根据现行教材和新课标编写

解题笔记

JIETI BIJI CHUZHONG SHUXUE

丛书主编 盛焕华 本册主编 张 杰

初中数学

双色

北京师范大學出版社

根据现行教材和新课标编写

解题笔记

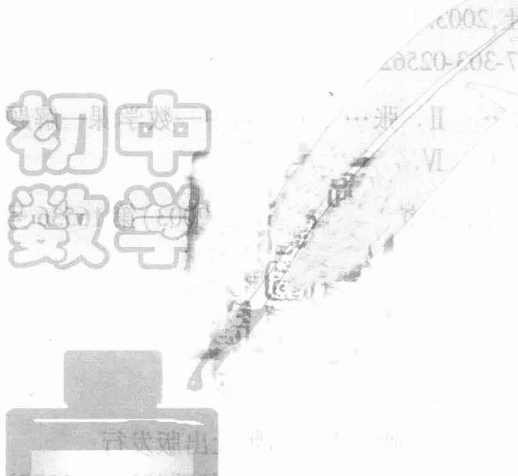
双色

从书主编 盛焕华

本册主编 张 杰

本册编者 张 杰 陶 慧 郁卫星

初中数学



北京师范大学出版社

北 京

图书在版编目(CIP)数据

解题笔记．初中数学/张杰主编．—北京：北京师范大学出版社，2003.10

ISBN 7-303-02562-6

Ⅰ．解…　Ⅱ．张…　Ⅲ．初中—数学课—解题—教学参考资料　Ⅳ．G634.606

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 16536 号

北京师范大学出版社出版发行

(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)

出版人:赖德胜

北京昌平兴华印刷厂印刷　全国新华书店经销

开本：890mm×1240mm　1/32　印张：10.375　字数：308 千字

2003 年 10 月第 1 版　2003 年 10 月第 1 次印刷

定价：15.50 元

丛书编委会名单

前　言

解题技巧是解题的思想原则、运思方略和操作程序等高度集合的结晶和技术化、熟练化、效益化的体现。技巧是方法的巧妙运用，其核心就是快捷、熟练的解题技巧才能使你真正战胜考试。本套丛书以此为亮点，重点揭示了解题捷径的技巧和思维方法，为你达到　　　　　　　　的解题要求提供了科学的参考。

考虑到中、高考的特点，初中各分册均以“专题”为序，以现行新教材和新课标为标准，充分融贯新课标中的新的教学思想和教学理念，体现超凡思维，让学生既知其然，又知其所以然；高中各分册针对各学科的特点，以新教材为体系，以新“教学大纲”和“考试说明”中对考生的能力要求为依据，从　　　　　　　　三大部分对解题方法与技巧进行了全面的总结。每个专题的编写体例包括如下几个栏目：

是对本专题解题方法与技巧的概述。

精选全国和各省市近二三年来的典型中、高考试题和各地模拟试题，既注意体现各考点的深度，又注意体现各考点的广度。

【金钥匙】剖析经典题命题思路，结合具体考题，把“金点子”中的方法、技巧具体化。

书中的不少题目大多列出多种解法，这些解法既有通解通法，也有作者独具匠心的创新解法，使读者从中拓宽视野，增长见识。

在多种解法的操练中掌握常见题型解题规律与技巧，举一反三，激活思维，活用技巧，融会贯通，从而具备综合应考的素质。

【聚宝盆】总结每个专题的解题经验，警示思维误区，提醒考生少走弯路。

选系列的、有代表性的中、高考题，让学生运用所掌握的方法、技巧解决问题，体验成功。

【赛场点评】以精练的语言点评赛题，揭示答案要点。

本套丛书具有以下四大特色：

内容厚重经典，题型规范。

前瞻性和预测性俱佳，无论在试题的内容还是表现形式上，都充满了浓郁的时代气息，具有鲜活性、灵动性。做到融广博与智巧于一书，重思辩，突出创新。根据中、高考命题改革的特点，还选编了本学科联系生产生活实际，反映新科技成果和与其他学科综合交叉的创新题、作者新原创题，可以说与时俱进，给人以耳目一新之感。

（3）实用。高中各科切准高考命题脉络，精心设计二轮复习用的专题讲座材料，编选了具有代表性的例题，例题难度属中上等以上，使每位同学学有实效。

（4）全面。以"考纲、考点、考题"的"三考"为导向目标，全面介绍科学的思维方法，通过典型例题，制定解题策略，点拨解题内涵，归纳出应对这一考点的一般方法、技巧。

从方法与技巧的题型选择、知识要求和能力要求来看，本套丛书是一套不可多得的解题宝典，是初三、高三考生的必备用书。

可以说，在你困惑的时候，它为你指点迷津，在你无助的时候，它为你排忧解难，使你豁然开朗、充满自信。我们有理由相信，精心编写的本套"解题笔记"一定会使每一位同学从中获得娴熟的解题技巧和创新的解题思路。

总主编：盛焕华

目录

策略 1　分久必合　合久必分(有关数的运算)……………… (1)
策略 2　分解因式　形式为积(因式分解)…………………… (5)
策略 3　纷杂算式　志在简洁(有理式的化简)…………… (10)
策略 4　非负实数　重点根式(二次根式)………………… (17)
策略 5　强强弱弱　谋求共同(不等式与不等式组)……… (23)
策略 6　相互抗衡　目标一致(一元一次方程、一元二次方程)……………………………………………… (29)
策略 7　皮之不存　毛将焉附(一元二次方程中的韦达定理与判别式)………………………………… (40)
策略 8　消元降次　九九归一(方程组的解法)………… (49)
策略 9　未卜先知　等量而求(方程与方程组的应用)… (56)
策略 10　数对定位　方程轨迹(直角坐标系)………… (63)
策略 11　式中含天　天之函数(几类特殊函数)……… (67)
策略 12　运筹帷幄　追求卓越(有关函数最值问题及应用)…………………………………………… (77)
策略 13　按图索骥　数形结合(有关函数图象问题)…… (85)
策略 14　一叶知秋　窥见一斑(统计初步)…………… (93)
策略 15　相交平行　线线关系(直线与角)………… (101)
策略 16　边角对应　全等三角(三角形)…………… (110)
策略 17　勾三股四　祖国遗产(直角三角形)……… (121)
策略 18　形定位移　平行变换(中位线、平行四边形、梯形)……………………………………………… (128)
策略 19　翻转旋转　对称变换(等腰三角形、矩形、菱形、正方形)………………………………………… (138)
策略 20　似曾相识　大小而已(相似三角形比例线段)… (146)

策略 21　扪心自问　心有几多(三角形的四心问题) … (157)
策略 22　海岛航行　三角测量(三角函数) …………… (166)
策略 23　日照大地　群星璀璨(点与圆的位置关系) … (175)
策略 24　烘云托月　线圆相关(直线与圆的位置关系)… (184)
策略 25　切割分圆　幂积不变(圆幂定理) …………… (196)
策略 26　你中有我　我中有你(两圆相交中双重身分的角、边)……………………………………… (205)
策略 27　心心相连　切切相关(两圆相交、相切) ……… (216)
策略 28　完美图形　从圆画起(正多边形) …………… (227)
策略 29　逆向求异　正难则反(反证法) …………… (239)
策略 30　大胆猜想　小心求证(有关找规律问题) …… (247)
策略 31　生搬硬套　茅塞顿开(有关适应性试题) …… (254)
策略 32　物以类聚　人以群分(综合题中分类讨论问题) ……………………………………… (264)
策略 33　动中取静　静中制动(综合题中不变量问题)… (276)
策略 34　与时俱进　闻风而动(综合题中几何与函数问题) ……………………………………… (287)
策略 35　执果索因　综合分析(综合题中存在性问题) ………………………………………… (298)
策略 36　化整为零　各个击破(综合题代数、几何多者关系) ……………………………………… (311)

策略1　分久必合　合久必分

(有关数的运算)

经典题

例1　观察$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.
$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

计算：$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}=$____________.

金钥匙　从条件出发，发现通过“裂项相消”可避免通分运算，这样容易求得运算结果.

捷径：
$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

聚宝盆　本题学生往往不对条件进行观察，而拿到题目就通分，使之进入死胡同. 由于条件给出两条式子. 从中观察发现，把一个分数分裂成两个分数的差，从而达到相消的目的.

例2　计算$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2002}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2003}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2002}+\frac{1}{2003}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2002}\right)$.

金钥匙　从括号内各数字和来看，每一个括号内都有“$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2002}$”这一整体. 可采用“整体换元”的解题技巧.

捷径：设$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{2002}=a$，

则原式$=(1+a)\left(a+\frac{1}{2003}\right)-\left(1+a+\frac{1}{2003}\right)a$
$$=a^2+a+\frac{1}{2003}a+\frac{1}{2003}-\left(a+a^2+\frac{1}{2003}a\right)$$

$$=a^2+a+\frac{1}{2003}a+\frac{1}{2003}-a-a^2-\frac{1}{2003}a=\frac{1}{2003}.$$

聚宝盆 从各个括号内的数字特征找规律，把相同的项看作是整体，转化为两项多项式之间的乘法运算.

例 3 计算 $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}+\frac{2}{50}+\frac{3}{50}+\cdots+\frac{48}{50}+\frac{49}{50}\right)$.

金钥匙 本题与例 2 不同之处是各个括号内无共性，但每个括号内运算较为简单，且所得的结果又是一个等差数列.

捷径：原式 $=\frac{1}{2}+\frac{3}{3}+\frac{6}{4}+\frac{10}{5}+\cdots+\frac{\frac{1}{2}(1+49)\times 49}{50}$

$$=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2+\cdots+\frac{49}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{49}{2}\right)\times 49=\frac{1}{2}\times 25\times 49=\frac{1\ 225}{2}.$$

聚宝盆 从数字特征发现等差数列．从而简化运算.

例 4 规定“△”为有序实数对运算，即，$(a,b)\triangle(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$，如果对任意实数 a,b 都有 $(a,b)\triangle(x,y)=(a,b)$，则 (x,y) 为(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(1,0)$　　C. $(-1,0)$　　D. $(0,-1)$

金钥匙 从运算的定义出发，列出两个方程，然后解方程组，从而求出 x,y 的值.

捷径：由定义知：

$(a,b)=(a,b)\triangle(x,y)=(ax+by,ay+bx)$，

则 $\begin{cases}ax+by=a, & ①\\ ay+bx=b. & ②\end{cases}$

由①＋②得　$(a+b)(x+y)=a+b$.

由 a,b 为任意实数知 $x+y=1$，　③

由①－②得　$(a-b)(x-y)=a-b$.

同理可得 $x-y=1$.　④

由③、④可得 $\begin{cases}x=1,\\ y=0.\end{cases}$

聚宝盆 对新定义运算，必须看清定义中各个字母之间的各种运算关系，然后由等式条件出发列出方程组，从而求出 x,y 的值.

例5 求 $S=\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{20^2}\right)$.

金钥匙 由于每个因式都是以平方差的形式出现的.因此利用平方差公式进行计算.

捷径 $S=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)$

$\cdots\left(1-\frac{1}{20}\right)\left(1+\frac{1}{20}\right)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{5}}{\cancel{4}}\times\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\times\frac{\cancel{6}}{\cancel{5}}\cdots\frac{\cancel{18}}{\cancel{19}}\times\frac{\cancel{20}}{\cancel{19}}\times\frac{\cancel{19}}{\cancel{20}}\times\frac{21}{20}$

$=\frac{2}{3}\times\frac{21}{20}=\frac{7}{10}$.

聚宝盆 在求值中善于观察题目的特点，如符合乘法公式，就利用公式进行计算.这样可以简化运算.

例6 计算(1) $|1-\sqrt{2}|+|\sqrt{2}-\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|$；

(2) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2\,003}+\sqrt{2\,002}}$.

金钥匙 第(1)题利用实数绝对值的性质化去绝对值，再进行加减运算；第(2)题先进行分母有理化，再进行加减运算.

捷径 (1)原式 $=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})=2-1=1$.

(2)原式 $=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2\,003}-\sqrt{2\,002})=\sqrt{2\,003}-1$.

聚宝盆 对于实数 a 来说，$|a|=\begin{cases}a(a>0)\\0(a=0)\\-a(a<0)\end{cases}$ 是十分重要的性质.在有关运算时，首先应判断 a 的正负性，再化简.

例7 计算 (1) $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^{2003}}+1)$.

(2) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2003}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2002}$.

金钥匙 利用乘法结合律，借助于平方差公式 $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$，在第(1)题中添上因式 $(2-1)$ 而计算；第(2)题是逆用

幂的乘积公式.

捷径：(1)原式$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^{2003}}+1)$

$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)\cdots(2^{2^{2003}}+1)$

$=(2^4-1)(2^4+1)\cdots(2^{2^{2003}}+1)$

$=(2^{2^3}-1)\cdots(2^{2^{2003}}+1)$

$=2^{2^{2004}}-1.$

(2)原式$=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2002}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2002}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})]^{2002}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

$=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$

例8　计算：由$\dfrac{2003^3-2\times2003^2-2001}{2003^3+2003^2-2004}$.

金钥匙　算式中数值较大，直接运算较难，不妨用字母表示数，通过对算式的因式分解进行约分化简，再求值.

捷径：设$a=2003$，则原式$=\dfrac{a^3-2a^2+(a-2)}{a^3+a^2-(a+1)}$

$=\dfrac{a^2(a-2)-(a-2)}{a^2(a+1)-(a+1)}=\dfrac{(a-2)(a^2-1)}{(a+1)(a^2-1)}=\dfrac{a-2}{a+1}=\dfrac{2003-2}{2003+1}=\dfrac{2001}{2004}=\dfrac{667}{668}$.

聚宝盆　把数的运算转化到式的化简，是一种避免复杂计算的有效方法.

策略 2　分解因式　形式为积

(因式分解)

经典题

例 1　分解因式.

(1)$ma^2-4ma+4m$；　　(2)$16a^3-a$；

(3)$4x^4y^2-5x^2y^2-9y^2$；(4)$(ab-1)^2+(a+b-2ab)(a+b-2)$.

金钥匙　因式分解的一般步骤是：一提(提公因式)、二套(套用乘法公式)、三叉(十字相乘法)、四分(分组分解法)、五其它进行，对结果要注意化简整理.

捷径：(1)$ma^2-4ma+4m=m(a^2-4a+4)=m(a-2)^2$.

(2)$16a^3-a=a(16a^2-1)=a[(4a)^2-1^2]=a(4a+1)(4a-1)$.

(3)$$\begin{aligned}4x^4y^2-5x^2y^2-9y^2&=y^2(4x^4-5x^2-9)\\&=y^2(4x^2-9)(x^2+1)\\&=y^2(2x-3)(2x+3)(x^2+1).\end{aligned}$$

(4)$$\begin{aligned}&(ab-1)^2+(a+b-2ab)(a+b-2)\\&=(ab-1)^2+(a+b)^2-2(ab+1)(a+b)+4ab\\&=(a+b)^2-2(ab+1)(a+b)+(ab+1)^2\\&=(a+b-ab-1)^2=[a(1-b)-(1-b)]^2\\&=[(1-b)(a-1)]^2=(a-1)^2(b-1)^2.\end{aligned}$$

聚宝盆　总结：在(1)至(3)题中都有公因式可提；在提取公因式后对因式判断是否能继续分解，做到每个因式不能再分解为止. 在(4)题中，由于题中有$(a+b)$，(ab)出现，因此把它们分别看作一个整体，展开后进行因式分解，当$a+b-ab-1$时，注意它能继续分解.

例 2　分解因式$2a^2-b^2-ab+bc+2ac$.

金钥匙　本题可以通过分组分解，由于本题共有五项，可组成“三二”型，在分组时必须预计下一步各组中应含有的公因式. 本题也可以把多项式看作以a为主元素的多项式，然后运用十字相乘法分解.

捷径：$$\begin{aligned}原式&=(2a^2-ab-b^2)+(2ac+bc)\\&=(2a+b)(a-b)+c(2a+b)\end{aligned}$$

$=(2a+b)(a-b+c)$.

聚宝盆 当多项式多于三项时，要分析题目的特征，进行适当的分组，使多项式整体有公因式或分组后能运用公式进行分解因式.

例3 在实数范围内分解因式：$x^4+3x^3+2x^2+3x+1$.

金钥匙 由于多项式的特点，发现把 $2x^2$ 拆成 x^2+x^2 后，则前三项是后三项的 x^2 倍，从而可进行因式分解. 本题也可通过降幂变形，利用整体思想进行因式分解.

捷径 解法一 原式 $=x^2(x^2+3x+1)+(x^2+3x+1)$

$=(x^2+3x+1)(x^2+1)$.

若令 $x^2+3x+1=0$，则解之得 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$，

所以 原式 $=\left(x+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2+1)$.

解法二 原式 $=x^2\left[\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2\right]$

$=x^2\left[\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+3\right)$

$=(x^2+1)(x^2+3x+1)$

$=\left(x+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)(x^2+1)$.

解法三 原式 $=(x^4+2x^2+1)+3x(x^2+1)$

$=(x^2+1)^2+3x(x^2+1)=(x^2+1)(x^2+3x+1)$

$=\left(x+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)(x^2+1)$.

聚宝盆 关于对只含一个字母的高次多项式进行因式分解时，可进行适当的添、拆项，使之有公因式进行因式分解，然后进一步进行因式分解.

例4 当 m 为何值时，$x^2-y^2-2x+6y+m$ 可以分解为两个一次因式.

金钥匙 为使这个多项式分解为两个一次因式，可利用待定系数法，由 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，而设两个一次因式形式为

$(x+y+a)(x-y+b)$，然后利用对应项的系数相等列出方程组，从而求出 m 的值.

捷径：设原式$=(x+y+a)(x-y+b)$，

所以 $x^2-y^2-2x+6y+m=x^2-y^2+(a+b)x+(b-a)y+ab$

所以 $\begin{cases}a+b=-2,\\ b-a=6,\\ ab=m,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-4,\\ b=2,\\ m=-8.\end{cases}$

所以 当 $m=-8$ 时，$x^2-y^2-2x+6y+m$ 可以分解两个一次因式.

聚宝盆

本题是探索型的题目，由于两个一次因式结构需要探索，所以应先分析题目的特征，然后确定某些项，使未知的项尽量少些，待定条件少一些.

例 5 因式分解：(1)$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$，

(2)$(a^2+a+1)(a^2-6a+1)+12a^2$.

金钥匙

将多项式转化为关于某整体的二次三项式，然后再进行因式分解.

捷径：(1)原式$=[(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)]-120$

$$
\begin{aligned}
&=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)-120\\
&=[(x^2-5x)+4][(x^2-5x)+6]-120\\
&=(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)-96\\
&=(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)\\
&=(x-6)(x+1)(x^2-5x+16).
\end{aligned}
$$

(2)原式$=[(a^2+1)+a][(a^2+1)-6a]+12a^2$

$$
\begin{aligned}
&=(a^2+1)^2-5a(a^2+1)+6a^2\\
&=(a^2-2a+1)(a^2-3a+1)=(a-1)^2(a^2-3a+1).
\end{aligned}
$$

聚宝盆

对于高次多项式，通过整体代换达到“降次”的目的，转化到二次三项式的因式分解，这是一种重要方法.

例 6 因式分解(1)x^3-9x+8， (2)x^4+4.

金钥匙

题中两个多项式不能用常规方法分解，必须通过拆、添项后再分组分解.

捷径：(1)$x^3-9x+8=x^3-9x+9-1$

$$=(x^3-1)-(9x-9)$$

$=(x-1)(x^2+x+1)-9(x-1)$

$=(x-1)(x^2+x-8)$，

(2) $x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2$

$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$.

聚宝盆 拆添项方法有一定的技巧，但不外乎使拆添项后组与组之间能有公因式或能用乘法公式. 例如第(1)题也可这样分解.

$x^3-9x+8=x^3-x-8x+8=x(x^2-1)-8(x-1)$

$=x(x-1)(x+1)-8(x-1)=(x-1)(x^2+x-8)$.

例 7　已知乘法公式：

$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$，

$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$，

利用或者不利用上述公式分解因式. $x^8+x^6+x^4+x^2+1$.

金钥匙 本题是将多项式转化为符合给出的乘法公式，然后再进行适当的变形，达到因式分解的目的.

捷径：$x^8+x^6+x^4+x^2+1$

$$=\frac{(x^2-1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}=\frac{(x^5-1)(x^5+1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$.

聚宝盆 学生往往看到多项式和已给的公式无从下手，其实把 x^2 看作为 a，1 看作为 b，从而与公式(2)的右边第二个因式相符，培养学生的逆向思维，然后再利用平方差公式，使分子转化为与已知的二个公式相符的形式，从而进行因式分解.

例 8　(1)证明：3^8-4^6 能被 17 整除，

(2)一个自然数 a 恰等于另一个自然数 b 的立方，则称自然数 a 为完全立方数，如 $27=3^3$. 27 就是一个完全立方数，若 $a=19\ 951\ 993\times19\ 951\ 995^3-19\ 951\ 994\times19\ 951\ 992^3$. 求证：$a$ 是一个完全立方数.

金钥匙 (1)由于多项式是两项的偶次幂的差，因此可考虑将其转化为平方差的形式：然后转化为一个因式是 17 的因数即