初等几何

数学系编

一九七八年二月

初等几何　　目录

初 等 几 何

引 言

毛主席教导我们：**“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一门科学的对象。”**我们周围的各个物体，它们除了有颜色、重量、硬度等方面的差别外，还有形状、大小和位置的差别。对我们周围物体的形状、大小、位置关系的研究，是很重要的。例如，飞机的形状，要求能适合高速度的飞行；人民公社修建粮仓的大小，要求能储藏一定数量的谷物；生产队的晒谷场，要求选择在受光时间长且有利于运输的位置上，等等。几何学就是研究物体的形状、大小、位置这些方面的特殊矛盾的科学。

恩格斯指出：**“和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。 ，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长宽高的点，没有厚度和宽度的线……。”**这些仅有位置的点、仅有长度的线

和仅有长宽的面，是在现实的基础上高度抽象的产物，是组成几何图形的基本元素。

列宁指出：**“物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象以及其他等等，一句话，一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。”**因此我们研究由抽象的点、线、面所构成的几何图形，不是为抽象而抽象，而是为了反映自然，改造自然。

所有的点都在同一个平面内的图形，叫做平面图形；所有的点不全在同一个平面内的图形，叫做空间图形。本书第一至六章讨论平面图形，第七章讨论空间图形。

第一章　预备知识

第一节　直线

直线是组成几何图形的一个基本元素。拉紧的细线，从小孔射进室内的光线，都是笔直的，给人们以直线的形象。由于空间的无限性，对于一条直线，我们要想象它的两方是可以无限伸长的。

直线通常用它上面任意两个点的大写字母来表示，也可以只用一个小写字母来表示。如图1—1中的两条直线，分别记作“直线AB”和“直线a”。

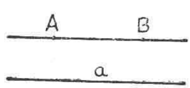


图1—1

实践告诉我们，直线具有下面一个性质：

经过两个不同的点可以作一条直线，并且只能作一条直线。

例如，木工师傅在木板上画直线时，经过木板上两个点，用拉紧的墨线可以弹出一条直线，而且也只有一条。

象几何图形这样的基本性质，已经为人们反复的实践所证实，可以作为今后推理的出发点，我们叫它做几何学的公理。根据这条公理，可以推得下面一个判断：

两条不同的直线，最多只有一个公共点。

因为两条直线如果有两个公共点，那么根据上述公理，这两条直线就重合了。

如果两条不同的直线有公共点，我们称这公共点为两直线的交点，这时叫两直线相交。

这样，关于几何图形性质的判断，如果能够用逻辑推理的方法证明它是正确的，这就叫几何学的定理。

在直线上的一个点，把这直线分成两个部分；每一部分都象从发光点射出的光线，称为射线。这个点称为射线的端点，因此射线只能在一个方向无限伸长。

射线通常用它的端点和射线上另外任意一点的大写字母来表示，端点的字母写在前面。如图1—2中的射线，记作“射线OP”。

桌子或书本的边缘都有两个端点，因此可以把它看作是直线上两点间的一部分。我们把直线上任意两点间的部分叫做线段。

在这里，“直线上任意两点间的部分叫做线段”这句话，明确地指出了“线段”这个名字的意义，象这种明确指出一个名字或关系的意义的语句，在数学上称为定义。

图1—2

图1—3

线段通常用它的两个端点的大写字母来表示，如图1—3中的线段，记作“AB”。

直线和射线都是无限伸长的，它们相互间不能比较长短，

线段的长短，是由它的两个端点所限定的，用迭合的方法可以比较两条线段的长短。如图1—4所示，要比较线段AB和CD的长短，可以把AB放在CD上，使A点和C点重合，并使AB顺着CD落下：

（Ⅰ）如果B点和D点重合，这时叫线段AB和线段CD相等，记为$A=CD$；

（Ⅱ）如果B点落在C、D之间，这时叫线段AB小于线段CD，记为$AB<CD$；

（Ⅲ）如果B点落在CD的延长线上，这时叫线段AB大于线段CD，记为$AB>CD$。

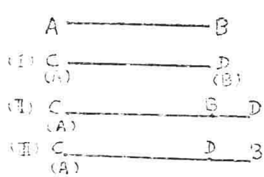


图1—4

图1—5

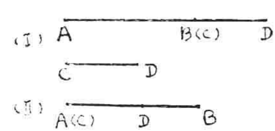


图1—6

如果线段AB上的点M，使 $AM=MB$，我们说 M点平分AB。平分一条线段的点叫做这条线段的中点。每一条线段只有一个中点。

要求两已知线段AB、CD的和，只要如图1—6（Ⅰ）所示，将C点与B点重合，CD顺着AB线段的延长线落下，则AD就是AB、CD的和。并记为$AB+CD=AD$。

图 1—6(Ⅱ)告诉了我们求两条线段差的方法，即DB是AB与CD之差，通常记为$AB-CD=DB$。

问：已知三条线段AB、CD、EF，怎样求$AB+CD-EF$？

人们为了对任意的两线段进行比较与加减，不一定要像上面所说迭合的办法。而是用一已知线段作标准，比如常用的市尺，叫做单位线段。其他线段与单位线段进行比较，看它含有多少单位线段，这个数就叫该线段的长度。单位线段的长度是1。通常说A、B两点间的距离，就是以A、B为端点的线段AB的长度。线段有了长度，我们就可以用来比较任意两线段的长短，也可求两线段的和或差等等。在这里，我们把图形的比较转化为数的比较，就是通常说的数形结合。所以线段的长短人们也常说成线段的大小。

第二节　角

一、角的概念

尖嘴的锄头，人字屋架……等等，在人们的实践中引起了多次的感觉和印象，如果不管它们是木制的还是铁制的，从纯粹的状态中研究它们的形象，我们得到角的定义。

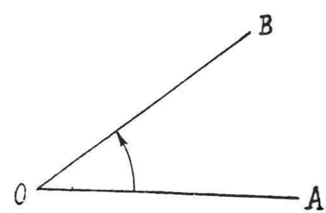


图1—7

从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角。如图1—7，就是从点O引出的两条射线OA、OB，它们构成了一个角。点O叫做角的顶点，射线OA、OB

叫做角的边，这角记为$\angle AOB$，也可记为$\angle O$。

在客观实践中，角不都是静止的。如钟表上的时针和分针所成的角，它是由旋转而形成的。因此从运动的观点来考察，角又可以看成是由一条射线围绕着它的端点旋转而形成的。如图1—7中的$\angle AOB$，可看作是射线OA绕着端点O旋转到新的位置OB而形成的。原来的位置OA叫做角的始边，新的位置OB叫做角的终边。旋转时射线在平面上经过的一部分通常称为角的内部，另一部分称为角的外部。

二、角的大小

角的大小是由它的两条边张开的程度来决定的，因为角的两边是射线，所以角的大小与所画边的长短无关。

如图1—8所示，要比较$\angle AOB$和$\angle A_1O_1B_1$的大小，可以把$\angle AOB$放在$\angle A_1O_1B_1$上，使顶点O和顶点O_1重合，始边OA和始边OA_1重合，而OB和O_1B_1同在O_1A_1的一侧：

（Ⅰ）如果终边OB和终边O_1B_1重合，那么就说这两角相等，简称等角，写成$\angle AOB=A_1O_1B_1$；

（Ⅱ）如果终边OB落在$\angle A_1O_1B_1$的内部，就说$\angle AOB$小于$\angle A_1O_1B_1$，写成$\angle AOB<\angle A_1O_1B_1$；

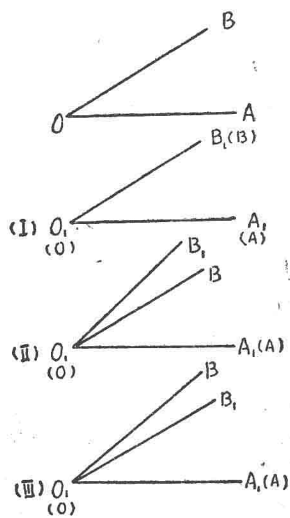


图1—8

（Ⅲ）如果终边OB落在$\angle A_1O_1$的外部，就说$\angle AOB$大于$\angle A_1O_1B_1$，写成

$\angle AOB > \angle A_1O_1B_1$。

如果一条射线OM把$\angle AOB$分成两个相等的角，即$\angle AOM = \angle MOB$(图1—9)，就说 OM 平分$\angle AOB$。平分一个角的射线叫做这个角的平分线，显然每个角只有一条平分线。

要求两角$\angle AOB$、$\angle A_1O_1B_1$的和，只要把O_1与O重合，$\angle A_1O_1B_1$的始边O_1A_1与$\angle AOB$的终边OB重合，并使OA、O_1B_1在OB的异侧，则$\angle AOB_1$（如图1—10)就是所求之和。写成$\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = \angle AOB_1$。

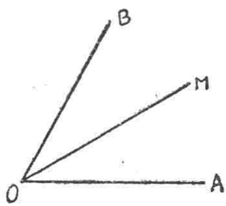


图1—9

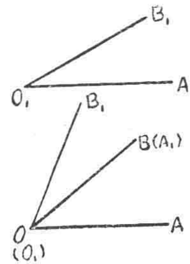


图1—10

至于求两角的差，图1—8（Ⅱ)告诉我们，$\angle BO_1B_1$ 就是$\angle A_1O_1B_1$ 与 $\angle AOB$ 之差，写成 $\angle A_1O_1B_1 - \angle AOB = \angle BO_1B_1$。

如图 1—11中，射线 OA 绕O点逆时针旋转时，它经过OB_1、OB_2、OB_3、OB_4等位置，转动一圈而回复到原始位置 OA'，那么 $\angle AOB_1 < \angle AOB_2 < \angle AOB < \angle AOB_4 < \angle AOA'$。

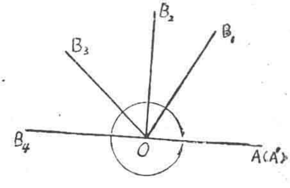


图1—11

图中OB_4与OA成一直线，OA'与OA重合。于是得到下面的定义：

始边旋转到与终边成一直线时所形成的角叫做平角，如$\angle AOB_4$。始边旋转到与终边重合时所形成的角叫做周角，如$\angle AOA'$。

实际上，一个平角可以平分为两个相等的角。我们把平角的一半叫做直角。为了区分其他各角，我们又以直角、平角、周角为标准，把小于一直角的角叫做锐角，如$\angle AOB_1$；大于一直角而小于一平角的角叫钝角，如$\angle AOB_3$；大于一平角而小于一周角的角叫做优角。

问1、凡平角都相等吗，为什么？

问2、凡直角都相等吗，为什么？

我们看到，图1—11中射线OA绕O点旋转逐渐增大时，角的变化过程是由锐角经直角、钝角而平角，再由平角经优角不断增大而成周角的。

如果把两根木条如图用螺丝钉活动地连接起来，做一个角的模型。先把两木条合拢，然后旋转一条，顺次可组成锐角、直角、钝角、平角和周角。这就是生产中常用的活络角尺。

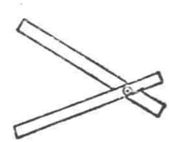
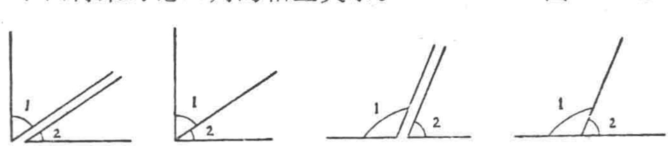


图1—12

下面再来讨论两角的相互关系。



甲　　图1—13　　乙

如果两个角的和等于一个直角。那么这两个角叫做互为余角（如图1—13甲），或者说其中一个角是另一个角的余角；如果两个角的和等于一个平角，那么这两个角叫做互为补角，（如图1—13乙），或者说其中一个角是另一个角的补角。

问　锐角的余角是怎样的角？又锐角、直角、钝角的补角各是怎样的角？

三、角的度量

为了便于从数值上研究角的大小，我们把一个周角分成360等份，每一份叫做一度。把一度分成60等份，每一份叫做一分。把一分成60等份，每一份叫做一秒。以度、分、秒为单位，如果量得一角是53度46分37秒，就记为$53°46'37''$，这种量角的制度叫做角度制或六十分制。通常用的量角器就是度量角的工具，但它只能精确到$1°$。有了角的度量，我们就可以用它来比较角的大小，求它们的和、差等。与线段一样，这样就由形的比较转化为数的比较了。

这里，我们应记住：

1周角＝$360°$，1平角＝$180°$，1直角＝$90°$，

锐角比$90°$小，钝角比$90°$大而比$180°$小。

问1、说出下列各角的余角各是多少度？

$30°$、$45°$、$72°$、$81°5'$、$n°$

问2、说出下列各角的补角各是多少度？

$70°25'$、$135°45'$、$90°$、$m°$

问3、“$\angle A$是一个补角”。这句话对不对。