线性代数

黄庆祥　郭忠·主编

湖南科学技术出版社

线性代数

主编：黄庆祥　郭忠
主审：肖伊辛
编委：黄庆祥　郭忠
符荣节　程伟

湖南科学技术出版社

湘新登字 004 号

线 性 代 数

黄庆祥　郭　忠　主编

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路 3 号）
湖南省新华书店经销
湖南省新华印刷二厂印刷
（印装质量问题请直接与本厂联系）

*

1994 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
开本：787×1092 毫米　1/32　印张：6.625　字数：150,000
印数：1—6,600

ISBN 7—5357—1455—2
O・118　定价：7.90 元

前　言

《线性代数》是高等工科院校的一门主要基础理论课，是现代计算技术所必需的基本知识。为此，我们编写此线性代数教材。在湖南大学高等数学教研室全体教师的支持与协助下，此教材于 1987 年由湖南科技出版社出版向全国发行。经我校和其他院校使用，受到教师、学员和读者的好评并于 1991 年被评为湖南大学优秀教材。由于形势的需要，为更适应工、管各专业的要求，特别考虑到计算机科学的迅速发展和日益普及，我们在 1987 年出版的教材的基础上作了较大的修改与完善。删去原教材的第六章和第七章，另增写了计算方法作为第六章。对前五章，在内容上也作了精心的安排，改进完善了某些内容的叙述或证明过程，更突出以矩阵理论贯穿全书的特点，使学员通过学习能具有熟练地掌握矩阵运算和用矩阵方法解决问题的能力。论述上力求深入浅出、由浅入深、重点突出。每节都紧密配合基本理论安排了适当的例题。为巩固所学知识，习题上也由原每章配备习题改为每节都配备了由易到难的适量的习题并于书后附有习题的答案或提示。

本书内容包括：行列式、矩阵理论、线性空间和线性变换、线性方程组、二次型和线性代数中的数值计算。各部分内容均按国家教委高等工业学校数学课程教学指导委员会颁发的“线性代数等课程教学基本要求”编写。可作为工、管各专业的大

学本科，某些大专及电大、函大等成教系列的学员的教材或教学参考书。也可供工程技术人员和自学考试考生自学或参考之用。第六章属选修内容，任课教师可按各专业的需要决定讲授与否。

限于编著者的经验与水平，书中漏误之处实属难免，望同行专家及广大学员、读者提出宝贵意见，我们深表感谢。

编者

1993年11月于长沙

目　录

第一章　行列式及其计算 ………………………… (1)

§1　n阶行列式的定义 ………………………… (1)

习题 1.1 ………………………… (7)

§2　n阶行列式的性质 ………………………… (8)

习题 1.2 ………………………… (20)

§3　克莱姆法则 ………………………… (22)

习题 1.3 ………………………… (25)

第二章　矩阵 ………………………… (27)

§1　矩阵的概念与运算 ………………………… (27)

习题 2.1 ………………………… (40)

§2　矩阵的秩与矩阵的初等变换 ………………………… (41)

习题 2.2 ………………………… (52)

§3　逆矩阵及其求法 ………………………… (53)

习题 2.3 ………………………… (63)

§4　正交矩阵与分块矩阵 ………………………… (64)

习题 2.4 ………………………… (74)

第三章　线性空间和线性变换 ………………………… (76)

§1　n维向量空间 ………………………… (76)

§2　向量的线性相关与线性无关 ………………………… (79)

习题 3.2 ………………………… (89)

§3　线性空间 …………………………………………………… (89)
　　习题 3.3 …………………………………………………… (98)
§4　线性变换 …………………………………………………… (99)
　　习题 3.4 …………………………………………………… (112)
第四章　线性方程组 ……………………………………… (115)
§1　线性方程组的相容性和解法 ………………………… (115)
　　习题 4.1 …………………………………………………… (127)
§2　齐次线性方程组，基础解系 ………………………… (128)
　　习题 4.2 …………………………………………………… (141)
第五章　二次型 …………………………………………… (143)
§1　二次型及其矩阵表示 ………………………………… (143)
　　习题 5.1 …………………………………………………… (147)
§2　用配方法化二次型为标准形 ………………………… (147)
　　习题 5.2 …………………………………………………… (157)
§3　用正交变换化二次型为标准形 ……………………… (157)
　　习题 5.3 …………………………………………………… (172)
§4　用初等变换化二次型为标准形 ……………………… (172)
　　习题 5.4 …………………………………………………… (178)
§5　正定二次型 ………………………………………………… (178)
　　习题 5.5 …………………………………………………… (181)
第六章　线性代数中的数值计算 ………………………… (182)
§1　线性代数方程组的解法 ……………………………… (182)
　　习题 6.1 …………………………………………………… (189)
§2　矩阵的特征值与特征向量计算 ……………………… (190)
　　习题 6.2 …………………………………………………… (196)

第一章　行列式及其计算

行列式最初是作为求解线性方程组而引入的，现在它已成为研究线性代数的一个重要工具，中学数学中曾提到过二阶和三阶行列式以及它们的性质，我们在这一章将建立 n 阶行列式的概念，讨论它们的性质、计算方法以及运用行列式求解线性方程组的克莱姆（Cramer）法则.

§1　n 阶行列式的定义

一　二阶行列式与三阶行列式

定义 1　设有数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1-1-1}$$

则称数“$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$”为对应于数表（1-1-1）的二阶行列式，记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

习惯上用字母 D 表示行列式，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中横排称为行，纵排称为列，数 a_{ij} 表示第 i 行、第 j 列的元素.

对应于数表（1-1-1）的行列式有时也记为

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

定义 2 设有数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1-1-2}$$

则称数“$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$”为对应于数表（1-1-2）的三阶行列式，记为

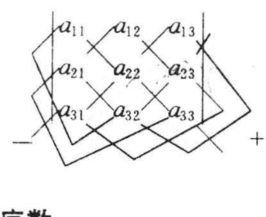
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

其中横排称为行，纵排称为列，数 a_{ij} 表示第 i 行、第 j 列的元素.

对应于数表（1-1-2）的行列式有时也记为

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

三阶行列式的计算可如下图



二 排列与逆序数

三阶行列式按对角线展开的计算方法已不适用三阶以上的行列式，为了讲述 n 阶行列式的定义和证明 n 阶行列式的性质．引入排列和逆序数的概念.

将前 n 个自然数 1，2，3，…，n 按[illegible]一顺序排成一行，

就称为一个 n 级排列.

例如，由 1，2，3 三个数，可以排成“123，” “132”，“213”，“231”，“312”，“321” 等 6 个 3 级排列.

由 n 个数构成的全部 n 级排列共有 $n!$ 个，其中：$123\cdots n$ 称为标准顺序排列.

在排列中，我们关心的是各元素在排列中的前后次序，为此，引入

定义 3 设 i，j 是一个排列中的两个数，且 $i>j$. 若在排列中 i 在前，j 在后，则称 i、j 在此排列中形成一个逆序，一个排列中所有逆序数目的总和称为该排列的逆序数，常记为 τ.

例 1 求 5 级排列“53412”的逆序数.

解 考虑第一个数 5：5，3；5，4；5，1；5，2 形成 4 个逆序，再考虑第二个数 3：3，1；3，2 形成 2 个逆序，第三个数 4：4，1；4，2 形成 2 个逆序，第四个数 1：1 与 2 不形成逆序，于是该排列的逆序数 $\tau=4+2+2+0=8$.

一个排列当它的逆序数为偶数时，称此排列为偶排列，当它的逆序数为奇数时，称它为奇排列.

例 2 讨论下列排列的奇偶性.

（1） 352164；　　　（2） 24153.

解 （1）的逆序数 $\tau=2+3+1+0+1=7$，所以（1）是奇排列，（2）的逆序数 $\tau=1+2+0+1=4$，所以（2）是偶排列.

将一个排列两个位置上的数互换，而其余不动，则称对该排列作了一次对换.

例如：632154 是 652134 作了一次对换而得来的.

定理 1 每一个对换变更排列的奇偶性，

证 分两种情况讨论.

（1） 相邻两数的对换：不妨设所给的 n 级排列为：

$$a_1\cdots a_{i-1}a_ia_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n \tag{1-1-3}$$

对换相邻的 a_i，a_{i+1}得到一个新的 n 级排列

$$a_1\cdots a_{i-1}a_{i+1}a_ia_{i+2}\cdots a_n \tag{1-1-4}$$

由于（1-1-3）与（1-1-4）中 $a_1\cdots a_{i-1}$；$a_{i+2}\cdots a_n$ 次序不变，故它们中任何两个数的逆序不变，而 a_i，a_{i+1}对换后仍在 a_{i-1}之后，a_{i+2}之前，如果 a_i，a_{i+1}在（1-1-3）中形成逆序，则在（1-1-4）中不再是逆序，即（1-1-3）比（1-1-4）多一个逆序；如果 a_i，a_{i+1}在（1-1-3）中不成逆序，则在（1-1-4）中形成逆序，即（1-1-3）比（1-1-4）少一个逆序，故两排列（1-1-3）与（1-1-4）有相异的奇偶性.

（2）不相邻两数的对换，不妨设所给的 n 级排列为：

$$\cdots a_i，a_{k1}\cdots a_{km}，a_j\cdots \tag{1-1-5}$$

对换不相邻的两个数 a_i，a_j，得到新的 n 级排列

$$\cdots a_j，a_{k1}\cdots a_{km}，a_i\cdots \tag{1-1-6}$$

a_i 与 a_j 之间夹有 m 个数 $a_{k1}\cdots a_{km}$.

由（1-1-5）变换为（1-1-6）可以看成是经过 $2m+1$ 次相邻两个数的对换而成的，办法是 a_j 逐次与其前面的 $a_{km}\cdots a_{k1}a_i$ 作对换，共作了 $m+1$ 次对换使（1-1-5）变成为

$$\cdots a_ja_ia_{k1}\cdots a_{km}\cdots \tag{1-1-7}$$

再将（1-1-7）中 a_i 逐次与它后面的 $a_{k1}\cdots a_{km}$作对换，共作了 m 次对换，即变成了（1-1-6），这样由（1-1-5）变为（1-1-6）共作了 $2m+1$ 次相邻两个数的对换，而每次相邻两数的对换，排列的奇偶性改变，所以（1-1-5）与（1-1-6）有相异的奇偶性.

在 n（$\geqslant 2$）级排列中，由定理 1 可知奇、偶排列各占一半（即各有 $n!/2$ 个）.

三　n 阶行列式的定义

定义 4　设 n 为正整数，n^2 个数排成 n 行 n 列（横的称行、

纵的称列）的数表.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \qquad (1\text{-}1\text{-}8)$$

其中 a_{ij} 是第 i 行、第 j 列的数，称为元素，今在每一行中选取一数，并且要求这样选取的 n 个数都在不同的列上，作这 n 个数的乘积

$$a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$$

算为一项，然后乘以 $(-1)^{s+T}$，将所有这样的乘积项求代数和

$$\sum(-1)^{s+T}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$$

其中 S 是第一下标 α_1，α_2，…，α_n 的逆序数，T 是第二下标 β_1，β_2，…，β_n 的逆序数，称此和式为对应于数表（1-1-8）的 n 阶行列式，并记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{s+T}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$$

特别地，当我们按行的标准顺序选取 n 个元素作乘积.

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

则 n 阶行列式

$$D=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}\ ^*$$

其中 τ 是第二下标 P_1，P_2，…P_n 的逆序数，

例 3 计算下列 n 阶行列式

---

* $\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum(-1)^{s+T}a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$ 的证明可参看北京大学编“高等代数”.

(1) $D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}$

(2) $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(3) $D_3=\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & \\ a_{n1} & & 0 \end{vmatrix}$　　(4) $D_4=\begin{vmatrix} 0 & & a_{1n} \\ & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

解　(1) 按定义每行取一个元素且取的这 n 个元素属于不同的列，那么 D_1 中只有一项

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

可能不为零，而其他项必为零，所以

$$D_1=(-1)^{s+T}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

而第一下标是标准顺序排列：$S=0$，同样 $T=0$.

$$D_1=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) D_2 中不为零的项只可能在第一行中取 a_{11}，当取定 a_{11} 后，在第二行中只能取 a_{22}，当 a_{11}，a_{22}取定后，在第三行中只能取 a_{33}，…….于是 D_2 中只有一项 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$可能不为零，而且 $S=0$，$T=0$，所以

$$D_2=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) D_3 中不为零的项只可能是 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$，而且 $S=0$，$T=(n-1)+(n-2)+\cdots 2+1=n(n-1)/2$，所以

$$D_3=(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}.$$

(4) D_4 中也只一项 $a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n1}$可能不为零，所以

$$D_4 = (-1)^{n(n-1)/2} a_{1n} a_{2n-1} \cdots a_{n1}.$$

习题 1.1

1. 按行列式的定义计算下列行列式

(1) $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}$;

(2) $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$;

(3) $D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 10 & 7 \\ 1/2 & 6 & -8 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列排列的逆序数.

(1) 51432； (2) $n\ (n-1)\ \cdots 321$；

(3) $(2n)\ (2n-2)\ \cdots 42\ (2n-1)\ (2n-3)\ \cdots 31$.

3. 选择 i 和 j 使

(1) $1274i56j9$ 成偶排列；

(2) $1i25j4897$ 成奇排列.

4. 在一个 n 阶行列式中等于零的元素个数如果比 n^2-n 还多，那末此行列式等于零，为什么？

5. 试判断四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix}$$

中乘积为 $bgiq$ 和 $dfkm$ 项的符号.

§2　n 阶行列式的性质

按照 n 阶行列式的定义计算行列式常常是很麻烦的，为了给出计算行列式的有效方法，我们先讨论行列式的性质，利用这些性质，可以简化行列式的计算.

一　行列式的性质

性质 1：n 阶行列式与它的转置行列式（把行列式的行变成相应的列得到的新行列式叫做原行列式的转置行列式）相等.

证　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

转置后

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{ik}=a_{ki}$，i，$k=1$，2，$\cdots n$，

D 中任取一项设为：$(-1)^{s+T}a_{i_1j_1}a_{i_2i_2}\cdots a_{i_nj_n}$，那末 D' 中必有相应的项：$(-1)^{T+s}b_{j_1i_1}b_{j_2i_2}\cdots b_{j_ni_n}$，$S$ 是 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，T 是 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数，又因为 $b_{j_1i_1}=a_{i_1j_1}$，$\cdots$，$b_{j_ni_n}=a_{i_nj_n}$，因此，对

D 中任一项，D' 中必有一项与之相等，反之也一样，故 $D=D'$.

性质 1 说明在行列式中行与列所处的地位相同，因此凡是对行成立的命题对列也成立.

性质 2 对换行列式的任意两行（列），行列式仅改变符号.

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1p} & a_{1q} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2p} & a_{2q} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{np} & a_{nq} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

对换 p，q 两列后得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_{1p} & b_{1q} & a_{1n} \\ a_{21} & b_{2p} & b_{2q} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{np} & b_{np} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 $b_{iq}=a_{ip}$，$b_{ip}=a_{iq}$（$i=1, 2, \cdots n$）其余与 D 相同，在 D 中任取一项（连同符号一起）.

$$(-1)^{s+T}a_{\alpha i}\cdots a_{\beta p}\cdots a_{\gamma q}\cdots a_{\lambda l}.$$

S 是 $\alpha\cdots\beta\cdots\gamma\cdots\lambda$ 的逆序数，T 是 $i\cdots p\cdots q\cdots l$ 的逆序数，D_1 中必有一相应的项

$$(-1)^{s+T}a_{\alpha i}\cdots b_{\beta q}\cdots b_{\gamma p}\cdots a_{\lambda l}$$

S 是 $\alpha\cdots\beta\cdots\gamma\cdots\lambda$ 的逆序数，T' 是 $i\cdots q\cdots p\cdots l$ 的逆序数，由于 S 没有变，T' 与 T 有相异的奇偶性，所以 D 中任一项，D_1 中必有一项与它绝对值相等而符号相反，反之也一样，故

$$D=-D_1$$

推论 1 若行列式有两行（列）对应元素相同，则此行列式等于零，

性质 3 把行列式的任一行(列)的所有元素同乘以数 k,等于该行列式乘以数 k.

证 设把 D 的第 i 行的元素都乘以数 k,

得
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

按行列式的定义

$$D_2=\sum(-1)^{s+T}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots ka_{i\beta}\cdots a_{in\beta_n}$$
$$=k\sum(-1)^{s+T}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{i\beta}\cdots a_{in}\beta_n=kD.$$

推论 2 若行列式的两行(列)其对应元素成比例,则该行列式等于零.

这是性质 3 和推论 1 的直接结果.

推论 3 若行列式有一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零.

性质 4 若行列式某一行(列)的各元素是两个数的和,则该行列式等于两个行列式之和,

证 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & a_{i2}+a'_{i2} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

按行列式定义

$$D=\sum(-1)^{s+T}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots(a_{i\beta_i}+a'_{i\beta_i})\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$$
$$=\sum(-1)^{s+T}a_{\alpha_1\beta_1}\cdots a_{i\beta_i}\cdots a_{\alpha_n\beta_n}$$