全日制十年制学校

初中数学第六册

教学参考书

人民教育出版社

目 录

第四章　函数及其图象

Ⅰ. 目的要求

1. 要求学生了解函数的意义、函数的三种表示法和它们之间的关系.

2. 了解正比例函数、反比例函数、一次函数和二次函数的概念以及它们的一些性质. 能够作出它们的图象，并能从图象上观察出它们的一些性质.

3. 理解一次不等式组和一元二次不等式的概念，熟练掌握它们的解法. 了解二次函数、一元二次不等式及一元二次方程三者之间的联系.

4. 通过对常量、变量、函数等概念的学习，对学生进行辩证唯物主义思想的教育.

Ⅱ. 教材说明

学生在学习这一章教材以前，已经接触过许多常量、变量以及量与量之间的依存关系的实际例子. 例如，圆周长计算公式 $C=2\pi r$ 中的常量 2、π，变量 C、r 以及 C 与 r 间的关系，又如小学数学里的两个量的正比例关系与反比例关系，代数式的值与其中的字母所取的值之间的关系等等. 在第五册定义“三角函数”时，就已经使用了“函数”这一名词. 但那时并没有明确提出过常量、变量及函数等概念. 上面提到的这些知识都是学习这一章教材的基础. 教学时，教师应该从学过

的有关知识引出本章的概念．还应注意到，这一章里的函数概念只是描述性的，关于函数概念中的对应关系、定义域、值域及函数记号 $f(x)$ 等问题都没有明确提出来，要到高中第一册讲过集合与对应的基本知识后再予以补充提高．

本章教材共分五个单元，第一单元引进常量、变量、函数概念及其表示法．这一单元是本章的重点．对于函数概念，学生不易理解，因此，它也是一个难点．以后第二、三、四单元依次引进了正比例函数和反比例函数、一次函数、二次函数，分别对它们的图象和性质作了研究．最后一个单元学习一元一次不等式组和一元二次不等式的解法．在学习一元二次不等式的解法时，通过利用二次函数的图象、一元二次方程的判别式等又进一步把二次函数、一元二次不等式及一元二次方程这三者联系起来．本章教材的另一个难点是，解不等式和不等式组时怎样区别"不等式 A 和 B 同时成立"还是"不等式 A 或 B 成立．"

本章教学时间约需 28 课时，具体分配如下(仅供参考)：

4.1	函数	约 2 课时
4.2	函数关系的表示法	约 2 课时
4.3	正比例函数及其图象	约 2 课时
4.4	反比例函数及其图象	约 2 课时
4.5	一次函数	约 1 课时
4.6	一次函数的图象和性质	约 2 课时
4.7	二次函数	共约 2 课时
4.8	函数 $y=ax^2$ 的图象和性质	
4.9	函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和性质	约 2 课时

一 函 数

4.1 函数

1. 课本通过学生熟悉的两个例子引进在“某一过程中”“可以取不同数值的量”与“保持一定数值的量”，从而得出变量与常量两个概念.

2. 量，通常作为数学里的基本概念，不给定义. 为了度量量的大小，就要在同一类量中选定一个量作为标准(叫做度量单位)，来度量这一类的量. 度量的结果是抽象的数. 这个数说明被度量的量是度量单位的多少倍，它也叫作被度量的量的数值. 教材上说：“表示常量的数叫作常数”，这里所谓“表示常量的数”，就是指的通过度量所得到的数值.

一个量的数值连同度量单位在一起，通常又叫作“名数”. 因此，我们也把名数看作是这种或那种的量. 例如，2 公斤是一种重量，3 米是一种长度.

3. 常量与变量是对“某一研究过程”来说的，因而是相对的. 拿例(1)来说，是在给定了火车的速度为60公里/小时的前提下，来研究路程 s 与时间 t 的关系的，得到表达式 $s=60t$. 在这一研究过程中速度是常量，而路程 s 与时间 t 都是变量.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

假如路程给定了，如为2000公里，要研究速度 v 与时间 t 的关系，那么，就有 $vt=2000$ 或 $t=\frac{2000}{v}$. 在这一研究过程中，路程 s 是常量，而速度 v 与时间 t 又都是变量了. 又如，给定矩形面积是12平方厘米，研究底 x（厘米）和高 y（厘米）之间的关系时，得到 $xy=12$ 或 $y=\frac{12}{x}$. 在这一研究过程中，面积是常量，底 x 与高 y 都是变量. 假如给定矩形的高是10厘米，研究底 x（厘米）和面积 A（平方厘米）的关系时，那么，$A=10x$，这时高是常量，面积 A 与底 x 又是变量了.

其次，"在研究过程中保持一定数值的量"这一句话，也不可以绝对化. 例如，假定火车的速度是60公里/小时，这也只是以小时为单位的平均值. 由于火车进站、出站、上坡、下坡等情况不同，具体的瞬时速度并不相同，也不是不变的.

总之，在某一个研究过程中，涉及的量也可能很多，有的保持一定的数值，有的变化极小，可以看作不变. 这样的一些量都可以看作常量.

4. 课本是通过分析(1)—(4)共四个实例中两个变量之间的关系，然后引入函数概念的. 讲授这四个实例时，要着重分析两个变量中的一个在某一范围内取值，对于它的每一个值，另一个变量总有唯一的值和它对应. 这些都是针对具体的实例来说的. 如(1) $s=60t$ 中的 t 与 s；(2) $A=\pi r^2$ 中的 r 与 A；(3)的表中的 h 与 Q；(4)的图4-1中的 t 与 T. 经过这样四次反复强调，再提出函数的定义，学生就不会感到突然了.

前面曾说过，函数的定义在这里只是描述性的，对于函

数记号 $f(x)$ 以及定义域、值域这些概念都没有提出来. 建议教师不要超越教材，另作补充.

课本上函数的定义是:“设在某变化过程中有两个变量 x 和 y. 如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值，y 都有唯一确定的值和它对应，那么就把 y 叫做 x 的**函数**，x 叫做**自变量**.”就是说，这里所指的函数是单值函数. 应该注意的是，我们课本上讲的函数都是单值函数.

5. 对于“函数中自变量的取值范围”这一概念，建议向学生交待清楚: 如果是一个实际问题，如例(1)，表达火车以 60 公里/小时的速度行驶时，所走的路程 s 公里与时间 t 小时之间的关系，那么，$s=60t$ 中自变量的取值范围必须是 $t\geqslant0$. 但是，如果不管火车行驶这一实际内容，而把 $s=60t$ 作为一个一般的代数式来考察，那么自变量 t 的取值范围就不受 $t\geqslant0$ 这一限制了. 同样，在例(2)中，$A=\pi r^2$ 作为圆面积的计算公式，应有 $r>0$. 但如果作为一般的抽象的数学等式，那么，r 就不受 $r>0$ 的限制了. 因此，在确定函数中自变量的取值范围时，要根据具体情况来分析. 当函数是由一个代数式给定时，自变量可取的值就是那些不使代数式失去意义的自变量的值. 但对于一个有实际意义的函数，自变量可取的值就要根据实际意义来确定.

例如，$y=\sqrt{-(1+x)^2}$，自变量的取值范围是 $x=-1$，这时所对应的函数值是 0，即这个代数式只是在 $x=-1$ 时，才给出一个函数，$y=\sqrt{x-2}$ 是在 $x\geqslant2$ 的范围内才给出一个函数，而 $y=\sqrt{-(1+x^2)}$ 则根本不给出函数(在实数范围内).

4.2 函数关系的表示法

1. 这一节教材紧接着函数的概念，在教学中，一方面应该要求学生掌握函数的三种表示法；另一方面，通过函数表示法的教学，反过来又能使学生加深对函数概念的理解.

2. 函数的三种表示法各有优缺点. 解析法简单明了，通常能从解析式了解到整个变化过程中自变量与函数间的全部相依关系，因而适于作理论分析和推导计算. 但在求对应值时，需要经过逐个地计算，而有时这样的计算是很麻烦的.

列表法对于表中已有的自变量的每一个值，可以直接查到对应的函数值，无须作烦杂的计算，缺点是往往很难把自变量与函数间的全部对应值列出来，而且从表格中也不容易看出自变量与函数间的对应规律.

图象法非常直观，函数的变化情况及某些性质在图象上能够很直观地表示出来，一目了然，但它的缺点在于从图象上直接找自变量与函数的对应值时，不很精确.

正由于三种表示法各有其优缺点，所以通常总是结合使用，以充分利用它们的优点. 例如给出了函数$y=\frac{1}{8}x^3$. 从这个解析式固然可以看出这个函数的一些性质. 但是，作出了它的图象后，性质就更容易从图象上看出来. 而要作图象，先要从解析式通过计算求出它的部分自变量与函数的对应值，列成表，然后才能画出图象来.

下面 3、4 两点，供教师参考，不必向学生讲解.

3. 函数的表示法，除上面三种以外，有时我们也直接用语言叙述的方法来表示变量间的函数关系. 例如，“设 x 是有

理数时，函数 y 的值是 1，x 是无理数时，y 的值是零”。它可以这样表示：

$$y=f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

4. 还要指出的一点是，利用解析法表示函数时，有的函数不能只用一个解析式表示，而要用两个或多个解析式才能表示出来。看下面的例子。

例 1 在建立空气温度 T（摄氏度数）与高度 h（公里）的关系时，我们知道，离地面越高，气温越低。按照地球的中纬度地区平均大气状态，国际上规定了标准大气。根据这个规定，高度在 11 公里以下时，温度 T 与高度 h 的关系是：

$$T=15-6.5h.$$

高度不低于 11 公里但不超过 80 公里时，气温保持在 -56.5°C，在这一高度范围的大气层叫做同温层。因此，温度 T 与高度 h 的关系就不能只用一个解析式表达，而要分段表示，即

$$T=\begin{cases}15-6.5h, & 0\leqslant h<11,\\ -56.5, & 11\leqslant h\leqslant 80.\end{cases}$$

例 2

$$y=\begin{cases}x^2, & \text{当 } x\geqslant 0\text{ 时},\\ -x, & \text{当 } x<0\text{ 时}.\end{cases}$$

这个函数的图象如图 1 所示，这也是一个要用两个解析式来表示一个函数的例子。

5. 在说明函数的图象表示法时，教材上说：“把自变量 x 的一个值和函数 y 的对应值分别作为点的横坐标和纵坐标，可以作出一个点，所有这些点的集合就是这个函数的图象。”这一句话，可从两方面来理解。一方面，按上面方法作出的所

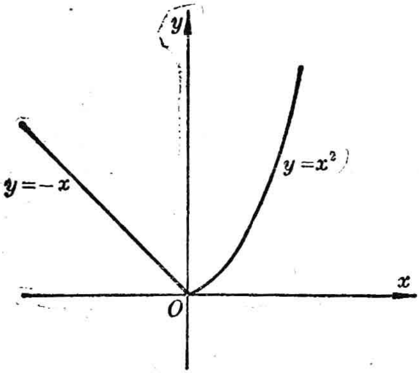

图 1

有的点的整体，就构成了这个函数的图象；另一方面，在图象上的每一个点的横坐标和纵坐标必然是这个函数的自变量 x 和函数 y 的一组对应值.

6. 在作图象时，要使学生注意教材上提出的："用一条或几条平滑曲线，按照自变量由小到大的顺序，把所描的点连结起来."所谓"平滑"，就是要根据所描出的各个点间的变化趋势，连成曲线．这样，从整体看，就是平滑的．如果不根据各点间的变化趋势连结，甚至把相邻两点连成线段，所得到的曲线就不平滑了.

【部分练习、习题提示及答案】

练习(第 4.1 节末)

2. (1) 自变量 x 的取值范围是 $x\geqslant5$;

(2) 自变量 x 的取值范围是不等于 4 的一切实数。

练习(第 4.2 节末)

1. (1) $T=6h$;

(2) $y=\frac{1500}{x}$.

习题一

1. (1) $y=3x-1$;

(2) $y=3(x-2)+1$.

2. (1) 全体实数;

(2) 不等于 2 的一切实数;

(3) 除 $-2, 3$ 以外的一切实数;

(4) 除 $\pm\frac{3}{2}$ 以外的一切实数;

(5) $x\geqslant\frac{5}{2}$;

(6) $x\geqslant-2$;

(7) $x\geqslant2$ 且 $x\neq5$;

(8) $x\leqslant1$, 且 $x\neq0$.

4.

x	3	-4	0	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	a^2+3
$y=\frac{2x+1}{x-2}$	7	$\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{6+5\sqrt{2}}{2}$	$\frac{2a^2+7}{a^2+1}$

5. 当 $x=0$ 时, $y=3$; 当 $x=2$ 时, $y=1$;

要使 $y=0$, 应有 $2x^2-5x+3=0$, 解这个一元二次方程得

$$x=\frac{3}{2}, \text{或 } x=1.$$

6. $V=1000+0.051T$.

当 $T=200°C$时, $V\doteq1010.2$ 立方厘米.

7. $y=180-2x$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook

角的度数 x 的取值范围是 $0<x<90$.

9. 将 $x=1$, $y=7$ 及 $x=2$, $y=16$ 分别代入 $y=ax+b$, 得到

$$\begin{cases}7=a+b,\\16=2a+b.\end{cases}$$

解得，$a=9, b=-2$.

故所求的函数是 $y=9x-2$.

10. 以 $x=0, y=12$ 及 $x=1, y=12.5$ 分别代入 $y=ax+b$, 得到

$$\begin{cases}12=b,\\12.5=a+b.\end{cases}$$

解得，$a=0.5$, $b=12$.

故得到的函数是

$$y=0.5x+12.$$

把表中其余的对应数据依次代入，都得到满足，因此，原来的假定是对的.

这里第 9 题与第 10 题所使用的方法称为待定系数法. 当我们已经知道自变量与它的函数间的某些对应值，但并不知道它们之间的解析表达式时，为了求出这个函数的解析表达式，就可以使用待定系数法. 先根据题目所给的条件假定这个函数关系的形式(在第 9 题的题意中已给出 $y=ax+b$ 的形式，第 10 题是假定它是 $y=ax+b$ 的形式)，再把已知数据代入，求出其中的系数 (第 9 题与第 10 题都是 a、b). 这是一种很重要的方法，应用非常广泛.

二　正比例和反比例函数

4.3　正比例函数及其图象

1. 正比例函数是小学数学中的正比例关系的概念的推广. 教学中应当联系已学过的关于正比例的知识，说明正比例函数和正比例关系之间的联系.

教学中要求学生能掌握好正比例函数的概念及其图象和性质.

2. 在小学数学里，所谓两个量成正比例关系，是指相互联系的两个量中的一个扩大到原来的几倍（或缩小到原来的几分之一），那么，另一个量也扩大到相同的倍数（或缩小到相同的分数），而正比例函数 $y=kx$ 就是上述成正比例关系的概念的推广. 可以这样来看:

（1）假设有任意的相互联系的两个量，当第一个量为 1 时，另一个量相应地为 $k(k\neq 0)$，第一个量为 x 时，另一个量相应地为 y. 如果它们是成正比例，那么，由这些给定的值就可以得到比例式:

$$1:x=k:y,$$

从而

$$y=kx.$$

这就证明了成正比例的两个量 x、y 之间必然有 $y=kx$ 的关系.

反之，如果有相互联系的两个量 x、y 之间满足关系

$$y=kx,$$

那么，可以得到比例式:

$$1:x=k:y.$$

这就证明了满足关系 $y=kx$ 的两个量，它们的任意两组对应值总是成正比例的.

(2) 中学数学里讨论一个抽象的正比例函数是在实数范围里讨论的，因此，x、y 及 k 都可以为正或负. 在上面的证明中，如果把 y、x 与 k 限制为正有理数，那么，就可以说，小学所学的正比例关系的概念与正比例函数概念是一样的.

3. 教学中，建议先复习小学学过的成正比例关系的概念，然后象教材那样用一些日常生活中或学生熟悉的例子引入正比例函数概念. 待学生真正理解了正比例函数概念以后，再引导学生把正比例函数与正比例关系作比较.

4. 在作 $y=3x$ 的图象时，教材上列出了较多的对应点. 通过实际描点、作图，发现图象是一条直线. 为了得到这个结论，就要求描点作图精确一些.

得出 $y=3x$ 的图象是一条直线这一结论后，就把这个结论推广到别的正比例函数. 由于两点决定一条直线，列对应值表时就无需计算很多的点，只要两点就行了. 这样，就得出了一般的结论：正比例函数 $y=kx$ 的图象是经过两点 $(0,0)$ 及 $(1,k)$ 的一条直线.

5. 本节末正比例函数的性质也是通过观察、归纳得出的. 事实上，这里的 k，就是直线 $y=kx$ 的斜率(这个概念在后面第五章提出). 当 $|k|$ 越大时，直线越离开 x 轴；$|k|$ 越小时，直线越靠近 x 轴. 当学生在后面学了第五章“直线”时，就会更清楚.

4.4 反比例函数及其图象

1. 我们知道，相互联系的两个量中如果第一个扩

大到原来的几倍，那么，另一个就缩小到原来的几分之一，反过来，如果第一个缩小到原来的几分之一，而另一个却扩大到原来的几倍，这样的两个量就叫做成反比例关系．反比例函数概念就是反比例关系的推广，两者的关系是这样的：

（1）设成反比例关系的两个量中的第一个量等于1时，第二个量相应地等于k，而第一个量等于x的时候，第二个量相应地等于y，那么，我们就有比例式

$$1:x=y:k,$$

因此，有

$$xy=k \text{ 或 } y=\frac{k}{x}$$

的关系．

反过来，如果相互联系的两个量x、y满足关系$y=\frac{k}{x}$，那么，可以得到比例式

$$1:x=y:k.$$

就是说，满足关系$y=\frac{k}{x}$的两个量x、y是成反比例关系的．

（2）中学里的反比例函数是在实数范围里讨论的，因此，$y=\frac{k}{x}$中，x、y与k都可为正或负．如果在上面的讨论中把x、y与k都限制为正有理数，那么，反比例函数概念就与小学所学的反比例关系的概念是一样的了．

由此，我们说反比例函数概念是反比例关系的推广．

2．教学中，建议先复习小学学过的反比例关系的概念，然后按课本上那样，用一些日常生活中或学生熟悉的例子引

入反比例函数的概念，让学生理解反比例函数概念以后，再引导学生把反比例函数概念与反比例关系概念作比较.

3. 反比例函数的图象，课本上首先通过列表、描点，作出 $y=\frac{6}{x}$ 的图象，先得到第一象限的一支，再得到第三象限的另一支. 在作出了图象以后，建议再引导学生观察 $y=\frac{6}{x}$ 的图象的特点，它们必然在第一、三象限，这是因为 x、y 总是同号.

4. 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的两点性质，也是对前面所作反比例函数的讨论的一个归纳和总结. 教学时，可以引导学生由观察函数的图象得出性质.

【部分练习、习题提示及答案】

练习(第 4.3 节末)

1. (1) $y=-8x$ 是正比例函数，因为它是 $y=kx(k\neq 0)$ 的形式，这里 $k=-8$.

   (2)、(3)、(4)都不是正比例函数. 因为它们不是 $y=kx(k\neq 0)$ 的形式.

2. (1) $C=2\pi r$，C 是 r 的正比例函数，这里 $k=2\pi$;

   (2) $A=\pi r^2$，A 不是 r 的正比例函数.

3. 令 $y=kx$. 将 $x=2$、$y=15$ 代入，得比例系数 $k=\frac{15}{2}$.

故所求的函数是 $y=\frac{15}{2}x$.

练习(第 4.4 节末)

1. (1) 令时间为 t，路程为 s，速度为 v，则 $s=vt$.

当 t 一定时, s 与 v 不是反比例函数关系.

(2) 当 $s\ (s\neq 0)$ 一定时, $t=\frac{s}{v}$, 这时 t 与 v 是反比例函数关系.

2. (1) 令 $y=\frac{k}{x}$, 已知当 $x=3$ 时, $y=7$, 即

$7=\frac{k}{3}$, $\therefore$ $k=21$, 所求的函数关系是 $y=\frac{21}{x}$.

(2) 在 $y=\frac{21}{x}$ 中, 当 $x=2\frac{1}{3}$ 时, $y=\frac{21}{\frac{7}{3}}=9$.

(3) 在 $y=\frac{21}{x}$ 中, 当 $y=3$ 时, $x=7$.

习题二

1. 是正比例函数关系的有: (1)、(4)、(6)、(10);
   是反比例函数关系的有: (2)、(3)、(7)、(9);
   既不是正比例函数关系又不是反比例函数关系的有: (5)、(8).

2. 令 $y=kx$, 将 $x=8$, $y=6$ 代入, 得 $k=\frac{3}{4}$.

$\therefore$
$$y=\frac{3}{4}x.$$

因此, 当 $x=3$ 和 $x=-9$ 时, 分别得

$$y=\frac{9}{4} \text{ 和 } y=-\frac{27}{4}.$$

3. 令 $y=k\sqrt[3]{x}$.

以 $x=8$, $y=16$ 代入, 得 $k=8$,

试读结束: 需要全本请在线购买: www.ertongbook