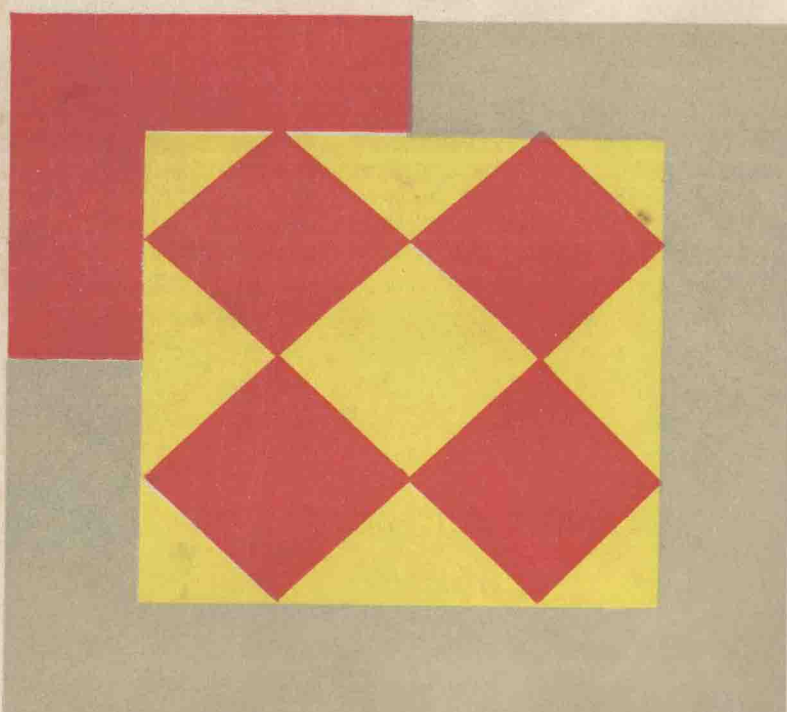
CHUZHONGSHUXUE

FUXIZHIDAO

初中数学复习指导

侯华祥　等编

辽宁科学技术出版社



初中数学复习指导

侯华祥　等编

辽 宁 科 学 技 术 出 版 社

（辽）新登字4号

初 中 数 学 复 习 指 导

Chuzhong Shuxue Fuxi zhidao

侯华祥　等编

辽 宁 科 学 技 术 出 版 社 出 版
（沈阳市和平区北一马路108号　邮政编码 110001）
辽宁省新华书店发行　七二一二工厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：11 1/8　字数：247,000
1993年2月第1版　1993年2月第1次印刷

责任编辑：符　宁　版式设计：于　浪
封面设计：邹君文　责任校对：东　戈

印数：1—23061
ISBN 7-5381-1493-9/G·198　定价：4.95元

前　言

为了更好地指导广大初中生复习功课，帮助他们准确地理解、熟练地掌握初中数学课本内容，我们组织了一些执教多年，经验丰富的教师和教研人员编写了这本《初中数学复习指导》。

《初中数学复习指导》紧扣初中数学教学大纲，并按现行初中数学教材顺序编写。全书分为根式与指数、一元二次方程、函数及其图象、解三角形、统计初步、相似形、圆等七部分。每部分由重点知识、解题指导、检测练习构成。书后设四套综合检测试卷，供检测复习效果之用。每部分的检测练习和综合检测试卷均于书后给出了参考解答。

参加本书编写的有侯华祥、马韵芝、刘兰、兆淳、李继堂、张淑清，最后由侯华祥统稿。

编　者

1992年4月

目　　录

第一部分　根式与指数

一、重点知识

（一）根式

1．根式的定义

含有根号的代数式叫做根式．式子$\sqrt[n]{a}$叫做n次根式，这里的n是大于1的自然数，如$\sqrt{5}$、$\sqrt{b}$、$\sqrt[3]{a+b}$；当n是奇数时，a可以为任何实数，当n是偶数时，a只能是非负的实数．

2．根式的性质

（1）$(\sqrt[n]{a})^n=a$

（2）当n是奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$

（3）当n是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a,(a\geqslant0)\\-a,(a<0).\end{cases}$

其中当$n=2$时，$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a,(a\geqslant0)\\-a,(a<0)\end{cases}$

（4）$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geqslant0)$；

（5）$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\ (a\geqslant0, b\geqslant0)$

（6）$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (a\geqslant0, b>0)$；

（7）$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}\ (a\geqslant0)$；

（8）$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}\,(a\geqslant 0)$。

3．最简根式

（1）被开方数的每一个因式的指数都小于根指数；

（2）被开方数不含分母；

（3）被开方数的指数和根指数是互质数（两个自然数的最大公约数是1，称为互质数）．

4．同类根式和同次根式

（1）同类根式：几个根式化成最简根式后，如果它们的被开方数都相同，根指数也都相同，这几个根式就叫做同类根式。

（2）同次根式：根指数相同的根式叫做同次根式。

5．分母有理化

（1）把分母中的根号化去，叫分母有理化；

（2）两个含有根号的代数式相乘，如果它们的积不含有根号，我们说这两个代数式互为有理化因式；

（3）常见的互为有理化因式；

①$\sqrt[n]{a^m}\,(n>m)$的有理化因式为$\sqrt[n]{a^{n-m}}$；

②$\sqrt[m]{a}\pm\sqrt[m]{b}$的有理化因式为$\sqrt[m]{a}\mp\sqrt[n]{b}$；

③$a\pm\sqrt{b}$的有理化因式为$a\mp\sqrt{b}$；

④$\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$的有理化因式为$\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$；

（二）指数

1．正整数指数幂：$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdots\cdots a}^{n\text{个}}$（n是大于1的正整数）；

2．零指数幂：$a^0=1\,(a\neq 0)$

规定$a^0=1$，而不是零个a相乘．零的零次幂没有意义．

3. 负整数指数幂：$a^{-p}=\frac{1}{a^{p}}$（$a\neq 0$，p是正整数）

4. 分数指数幂：

（1）$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{m}}$（$a>0$，m、n都是正整数，$n>1$）（当$a<0$，m是奇数，n是偶数时，没有意义）；

（2）$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}}$（$a>0$，m，n是正整数，$n>1$）（当$a<0$，m是奇数、n是偶数时没意义；当$a=0$时，没意义；即$0^{-\frac{m}{n}}$无意义）．

（三）根式与指数互化公式

1. $\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$（$a\geqslant 0$，m、n为正整数，$n>1$）

2. $\frac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}}=a^{-\frac{m}{n}}$（$a>0$，m、n为正整数，$n>1$）

3. $(\sqrt[n]{a})^{m}=(a^{\frac{1}{n}})^{m}=a^{\frac{m}{n}}$（$a\geqslant 0$，m、n为正整数，$n>1$）；

其中当$n=m$时，$(\sqrt[n]{a})^{n}=\sqrt[n]{a^{n}}=a^{\frac{n}{n}}=a$（$a\geqslant 0$，n是大于1的整数；当$a<0$，n为偶数，上式不成立，如$(\sqrt[4]{-2})^{4}\neq\sqrt[4]{(-2)^{4}}$）．

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{n\cdot m}}$（$a\geqslant 0$，m、n为正整数，$n>1$）．

（四）互化公式的作用，把根式统一于分数指数幂的运

算，简化复杂的根式乘、除、乘方、开方的运算。

1. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$转化为$(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$($a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$，m、n为正整数，$n>1$)

2. $\sqrt[n]{\dfrac{b}{a}}=\dfrac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}}$转化为$\left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{b^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n}}}=b^{\frac{1}{n}}a^{-\frac{1}{n}}$

($a>0$，$b\geqslant 0$，m、n为正整数，$n>1$)，

1、2可统一为$(ab)^m=a^mb^m$ (其中$m=\dfrac{1}{n}$)

3. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$转化为$(a^{\frac{1}{n}})^m=a^{\frac{m}{n}}$($a\geqslant 0$，m、n为正整数，$n>1$)

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$转化为$(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{nm}}$($a\geqslant 0$，m、n为正整数，$m>1$，$n>1$)

3、4可统一为$(a^n)^m=a^{mn}$.

二、解题指导

（一）判断题　正确的在括号内画“√”，错误的在括号内画“×”.

1. b为实数时，$\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[3]{b}$.

分析　因为根式的基本性质是在被开方数的底数为非负数才能成立，而把根式化为分数指数时，也必须在被开方数为正的情况下才能进行，当$b<0$时，如$\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2$，$\sqrt[3]{-8}=-2$，

$\therefore\ \sqrt[6]{(-8)^2} \neq \sqrt[3]{-8}\quad \therefore\ \sqrt[6]{b^2} \neq \sqrt[3]{b}.$

答（×）

2. n为自然数时，$\sqrt{a^{2n}} = a^n$.

分析：当$a<0$时，n为奇数时，等式不成立，如$\sqrt{(-2)^{2\times3}} = 8$，$(-2)^3 = -8$，$\therefore \sqrt{(-2)^{2\times3}} \neq (-2)^3$.

答（×）

3. $\sqrt[3]{-9} = (-3)^{\frac{2}{3}}$.

分析 $\because \sqrt[3]{-9}$不能化为$(-9)^{\frac{1}{3}}$，应化为

$-\sqrt[3]{9} = -9^{\frac{1}{3}} = -(3^2)^{\frac{1}{3}} = -3^{\frac{2}{3}}$才是正确的。

答（×）

4. $[(-\sqrt{3})^2]^{-\frac{1}{2}} = (-\sqrt{3})^{-1} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

分析 应注意运算顺序$(-\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3})^2$

$$\therefore [(-\sqrt{3})^2]^{-\frac{1}{2}} = [(\sqrt{3})^2]^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

答：（×）

5. $2^{-28} < 2^{-29}$.

分析 $\because 2^{-28} = \dfrac{1}{2^{28}} = \dfrac{1}{\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{28个}}$

$$2^{-29} = \frac{1}{\underbrace{2\times2\times\cdots\times2}_{29个}}$$

$$\because 2^{29} > 2^{28}\quad \therefore \frac{1}{2^{29}} < \frac{1}{2^{28}}$$

$\therefore 2^{-28} < 2^{-29}$是不正确的。

答：(×)

6. $(|m|+1)^0=1$

分析 要使$(|m|+1)^0=1$成立，

必须有$|m|+1\neq 0$

只需有$|m|\geqslant 0$成立即可.

答(√)

7. $\sqrt{(x-5)(x-6)}=\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x-6}$

分析 要使$\sqrt{(x-5)(x-6)}$有意义，

必须有$(x-5)(x-6)\geqslant 0$

即$x\geqslant 6$或$x\leqslant 5$；

要使$\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x-6}$有意义，

只需有$x\geqslant 6$，

∴等式只能在$x\geqslant 6$条件下成立

而本题没给出等式成立的条件

∴$\sqrt{(x-5)(x-6)}\neq\sqrt{x-5}\cdot\sqrt{x-6}$.

答：(×)

8. $\sqrt{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^2}$

$=x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$.

分析 ∵$\sqrt{x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}})^2}$

$=|x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}|$

要使原式成立，必须使$|x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}|=x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}$成立，只需$x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\geqslant 0$，即$x^{\frac{1}{3}}\geqslant y^{\frac{1}{3}}$.

∴原式在$x^{\frac{1}{3}}\geqslant y^{\frac{1}{3}}$条件下成立

∴在没有条件：$x^{\frac{1}{3}} \geqslant y^{\frac{1}{3}}$时，原式不成立.

答（×）

9\. $a-1+\sqrt{a^2+2a+1}=2a$.

分析：要使等式成立，必须使$a-1+|a+1|=2a$成立；只需$|a+1|=a+1$

即$a+1\geqslant 0$，得$a\geqslant -1$；

∴$a-1+\sqrt{a^2+2a+1}=2a$在$a\geqslant -1$条件下成立，

∴$a-1+\sqrt{a^2+2a+1}=2a$在没有$a\geqslant -1$条件下不成立.

答（×）

10\. $a^2+a+1=(a^2+a+1)^2$.

分析 要使$a^2+a+1=(a^2+a+1)^2$成立，

必须使$(a^2+a+1)^2-(a^2+a+1)=0$成立，

即$(a^2+a+1)(a^2+a)=0$成立

又∵$a^2+a+1=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，

只需$a^2+a=0$成立，

即$a=-1$或$a=0$

∴$a^2+a+1=(a^2+a+1)^2$在$a=-1$或$a=0$条件下成立，

∴$a^2+a+1=(a^2+a+1)^2$在没有$a=-1$或$a=0$条件下不成立.

答（×）

（二）填空

11\. 若$\sqrt{a^4b^2c^8}=-a^2bc^4$，则b ________.

分析 ∵$\sqrt{a^4b^2c^8}$表示算术根，∴$\sqrt{a^4b^2c^8}\geqslant 0$，

要使$\sqrt{a^4b^2c^8}=-a^2bc^4$成立，

必须有$-a^2bc^4\geqslant 0$，

只需$b\leqslant 0$.

答（$b\leqslant 0$）

12. $\sqrt[4]{a^4}=(\sqrt[4]{-a})^4$成立的条件是________.

分析 要使$\sqrt[4]{a^4}=(\sqrt[4]{-a})^4$成立，

必须使$\sqrt[4]{-a}$，$\sqrt[4]{a^4}$有意义

只需有$-a\geqslant 0$，即$a\leqslant 0$

∴$\sqrt[4]{a^4}=(\sqrt[4]{-a})^4$在$a\leqslant 0$条件下成立.

答（$a\leqslant 0$）

13. c________时，$\sqrt{c^2+2c+1}=-(c+1)$.

分析 要使$\sqrt{c^2+2c+1}=-(c+1)$成立，

必须使$-(c+1)\geqslant 0$，即$c+1\leqslant 0$，

只需$c\leqslant -1$.

答（$c\leqslant -1$）

14. 若x、y为实数，且$\sqrt{x}+x+\sqrt{y}+y=0$，则$xy=$_____.

分析 ∵$\sqrt{x}$，$\sqrt{y}$都表示算术根，∴$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，

由$\sqrt{x}+x+\sqrt{y}+y=0$，可得$x=0$，$y=0$

∴xy可求.

答（$xy=0$）

15. 当a________时，$|a-\sqrt{a^2}|=-2a$.

分析 要使$|a-\sqrt{a^2}|=-2a$成立

∵$|a-\sqrt{a^2}|\geqslant 0$ ∴必须使$-2a\geqslant 0$

即 $a\leqslant 0$.

答 ($a\leqslant 0$)

16. 若$\sqrt[3a+2]{4a+3b}$与$\sqrt[b+4]{2a-b+6}$是同类根式，则 $a=$________，$b=$________.

分析 要使$\sqrt[3a+2]{4a+3b}$与$\sqrt[b+4]{2a-b+6}$是同类根式，必须使根指数相同和被开方数相同，

即有$\begin{cases}3a+2=b+4\\4a+3b=2a-b+6.\end{cases}$

则 a、b 可求.

答($a=1$，$b=1$)

17. 若$|a-3|+\sqrt{b-2}=0$，则满足方程$a(x-1)^2+b(x-1)-1=0$的x值等于________.

分析 要求方程$a(x-1)^2+b(x-1)-1=0$的x的值必须求方程的参数a、b

由已知条件$|a-3|+\sqrt{b-2}=0$

得 $a=3$，$b=2$，

将 a，b 代入原方程可求 x.

答 ($x_1=0$，$a_2=\dfrac{4}{3}$)

18. 若 $(\sqrt{x-3}-1)^0=1$，则x的取值范围是____.

分析 要使$(\sqrt{x-3}-1)^0=1$成立

必须使$\sqrt{x-3}-1\neq 0$且$x-3\geqslant 0$，

只需$x-3\neq 1$，$x\geqslant 3$

即 $x\neq 4$且$x\geqslant 3$.

答($x\neq 4$且$x\geqslant 3$)

19. 若$a^2+b^2+c^2=1$，

$(ab-c)^2+|bc-a|+\sqrt{ca-b}=0$，

则$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=$________.

分析 要求$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$的值

由已知$(ab-c)^2+|bc-a|+\sqrt{ca-b}=0$,

知$(ab-c)^2=0$, $|bc-a|=0$, $\sqrt{ca-b}=0$,

即 $ab=c, bc=a, ca=b$

将上述三式平方后相加，可得要求的值.

答($a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=1$)

20. 使$\sqrt{\dfrac{5-x}{6-x}}=\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{6-x}}$成立的x的范围是____.

分析 要使$\sqrt{\dfrac{5-x}{6-x}}=\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{6-x}}$成立,

必须使$\sqrt{\dfrac{5-x}{6-x}}$和$\dfrac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{6-x}}$有意义,

只需有$\begin{cases}5-x\geqslant 0\\6-x>0\end{cases}$或$\begin{cases}5-x\leqslant 0\\6-x<0\end{cases}$ (1)

和只需有$5-x\geqslant 0$, $6-x>0$ (2)

由(1)得$x\leqslant 5$或$x>6$,

由(2)得$x\leqslant 5$

∴使原不等式成立的条件是(1)和(2)

的公共解$x\leqslant 5$.

答($x\leqslant 5$)

21. 若$\sqrt{x-2}<2$，则$\sqrt{4-4x+x^2}$

$+\sqrt{x^2-14x+49}=$________.

分析 ∵$\sqrt{4-4x+x^2}+\sqrt{x^2-14x+49}$

$=|2-x|+|x-7|$

$\therefore$要化简$|2-x|+|x-7|$，必须判断$2-x$和$x-7$的符号，由已知$\sqrt{x-2}<2$知$2\leqslant x<6$，得$2-x\leqslant 0$，$x-6<0$，$x-7<-1<0$

可化去绝对值的符号进行化简，求出结果.

答（5）

（三）选择题

以下每个小题都给出代号为A、B、C、D的四个答案，其中有且只有一个是正确的，把正确答案的代号填在题后括号内.

22. 要使$\dfrac{1}{1-\sqrt{x-1}}$有意义，x的取值范围是(　).

(A)$x>1$；(B)$x\geqslant 1$；(C)$x\neq 2$；(D)$x\geqslant 1$且$x\neq 2$.

分析　由（A）知$x>1$，取$x=2$，使分母为零，$\therefore$(A)不对；

由(B)知$x\geqslant 1$，取$x=2$，使分母为零，$\therefore$(B)不对，

由(C)知$x\neq 2$，取$x=0$，$\sqrt{x-1}$没有意义，$\therefore$(C)不对；

要使原式有意义，必须使$x-1\geqslant 0$，

且$1-\sqrt{x-1}\neq 0$，即$x\geqslant 1$，且$x\neq 2$故选(D)

答（D）

23. $\sqrt[6]{4a^4}=\sqrt[3]{2a^2}$，$\sqrt[6]{a^6}=a$，$(a^2)^k=(a^k)^2$，$\sqrt[n]{a^{4n}}=a^4$，在以上的各式中，字母为任意实数时是恒等式的有（　　）.

(A)1个；(B)2个；(C)3个；(D)4个.

分析　$\because\sqrt[6]{a^6}=a$，当$a<0$时等式不成立，