列阵，称为结构的结点位移列向量，即：

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \end{Bmatrix}$$

其中

$$\Delta_1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \psi_1 \end{Bmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \psi_2 \end{Bmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \psi_3 \end{Bmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{Bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ \psi_4 \end{Bmatrix}$$

这里， $\Delta_i$  代表结点  $i$  的位移列向量； $u_i$ 、 $v_i$  和  $\psi_i$  分别为结点  $i$  沿结构坐标系  $x$ 、 $y$  轴的线位移和角位移，它们分别以沿  $x$ 、 $y$  轴的正向和逆时针方向为正。

设刚架上只有结点荷载作用（关于非结点荷载的处理见第四部分：等效结点荷载），与结点位移列向量相对应的结点外力（包括荷载和反力）列向量为：

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{P}_1 = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{Bmatrix} F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{P}_4 = \begin{Bmatrix} F_{x4} \\ F_{y4} \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

这里， $\mathbf{P}_i$  代表结点  $i$  的外力列向量； $F_{x_i}$ 、 $F_{y_i}$  和  $M_i$  分别为作用于结点  $i$  的沿  $x$ 、 $y$  方向的外力和外力偶，它们的正负号规定与相应的节点位移相同。在结点 2、3 处，结点外力  $\mathbf{P}_2$ 、 $\mathbf{P}_3$  就是结点荷载，它们通常是给定的。在支座 1、4 处，当无给定节点荷载作用时，结点外力  $\mathbf{P}_1$ 、 $\mathbf{P}_4$  就是支座反力（见图 1-5）；当支座处有给定节点荷载作用时，则  $\mathbf{P}_1$ 、 $\mathbf{P}_4$  应为结点荷载与支座反力的代数和。

下面考虑结构的平衡条件和变形连续条件。各单元和各节点的隔离体如图 1-5(c) 所示, 图中各单元上的杆端力都是沿结构坐标系的正向作用的。显然, 在前面的单元分析中, 已经保证了各单元本身的平衡和变形连续, 现在只需考察各单元连接处即结点处的平衡和变形连续条件。以结点 2 为例, 由平衡条件  $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$  和  $\sum M = 0$  可得:

$$\begin{cases} F_{x2} = F_{x2}^{\textcircled{1}} + F_{x2}^{\textcircled{2}} \\ F_{y2} = F_{y2}^{\textcircled{1}} + F_{y2}^{\textcircled{2}} \\ M_2 = M_2^{\textcircled{1}} + M_2^{\textcircled{2}} \end{cases}$$

写成矩阵形式有:

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x2}^{\textcircled{1}} \\ F_{y2}^{\textcircled{1}} \\ M_2^{\textcircled{1}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{x2}^{\textcircled{2}} \\ F_{y2}^{\textcircled{2}} \\ M_2^{\textcircled{2}} \end{Bmatrix}$$

上式左边即为结点 2 的荷载列向量  $\mathbf{P}_2$ , 右边二列阵则分别为单元 ① 和单元 ② 在 2 端的杆端力列向量  $\mathbf{F}_2^{\textcircled{1}}$  和  $\mathbf{F}_2^{\textcircled{2}}$ , 故上式可简写为:

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{F}_2^{\textcircled{1}} + \mathbf{F}_2^{\textcircled{2}} \quad (1-28b)$$

根据式(1-27), 上述杆端力列向量可用杆端位移列向量来表示:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_2^{\textcircled{1}} = k_{21}^{\textcircled{1}} \boldsymbol{\delta}_2^{\textcircled{1}} + k_{22}^{\textcircled{1}} \boldsymbol{\delta}_2^{\textcircled{1}} \\ \mathbf{F}_2^{\textcircled{2}} = k_{22}^{\textcircled{2}} \boldsymbol{\delta}_2^{\textcircled{2}} + k_{23}^{\textcircled{2}} \boldsymbol{\delta}_3^{\textcircled{2}} \end{cases} \quad (1-28c)$$

再根据结点处的变形连续条件, 应该有:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\delta}_2^{\textcircled{1}} = \boldsymbol{\delta}_2^{\textcircled{2}} = \boldsymbol{\Delta}_2 \\ \boldsymbol{\delta}_1^{\textcircled{1}} = \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\delta}_3^{\textcircled{2}} = \boldsymbol{\Delta}_3 \end{cases} \quad (1-28d)$$

将式(1-28c)和式(1-28d)代入式(1-28b), 则得到以结点位移表示的结点 2 的平衡方程:

$$\mathbf{P}_2 = k_{21}^{\textcircled{1}} \boldsymbol{\Delta}_1 + (k_{22}^{\textcircled{1}} + k_{22}^{\textcircled{2}}) \boldsymbol{\Delta}_2 + k_{23}^{\textcircled{2}} \boldsymbol{\Delta}_3 \quad (1-28e)$$

同理, 对于结点 1、3、4 都可以列出类似的方程。把 4 个结点的方程汇集在一起, 就有

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1 = k_{11}^{\textcircled{1}} \boldsymbol{\Delta}_1 + k_{12}^{\textcircled{1}} \boldsymbol{\Delta}_2 \\ \mathbf{P}_2 = k_{21}^{\textcircled{1}} \boldsymbol{\Delta}_1 + (k_{22}^{\textcircled{1}} + k_{22}^{\textcircled{2}}) \boldsymbol{\Delta}_2 + k_{23}^{\textcircled{2}} \boldsymbol{\Delta}_3 \\ \mathbf{P}_3 = k_{32}^{\textcircled{2}} \boldsymbol{\Delta}_2 + (k_{33}^{\textcircled{2}} + k_{33}^{\textcircled{3}}) \boldsymbol{\Delta}_3 + k_{34}^{\textcircled{3}} \boldsymbol{\Delta}_4 \\ \mathbf{P}_4 = k_{43}^{\textcircled{3}} \boldsymbol{\Delta}_3 + k_{44}^{\textcircled{3}} \boldsymbol{\Delta}_4 \end{cases} \quad (1-29)$$

写成矩阵形式则为: