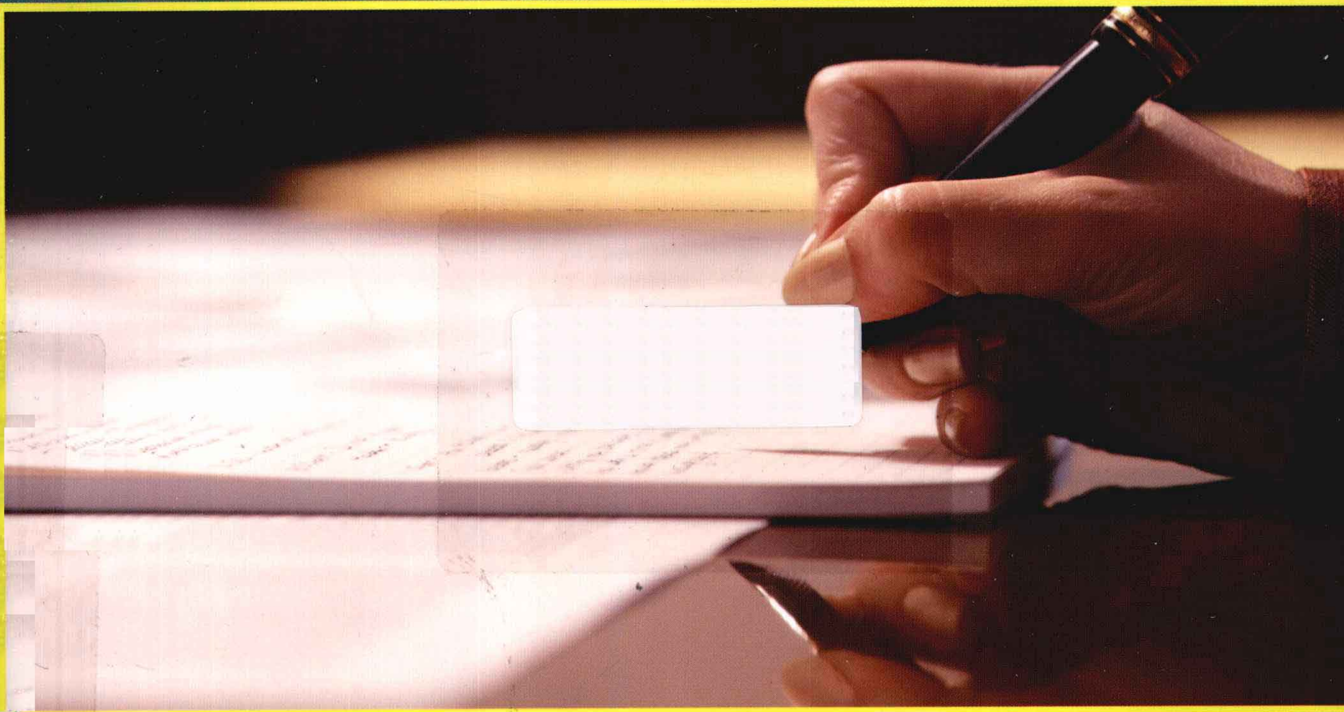
普通高等教育“十一五”国家级规划教材

运筹学实用教程

（第三版）

宁宣熙　编著



科学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

运筹学实用教程

（第三版）

宁宣熙　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为普通高等教育"十一五"国家级规划教材，是作者在教授运筹学课程20余年的经验基础上撰写的一本教材，内容包括了运筹学的主要分支。书中重点介绍了各分支数学模型的基本概念和实用算法，并列举实例来说明建模方法和求解步骤，其中包括作者在教学研究中提出的若干已经证明有效的改进算法。

本书写法简明扼要、通俗易懂，可作为高等院校管理工程、信息管理、工商管理、财经等有关专业的教材及管理干部培训用书，也可作为政府部门和企事业单位管理干部、工程技术人员和理工科学生学习现代管理方法和优化方法的自学参考书。

本书配备多媒体教学课件和习题参考答案，可供选用本书的教师参考。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学实用教程/宁宣熙编著.—3版.—北京：科学出版社，2013
普通高等教育"十一五"国家级规划教材
ISBN 978-7-03-037528-5

Ⅰ.①运… Ⅱ.①宁… Ⅲ.①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第106457号

责任编辑：兰 鹏/责任校对：李 影
责任印制：徐晓晨/封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

化学工业出版社印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002年8月第一版 开本：787×1092 1/16
2007年4月第二版 印张：16
2013年6月第三版 字数：380 000
2013年6月第十六次印刷
定价：33.00元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

第三版序言

《运筹学实用教程》是一本以普通高等院校经济管理类专业学生为主要教学对象的教科书，出版十余年来受到了老师、学生和自学者的好评与欢迎。借本书第三版出版之际，谨向支持本书出版的广大读者表示衷心的感谢。

在第三版中做了如下的补充修改：

(1)第五章中增加了与贝叶斯分析方法相关的章节，以便扩大学生在决策方面的知识面和实用方法。

(2)由朱金福老师制作了教学课件，并放在网上方便大家使用。

(3)在原来本书后面习题的基础上，由吴薇薇老师担任主编，重新编写了《运筹学实用教程习题与解答》，并与本书第三版同步公开出版发行。该习题集对学生更好地掌握课堂教学主要内容、重点和示范解题方法都会有很大的帮助。

宁宣熙

2013 年 3 月

第二版序言

本书的第一版自2002年8月出版发行以来，以其简明、易学、实用为特色，受到了广大读者的欢迎，并被遴选为普通高等院校"十一五"国家级规划教材，使编者深受鼓舞。记得1984年接待美国一个由很多著名专家组成的运筹学代表团时，他们在讲学和交流中，反复强调运筹学是一门实用科学，为了能让管理者乐于在实践中去应用它，首先要用浅显易懂的方式和语言使管理者了解它、熟悉它、掌握它。20余年来，编者一直以此为宗旨，从事运筹学和系统工程的教学和普及工作，得到了广大学生们的认可和欢迎。本书正是这些年来教学的成果。

据不完全统计，到目前为止，已出版的有关运筹学的教科书已不下数百种，它们各有特色，适用于各种不同的教学层次。对于以应用为目标的高等院校管理科学与工程、经济管理类专业的本科生和各类管理干部进修班的学员来说，最重要的是通过本门课程的学习，培养一种系统解决问题的思路和方法、运用模型研究问题的习惯以及掌握如何建模与求解的技术和技巧。为此，在撰写本书时，特别注意深入浅出地讲解各种模型的基本概念，求解的基本思路和模型的应用范围，尽力避免纯粹数学上的推导与证明，讲究用实例去说明各种模型抽象出的实质内容，并给出模型的各种典型实例，以供学生通过"照猫画虎"，来熟悉和掌握建模求解的思路和方法。实践表明，这种写作方法不仅可以使初学者易于入门，也便于读者自学掌握运筹学的基本内容和应用方法。

借助入选为"十一五"国家级规划教材的机会，对本书的第一版进行了适当的修订。为了更能满足这一层次教学的需求，修订前征求了部分使用过第一版教材老师的意见。在他们热情的支持和帮助下，第二版在内容的增删、论述的严谨以及文字打印错误的订正等方面都做了很大改进，这将使新版教材会更加系统、简明和实用。在此谨向这些老师表示衷心的感谢。他们是：党耀国、朱金福、李帮义、方志耕、代逸生、顾平、盛永祥、崔家保、成桂芳、茅中飞、杜斌等老师。此外，吴薇薇老师在编辑和整理习题及其解答工作中做了大量工作，在此也向她致以谢意。遗憾的是，鉴于时间、信息和地理上的不便，编者不能向其他使用过第一版教材的老师们求教，待日后有机会再行弥补吧。期望在大家的共同努力下，这本书能在传播运筹学的基础知识上发挥更大的作用。

本书的第二版，除保持原有内容外，根据部分老师的意见又增加了以下内容：

(1)第一章增加了整数规划的基本概念，并简明介绍了求解的分支定界法。

(2)第三章增加了动态规划的三个基本应用模型，并给出它们的算例详解。

(3)第四章增加了图模型的基本应用例解，图的矩阵表示法和路径问题。

(4)增加了重点章节的习题等。

本书的出版一直得到江苏省系统工程学会、南京航空航天大学、江苏科技大学和南京正德职业技术学院的大力支持，在此对他们表示衷心的感谢！

宁宣熙

2007年1月

第一版序言

一、运筹学的发展简史

运筹学的起源可以追溯到很多世纪以前，随着社会经济活动的日益频繁和企业组织规模的不断扩大，当人们企图应用科学的方法去管理日益复杂的经济活动和企业组织时，应当说就已经具有了古朴的运筹学思想了。但真正把它称为运筹学，一般都认为是在第二次世界大战初期。当时的一个迫切任务是如何把极其紧缺的资源更有效地应用于军事活动中。因此军事部门集中了一大批各科门类的科学家用科学的方法处理各种军事战略和战术上的问题。其中英国比美国早参战两年，因此第一批进行军事“作业研究”或“运作分析”的研究小组就在英国诞生了。其中著名的“布莱克特混合小组”就是由曼彻斯特大学教授 P.M.S. 布莱克特领导的英国有名的运筹学小组。它由三位生理学家、两位数学物理学家、一位天体物理学家、一位陆军军官、一位测量员、一位普通物理学家和两位数学家组成，当时被称为布莱克特“马戏团”。1942 年在美国也出现了类似的研究组织。这些研究小组在建立英国有效的空防预警系统、反潜战中深水炸弹的效能研究、护航舰队保护商船队的编队等问题上都起了十分重要的作用，对英美等国赢得英伦三岛空战、太平洋岛战以及北大西洋战争的胜利都做出了重要贡献。

第二次世界大战后，世界经济不断走向新的繁荣，于是人们开始把在二战中发挥过重大作用的运筹学迅速地应用到经济领域。很多从事军事运筹学研究的科学家转向工业和经济发展等新的领域。这一时期，出现了很多重要的运筹学成果，如 1947 年丹捷格(G.B.Dantzig)提出的线性规划等。到 20 世纪 50 年代末，很多标准的运筹学方法，如动态规划、排队论、存储论等都已发展得基本成熟。

促进这一时期运筹学蓬勃发展的另一因素是计算机的发展。因为运筹学中很多复杂问题需要大量的计算，在很多情况下，这些计算用手工进行处理是根本不可能的。因此，能够快速处理大量计算任务的电子模拟计算机的出现和发展，就大大帮了运筹学的忙，促进了运筹学的迅速成长和发展。

运筹学引进中国是 20 世纪 50 年代中期由钱学森等教授首倡的，后来一大批中国学者在推广运筹学及其应用中做了大量工作，并取得了很大成绩，同时也发表了不少专著和论文，在世界上也产生了一定的影响。

目前，经过 50 多年的发展，运筹学已成为一个门类齐全、理论完善、有着重要应用前景的新兴学科。

二、什么是运筹学

回答这个问题一般采用给出定义的方法。根据不同的学术组织从不同角度给出的定义，可以对运筹学有一个比较全面的认识。

大不列颠运筹学会给出的定义是:“运筹学是运用科学的方法,解决工业、商业、政府和国防事业中,由人、机器、材料、资金等构成的大型系统管理中所出现的复杂问题的一门学科。它的一个显著特点是科学地建立系统模型和对机会与风险的评价体系去预测和比较不同的决策策略与控制方法的结果。其目的是帮助管理者科学地确定他的政策和行动。”

美国运筹学会给出的定义更简单,但含义基本相同:“运筹学是一门在紧缺资源的情况下,如何设计与运行一个人—机系统的决策科学。”

莫斯(P.M.Morse)和金博尔(G.E.Kimball)曾对运筹学下过这样的定义:“为决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时,提供以数量化为基础的科学方法。”

在其他教科书中还有下面一些定义:如“运筹学是一门应用科学,它广泛应用现有的科学技术知识和数学方法,解决实际中提出的专门问题,为决策者选择最优决策提供定量依据。”等。

从这些定义不难看出,运筹学具有下面几个明显的特点:

(1)它是以研究事物内在规律,探求把事情办得更好的一门事理科学。

(2)它是在有限资源条件下,研究人—机系统各种资源利用最优化的一种科学方法。

(3)它是通过建立所研究系统的数学模型,进行定量分析的一种分析方法。

(4)它是多学科交叉的解决系统总体优化的系统方法。

(5)它是解决复杂系统活动与组织管理中出现的实际问题的一种应用理论与方法。

(6)它是评价比较决策方案优劣的一种数量化决策方法。

总之,科学性、综合性、系统性和实践性是运筹学这门学科的四大特点。当然,运筹学也有它的弱点。其主要问题是,在建立数学模型时,为了能够进行数学上的处理,常常要对实际情况进行简化或假设。因此,如果这种简化稍有过分,就会使模型偏离实际,而失去它的实用价值。

三、运筹学与系统工程

随着人类的各种活动日益变得多样化、复杂化和高级化,为了实现人类的某一目标,不是一个人或少数几个人能够完成的,往往需要大量的人、设备、资源等的高度组织和配合。这种组织的集合体就是实现某一特定目标的人造系统或复合系统。在这样的系统中,包含着人和物的多层次复杂关系,它们之间相互作用、相互影响、相互制约。如果把它们机械地凑合在一起,系统只能是个别事物的集合,丧失应有的功能而成为一堆废物。如果把它们有机地组合起来,协调它们之间的关系,使系统中各元素各部分不仅完成本身应担负的任务,还与其他元素和部分最有效地配合,以最优的方式达到整个系统的目标。“系统工程学就是为了研究多个子系统构成的整体系统所具有的多种不同目标的相互协调,以期系统功能的最优化、最大限度地发挥系统组成部分的能力而发展起来的一门科学。”所以它是一种设计、规划、建立一个最优化系统的科学方法,是一种为了有效地运用系统而采取的各种组织管理技术的总称。

早在2000年前,系统工程的思想就已经在埃及的金字塔、中国的都江堰水利工程等的实施中有所体现。但近代的系统工程应当说是在19世纪初起源于美国,如麻省理工学院的布什(V.Bush)教授在研制机械式微分器时,就把系统工程作为分析的工具。美国贝尔电话

公司应用得更早，并在1940年正式采用了系统工程的名称。他们在发展美国微波通讯网时应用了一套系统工程的方法论，并取得了良好的效果。特别是在二次世界大战期间出现的运筹学，为系统工程奠定了理论基础，提供了解决实际问题的有效方法。

实施系统工程的一般程序和步骤如下：

(1)问题定义：通过全面收集有关资料和数据，提出所要解决的问题，弄清问题的实质。

(2)评价系统设计：提出为解决问题所应达到的目标，并按照预期的目标提出应采取的政策、行动和控制方法，制定考核目标完成程度的评价标准。

(3)系统综合：将能够达到目标的政策、行动和控制方法综合成整个系统的概念，形成方案。

(4)系统分析：通过建立模型对系统方案进行分析，研究各种参数、行动方案的变化对达到系统目标所产生的影响。

(5)最优化：精心选择系统参数和行动方案的最佳配合，找到达到系统目标最优的方案。

(6)作决策：进行系统开发。

(7)计划实施：将选定的最优方案付诸实施，并在实践中不断修改。

从系统工程的发展简史和它解决问题的思路与步骤，可以看出运筹学与系统工程的关系极为密切，它是系统工程的主要理论基础。难怪早期的有关系统工程理论的教科书很多都以教授运筹学理论为其主要内容。尽管20世纪90年代以后，系统工程中结构化模型技术、系统分析、系统评价、系统仿真等技术已发展得比较成熟而自成体系，但运筹学的各个分支如数学规划、网络分析、存储论、排队论、决策论、对策论等仍然是处理系统优化的主要技术手段。

四、运筹学的主要分支

运筹学是由解决不同领域优化问题的理论与方法构成的，其主要分支有：

(1)规划论：是运筹学的一个主要分支，它包括线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划等。它是在满足给定约束要求下，按一个或多个目标来寻找最优方案的数学方法。它的适用领域十分广泛，在工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策中都可以发挥作用。

(2)图论与网络分析：图是研究离散事物之间关系的一种分析模型，它具有形象化的特点，因此，比单用数学模型更容易为人们所理解。由于求解网络模型已有成熟的特殊解法，它在解决交通网、管道网、通讯网等的优化问题上具有明显的优势，因此，其应用领域也在不断扩大。最小生成树问题、最短路问题、最大流、最小费用流问题、中国邮递员问题、旅行推销员问题、网络计划都是网络分析中的重要组成部分，而且应用也很广泛。

(3)排队论：是一种研究公共服务系统的运行与优化的数学理论与方法。它通过对随机服务现象的统计研究，找出反映这些随机现象的平均特性，从而研究提高服务系统水平和工作效率的方法。

(4)决策论：是为了科学地解决带有不确定性和风险性决策问题所发展的一套系统分析方法，其目的是为了提高科学决策的水平，减少决策失误的风险。它广泛地应用在经营管理工作的中高层决策中。

(5)存储论：又称库存论，是研究经营生产中各种物资应当在什么时间，以多少数量来补充库存，才能使库存和采购的总费用最小的一门学科。它在提高系统工作效率、降低产品成本上有重要作用。

(6)对策论：又称博弈论，是一种研究在竞争环境下决策者行为的数学方法。在社会政治、经济、军事活动中，以及日常生活中都有很多竞争或斗争性质的场合与现象。在这种形势下，竞争双方为了达到自己的利益和目标，都必须考虑对方可能采取的各种可能的行动方案，然后选取一种对自己最有利的行动方案。对策论就是研究双方是否都有最合乎理性的行动方案，以及如何确定合理行动方案的理论与方法。

此外运筹学还包括模拟论、可靠性理论、多目标规划、随机规划、组合优化等。近些年来又提出冲突分析，可以说运筹学的研究也出现了定量分析与定性分析相结合的发展趋势。

本书的主要任务是对现在的和未来的管理人才普及与推广运筹学的基本思想、理论和方法，并以把这些理论与方法能够应用于实践为主要目标。因此，全书内容以基本理论与方法为主，讲解由浅入深，通俗易懂，尽量避免烦琐的理论证明与推导。很多算法以实例为引导，便于自学和理解。本书可以作为普通高校经济管理类专业本科生教材，做适当的取舍，也可以作为高等专科院校、企业管理干部培训和自学的教材或参考书。

目　　录

第一章

线性规划的基本理论及其应用

第一节　线性规划的数学模型及其标准形式

一、线性规划问题的数学模型

在生产实践和日常生活中，经常会遇到规划问题。所谓规划问题，简单地说，是指如何最合理地利用有限的资源（如资金、劳力、材料、机器、时间等），以便使产出的消耗最小，利润最大。如果利用数学方法来进行这种分析，这就是数学规划。当所建立的模型，都是线性代数方程时，这就是一个线性规划问题。这样的例子在管理和生产的实践中是很多的，我们现举一些例子来加以说明。

【例 1-1】　产品决策问题：某汽车工厂生产大轿车和载重汽车两种型号的汽车，已知生产每辆汽车所用的钢材都是 2 吨/辆，该工厂每年供应的钢材为 1 600 吨；工厂的生产能力是每 2.5 小时可生产一辆载重汽车，每 5 小时可生产一辆大轿车，工厂全年的有效工时为 2 500 小时；已知供应给该厂大轿车用的座椅每年可装配 400 辆。据市场调查，出售一辆大轿车可获利 4 千元，出售一辆载重汽车可获利3 千元。问在这些条件下，工厂应如何安排生产才能使工厂获利最大？

解：这是一个典型的线性规划问题，现建立数学模型如下：

设：x_1 为生产大轿车的数量（辆），

　　x_2 为生产载重汽车的数量（辆）。

全年的利润值 $Z=4x_1+3x_2$（千元）

我们的目标是使利润越大越好，所以这个函数我们称之为目标函数。

约束条件是：

原材料的限制	$2x_1+2x_2\leqslant 1\,600$
工时的限制	$5x_1+2.5x_2\leqslant 2\,500$
大轿车用座椅的限制	$x_1\leqslant 400$
非负限制	$x_1\geqslant 0$；$x_2\geqslant 0$

于是我们的这个例题可以用数学模型表达如下：

目标函数 $\max Z=4x_1+3x_2$

约束条件

$$\begin{cases}2x_1+2x_2\leqslant 1\ 600\\5x_1+2.5x_2\leqslant 2\ 500\\x_1\leqslant 400\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{1-1}$$

【例 1-2】 广告方法的选择问题：某公司要求销售部经理制定一个广告计划，计划用经费 10 000 元，要求尽量多的人能看到广告。该经理选择了三种广告方法：电视、广播电台和报纸。据调查各种广告的费用如下：在地方电视台下午播放 1.5 分钟要 1 000 元，晚上要 2 000 元。该经理决定在电视上做广告至少两次，但不多于四次。在地方报纸上作半页广告费用是 300 元，一页要 1 000 元。在广播电台上做广告的价格是，白天每半分钟 600 元，晚上每半分钟 400 元。公司限制用电台做广告的次数，白天最多不超过 5 次，晚上不超过 3 次。

根据该经理所获得的资料估计，在下午观看电视广告节目的大约有 40 000 人，晚上有 90 000 人。看日报的大约有 60 000 人，并估计其中 1/2 的人看整页的广告，1/3 的人看半页的广告。广播电台的听众白天有 40 000 人，晚上有 30 000 人。

解：现建立数学模型如下：

设： x_{TA}——在下午用电视做广告的次数

x_{TE}——在晚上用电视做广告的次数

x_{RA}——在白天用电台做广告的次数

x_{RE}——在晚上用电台做广告的次数

x_{NH}——在报纸上登半页广告的数目

x_{NF}——在报纸上登整页广告的数目

其目标要求是尽量多的人能看到广告的宣传，所以目标函数是：

$$\max Z=40\ 000x_{TA}+90\ 000x_{TE}+40\ 000x_{RA}+30\ 000x_{RE}+20\ 000x_{NH}+30\ 000x_{NF}$$

受到的约束条件是：

$$\begin{cases}1\ 000x_{TA}+2\ 000x_{TE}+600x_{RA}+400x_{RE}+300x_{NH}+1\ 000x_{NF}\leqslant 10\ 000\\x_{TA}+x_{TE}\geqslant 2\\x_{TA}+x_{TE}\leqslant 4\\x_{RA}\leqslant 5\\x_{RE}\leqslant 3\\x_{TA},x_{TE},x_{RA},x_{RE},x_{NH},x_{NF}\geqslant 0\end{cases}\tag{1-2}$$

【例 1-3】 配料问题：某奶牛场面临着选择两种饲料问题，每种饲料所含的营养成分及价格如表 1-1 所示。

表 1-1

营养成分 \ 饲料	甲(斤)*	乙(斤)
A(单位/斤)	4	2
B(单位/斤)	1	2
C(单位/斤)	1	4
价格(元/斤)	0.15	0.22

* 斤为非法定单位,1 斤=0.5 公斤

已知每头奶牛每天需要三种营养的最低数量是 A=20 单位,B=14 单位,C=16 单位,问如何找一个最经济的配方,以满足奶牛每天的最低营养量。

解:建立其数学模型如下:

设: x_1——甲种饲料所需斤数

x_2——乙种饲料所需斤数

目标函数　　$\min Z=0.15x_1+0.22x_2$

约束条件

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2\geqslant 20 \\ x_1+2x_2\geqslant 14 \\ x_1+4x_2\geqslant 16 \\ x_1\geqslant 0,\quad x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-3}$$

如果在每种饲料中都含有一种有害的成分 D,甲饲料每斤含 D 0.1 个单位,乙饲料每斤含 D 0.05 个单位。而奶牛每日食用 D 成分不得大于 1 个单位,于是我们又增加了一个约束条件

$$0.1x_1+0.05x_2\leqslant 1$$

则上面的线性规划问题变成

目标函数　　$\min Z=0.15x_1+0.22x_2$

约束条件

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2\geqslant 20 \\ x_1+2x_2\geqslant 14 \\ x_1+4x_2\geqslant 16 \\ 0.1x_1+0.05x_2\leqslant 1 \\ x_1,x_2\geqslant 0 \end{cases} \tag{1-4}$$

【例 1-4】 下料问题:某工厂要做 100 套钢架,每套由长 2.9 米,2.1 米和 1.5 米的圆钢各一根组成,已知原料长 7.4 米,问应如何下料使需用的原材料最省。

解:最简单的方法是从每根长 7.4 米的料上各截一根 2.9 米、2.1 米、1.5 米的圆钢,还余 0.9 米。这样共需 100 根原料,余料头 0.9×100=90(米)。

现考虑合理套裁,方法见表 1-2。

表 1-2

下料数(根) 方案 / 长度(米)	一	二	三	四	五
2.9	1	2		1	
2.1			2	2	1
1.5	3	1	2		3
合　计(米)	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头长(米)	0	0.1	0.2	0.3	0.8

建立数学模型如下：

设：按各方案下料的根数分别为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，于是有目标函数

$$\min Z = 0.0x_1 + 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5$$

约束条件

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 100 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-5}$$

从上面几个例子，可以看出线性规划问题的数学模型有如下特点：

(1)都有一组未知变量($x_1, x_2, \cdots, x_n$)代表某一方案，它们取不同的非负值，代表不同的具体方案。

(2)都有一个目标要求，实现极大或极小。目标函数用未知变量的线性函数表示。

(3)未知变量受到一组约束条件的限制，这些约束条件用一组线性等式或不等式表示。

正是由于目标函数和约束条件都是未知变量的线性函数，所以我们把这类问题称为线性规划问题。

(4)在一般的线性规划模型中，最优解可能会出现分数的情况。当最优解必须是整数(如人数或设备的台数等)才有实际计量价值时，要采用本章后面第八节介绍的整数规划方法去解决。

二、线性规划问题的标准型

从前面的例子我们知道线性规划问题有各种形式，如目标函数有的是求极大值，有的是求极小值；约束条件也有"≤"，"="，"≥"三种形式。现规定线性规划问题的标准形式为

目标函数　　$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \\ b_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, m) \end{cases} \tag{1-6}$$

式中，$c_j(j=1,2,\cdots,n)$称为价值系数；$a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$称为技术系数；$b_i(i=1,2,\cdots,m)$称为限定系数。

建立标准型的好处在于：我们可以只针对这种标准形式来研究它的求解方法。至于其他各种形式的线性规划问题，我们可以先将非标准型变成标准型，然后再用标准型的求解方法求解。

为书写简便起见，(1-6)式可以写成如下两种形式，其中 s.t.代表约束条件。

1. 简缩形式

目标函数
$$\max Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n\\ b_i\geqslant 0\end{cases}$$

2. 矩阵形式

$$\max Z=CX$$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}AX=\boldsymbol{b}\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

其中
$$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

在生产和管理实践中，很多优化问题都可用线性规划模型去解决，这些实际应用的例子见本章第九节。

第二节 线性规划问题的图解法

学习这一节的目的是通过两个变量的线性规划问题的图解法，了解线性规划问题解的特点，从而了解求解线性规划问题的一般方法——单纯形法的基本原理。

一、两个变量的线性规划问题的图解法

仍以前面汽车生产安排为例，它可以用下面的数学模型表示：

目标函数
$$\max Z=4x_1+3x_2 \tag{1-7}$$

约束条件

$$\begin{cases}2x_1+2x_2\leqslant 1\ 600\\5x_1+2.5x_2\leqslant 2\ 500\\x_1\leqslant 400\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}\tag{1-8}$$

1. 决策空间的几何表示法

现把所有约束条件都化为等式，即

$$\begin{cases}2x_1+2x_2=1\ 600\\5x_1+2.5x_2=2\ 500\\x_1=400\end{cases}$$

这些等式约束条件在以 x_1,x_2 为坐标轴的平面内都可以用直线表示（见图1-1），于是这些约束条件构成了一个区域 $OABCD$。在这个区域里每一点都满足约束条件式(1-8)。我们把满足所有约束条件的解称为可行解，而所有可行解的集合称为可行域。图 1-1 中 $OABCDO$ 所围的区域就是可行域，这个区域里的每一点，包括边界上的点都是可行解。从图上我们可以看到这个可行域是一个凸多边形，我们把它称为凸集。

下面介绍几个有关的数学概念及定理。

(1) 凸集：如果在形体中任意取两点连接一根直线，若线段上所有的点都在这个形体中，则称该形体为凸集。

用数学语言表示就是：

设 k 是 n 维欧空间的一个点集，任取两点 $x_1\in k$，$x_2\in k$。若它们连线上的一切点

$$\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\in k\qquad(0<\alpha<1)$$

则称 k 为凸集。

实心圆、实心球体、实心立方体等都是凸集。如图 1-2 中的(a)、(b)图形为凸集，而(c)、(d)图形则不是凸集。

(2) 角顶：设 k 为凸集，$x\in k$，x 若不能用不同的两点 $x_1\in k$，$x_2\in k$ 的线性组合表示为

$$x=\alpha x_1+(1-\alpha)x_2\qquad(0<\alpha<1)$$

则称 x 为 k 的一个角顶，例如图 1-1 中的点 O,A,B,C,D 是凸域 $OABCD$ 的角顶；点 E、G 是凸域 OEG 的角顶。

(3) 角顶可行解和角顶不可行解：角顶可行解是指一个可行解，但它不在另外两个可行解的连线上。例图 1-1 中的 O,A,B,C,D 都是角顶可行解；而角顶 E,F,G 在不可行域内，所以它们三个是角顶不可行解。

定理 1 线性规划问题所有可行解组成的集合

$$D=\{X\mid AX=\boldsymbol{b},X\geqslant 0\}$$

是凸集，或称凸域。

证明的思路：为了证明这个定理，只需证明 D 中的任意两点 X_1 和 X_2 连线上的点仍然在 D 内即可。

现证明如下：如果 X_1 和 X_2 是 D 内的任意两点，则有

$$AX_1=\boldsymbol{b},AX_2=\boldsymbol{b},\text{及 }X_1,X_2\geqslant 0$$