

初等几何

数学系编

一九七八年二月

初等几何 目录

引言.....	(1)
---------	-------

第一章 预备知识

第一节 直线.....	(3)
-------------	-------

第二节 角

一、角的概念.....	(6)
-------------	-------

二、角的大小.....	(7)
-------------	-------

三、角的度量.....	(10)
-------------	--------

第三节 相交直线.....	(11)
---------------	--------

习 题.....	(13)
----------	--------

第四节 平行直线

一、平行线的概念.....	(15)
---------------	--------

二、平行线的判定.....	(17)
---------------	--------

三、平行线的性质.....	(20)
---------------	--------

习 题.....	(23)
----------	--------

第二章 三角形

第一节 一个三角形

一、三角形的概念.....	(26)
---------------	--------

二、三角形的边、角关系.....	(29)
------------------	--------

习 题	(31)
习 题	(39)
第二节 两个三角形	
一、全等三角形	(44)
二、三角形全等的判定	(45)
习 题	(52)
第三节 线段的中垂线和角的平分线	(57)
习 题	(61)
第四节 作图的基本知识	(63)
习 题	(68)

第三章 四边形

第一节 特殊四边形	
一、平行四边形	(71)
二、特殊的平行四边形	(76)
三、梯形	(80)
习 题	(83)
第二节 平行线等分线段定理	(89)
习 题	(91)
第三节 对称图形	
一、轴对称图形	(94)
二、中心对称图形	(97)
习 题	(101)

第四章 相似形

第一节 线段的比和成比例的线段

一、线段的比和比例·····	(103)
二、比例的性质·····	(104)
习 题·····	(107)
第二节 平行线截得的比例线段·····	(110)
习 题·····	(116)
第三节 相似三角形	
一、相似多边形·····	(119)
二、相似三角形的判定·····	(120)
习 题·····	(127)
三、相似三角形的性质·····	(130)
四、勾股定理·····	(134)
习 题·····	(139)
第四节 位似图形	
一、位似变换·····	(143)
二、放缩尺·····	(145)
习 题·····	(146)

第五章 圆

第一节 一个圆	
一、圆的确定·····	(151)
二、圆的对称性·····	(152)
三、圆心角、圆周角与弧·····	(155)
习 题·····	(162)
第二节 直线与圆	
一、直线与圆的位置关系·····	(167)
二、切线的性质·····	(168)

三、弦切角·····	(171)
四、有关圆的比例线段·····	(173)
习 题·····	(177)
第三节 两个圆	
一、两圆的位置关系·····	(181)
二、两圆的公切线·····	(182)
三、直线和弧、弧和弧的吻接·····	(187)
习 题·····	(189)
第四节 正多边形与圆	
一、等分圆周·····	(193)
二、圆周长·····	(198)
习 题·····	(203)

第六章 轨迹

第一节 轨迹的意义·····	(207)
第二节 轨迹命题的证明·····	(209)
第三节 轨迹在作图中的应用·····	(215)
习 题·····	(216)

第七章 空间直线和平面

第一节 平面	
一、平面及其基本性质·····	(218)
二、水平放置着的平面图形的画法·····	(222)
习 题·····	(226)
第二节 直线与直线的位置关系	
一、空间两直线的位置关系·····	(226)

二、平行直线	(228)
三、异面直线所成的角	(231)
习 题	(232)
第三节 直线与平面的位置关系	
一、直线与平面的平行	(234)
二、直线与平面的垂直	(236)
三、平面的垂线和斜线的长	(239)
四、直线和平面所成的角	(243)
习 题	(244)
第四节 平面与平面的位置关系	
一、平行平面	(247)
二、二面角、二面角的平面角	(251)
三、垂直平面	(253)
习 题	(257)
第五节 多面角	(259)
习 题	(263)

第八章 几何中的逻辑知识初步

第一节 几何概念	(264)
一、概念的内涵与外延	(264)
二、概念的定义	(266)
三、概念的分类	(268)
习 题	(269)
第二节 几何命题	
一、几何命题的意义	(269)
二、几何命题的四种形式与关系	(270)

三、充分条件、必要条件、充要条件.....	(274)
习 题.....	(275)
第三节 几何的推理	
一、逻辑思维的基本规律.....	(277)
二、几何中的推理.....	(279)
习 题.....	(282)
第四节 几何命题的证明	
一、证明的意义与表达形式.....	(283)
二、间接的证明法—反证法.....	(285)
三、证明与解题前的分析.....	(288)
习 题.....	(291)
附表一.....	(293)
附表二.....	(295)

初 等 几 何

引 言

毛主席教导我们：“科学研究的区分，就是根据科学对象所具有的特殊的矛盾性。因此，对于某一现象的领域所特有的某一种矛盾的研究，就构成某一门科学的对象。”我们周围的各个物体，它们除了有颜色、重量、硬度等方面的差别外，还有形状、大小和位置的差别。对我们周围物体的形状、大小、位置关系的研究，是很重要的。例如，飞机的形状，要求能适合高速度的飞行；人民公社修建粮仓的大小，要求能储藏一定数量的谷物；生产队的晒谷场，要求选择在受光时间长且有利于运输的位置上，等等。几何学就是研究物体的形状、大小、位置这些方面的特殊矛盾的科学。

恩格斯指出：“和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。 ，为了能够从纯粹的状态中研究这些形式和关系，必须使它们完全脱离自己的内容，把内容作为无关重要的东西放在一边；这样，我们就得到没有长宽高的点，没有厚度和宽度的线……。”这些仅有位置的点、仅有长度的线

和仅有长宽的面，是在现实的基础上高度抽象的产物，是组成几何图形的基本元素。

列宁指出：“**物质的抽象，自然规律的抽象，价值的抽象以及其他等等，一句话，一切科学的（正确的、郑重的、非瞎说的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。**”因此我们研究由抽象的点、线、面所构成的几何图形，不是为抽象而抽象，而是为了反映自然，改造自然。

所有的点都在同一个平面内的图形，叫做平面图形；所有的点不全在同一个平面内的图形，叫做空间图形。本书第一至六章讨论平面图形，第七章讨论空间图形。

第一章 预备知识

第一节 直线

直线是组成几何图形的一个基本元素。拉紧的细线，从小孔射进室内的光线，都是笔直的，给人们以直线的形象。由于空间的无限性，对于一条直线，我们要想象它的两方是可以无限伸长的。

直线通常用它上面任意两个点的大写字母来表示，也可以只用一个小写字母来表示。如图1—1中的两条直线，分别记作“直线 AB ”和“直线 a ”。

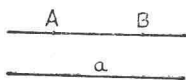


图1—1

实践告诉我们，直线具有下面一个性质：

质：

经过两个不同的点可以作一条直线，并且只能作一条直线。

例如，木工师傅在木板上画直线时，经过木板上两个点，用拉紧的墨线可以弹出一条直线，而且也只有一条。

象几何图形这样的基本性质，已经为人们反复的实践所证实，可以作为今后推理的出发点，我们叫它做几何学的公理。根据这条公理，可以推得下面一个判断：

两条不同的直线，最多只有一个公共点。

因为两条直线如果有两个公共点，那么根据上述公理，这两条直线就重合了。

如果两条不同的直线有公共点，我们称这公共点为两直线的交点，这时叫两直线相交。

这样，关于几何图形性质的判断，如果能够用逻辑推理的方法证明它是正确的，这就叫几何学的定理。

在直线上的一个点，把这直线分成两个部分；每一部分都象从发光点射出的光线，称为射线。这个点称为射线的端点，因此射线只能在一个方向无限伸长。

射线通常用它的端点和射线上另外任意一点的大写字母来表示，端点的字母写在前面。如图1—2中的射线，记作“射线 OP ”。

桌子或书本的边缘都有两个端点，因此可以把它看作是直线上两点间的一部分。我们把直线上任意两点间的部分叫做线段。

在这里，“直线上任意两点间的部分叫做线段”这句话，明确地指出了“线段”这个名字的意义，象这种明确指出一个名字或关系的意义的语句，在数学上称为定义。



图1—2



图1—3

线段通常用它的两个端点的大写字母来表示，如图1—3中的线段，记作“ AB ”。

直线和射线都是无限伸长的，它们相互间不能比较长短，

线段的长短，是由它的两个端点所限定的，用迭合的方法可以比较两条线段的长短。如图1—4所示，要比较线段 AB 和 CD 的长短，可以把 AB 放在 CD 上，使 A 点和 C 点重合，并使 AB 顺着 CD 落下：

(I) 如果 B 点和 D 点重合，这时叫线段 AB 和线段 CD 相等，记为 $AB = CD$ ；

(II) 如果 B 点落在 C 、 D 之间，这时叫线段 AB 小于线段 CD ，记为 $AB < CD$ ；

(III) 如果 B 点落在 CD 的延长线上，这时叫线段 AB 大于线段 CD ，记为 $AB > CD$ 。

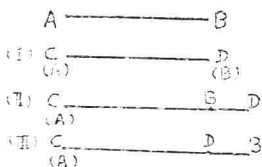


图1—4

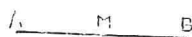


图1—5

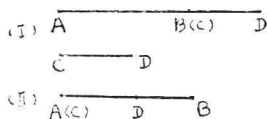


图1—6

如果线段 AB 上的点 M ，使 $AM = MB$ ，我们说 M 点平分 AB 。平分一条线段的点叫做这条线段的中点。每一条线段只有一个中点。

要求两已知线段 AB 、 CD 的和，只要如图1—6(I)所示，将 C 点与 B 点重合， CD 顺着 AB 线段的延长线落下，则 AD 就是 AB 、 CD 的和。并记为 $AB + CD = AD$ 。

图 1—6(Ⅰ) 告诉了我们求两条线段差的方法，即 DB 是 AB 与 CD 之差，通常记为 $AB - CD = DB$ 。

问：已知三条线段 AB 、 CD 、 EF ，怎样求 $AB + CD - EF$ ？

人们为了对任意的两线段进行比较与加减，不一定要像上面所说适合的办法。而是用一已知线段作标准，比如常用的市尺，叫做单位线段。其他线段与单位线段进行比较，看它含有多少单位线段，这个数就叫该线段的长度。单位线段的长度是 1。通常说 A 、 B 两点间的距离，就是以 A 、 B 为端点的线段 AB 的长度。线段有了长度，我们就可以用来比较任意两线段的长短，也可求两线段的和或差等等。在这里，我们把图形的比较转化为数的比较，就是通常说的数形结合。所以线段的长短人们也常说成线段的大小。

第二节 角

一、角的概念

尖嘴的锄头，人字屋架……等等，在人们的实践中引起了多次的感觉和印象，如果不管它们是木制的还是铁制的，从纯粹的状态中研究它们的形象，我们得到角的定义。

从一点引出的两条射线所组成的图形叫做角。如图 1—7，就是从点 O 引出的两条射线 OA 、

OB ，它们构成了一个角。点 O 叫做角的顶点，射线 OA 、 OB

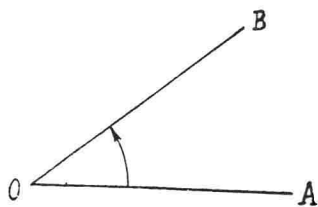


图 1—7

叫做角的边，这角记为 $\angle AOB$ ，也可记为 $\angle O$ 。

在客观实践中，角不都是静止的。如钟表上的时针和分针所成的角，它是由旋转而形成的。因此从运动的观点来考察，角又可以看成是由一条射线围绕着它的端点旋转而形成的。如图1—7中的 $\angle AOB$ ，可看作是射线 OA 绕着端点 O 旋转到新的位置 OB 而形成的。原来的位置 OA 叫做角的始边，新的位置 OB 叫做角的终边。旋转时射线在平面上经过的一部分通常称为角的内部，另一部分称为角的外部。

二、角的大小

角的大小是由它的两条边张开的程度来决定的，因为角的两边是射线，所以角的大小与所画边的长短无关。

如图1—8所示，要比较 $\angle AOB$ 和 $\angle A_1O_1B_1$ 的大小，可以把 $\angle AOB$ 放在 $\angle A_1O_1B_1$ 上，使顶点 O 和顶点 O_1 重合，始边 OA 和始边 O_1A_1 重合，而 OB 和 O_1B_1 同在 O_1A_1 的一侧：

(I) 如果终边 OB 和终边 O_1B_1 重合，那么就说这两角相等，简称等角，写成 $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$ ；

(II) 如果终边 OB 落在 $\angle A_1O_1B_1$ 的内部，就说 $\angle AOB$ 小于 $\angle A_1O_1B_1$ ，写成 $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$ ；

(III) 如果终边 OB 落在 $\angle A_1O_1B_1$ 的外部，就说 $\angle AOB$ 大于 $\angle A_1O_1B_1$ ，写成

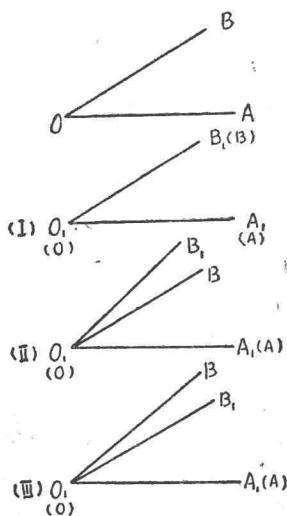


图1—8

$$\angle AOB > \angle A_1O_1B_1。$$

如果一条射线 OM 把 $\angle AOB$ 分成两个相等的角，即 $\angle AOM = \angle MOB$ (图1—9)，就说 OM 平分 $\angle AOB$ 。平分一个角的射线叫做这个角的平分线，显然每个角只有一条平分线。

要求两角 $\angle AOB$ 、 $\angle A_1O_1B_1$ 的和，只要把 O_1 与 O 重合， $\angle A_1O_1B_1$ 的始边 O_1A_1 与 $\angle AOB$ 的终边 OB 重合，并使 OA 、 O_1B_1 在 OB 的异侧，则 $\angle AOB_1$ (如图1—10) 就是所求之和。写成 $\angle AOB + \angle A_1O_1B_1 = \angle AOB_1$ 。

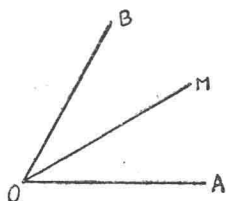


图1—9

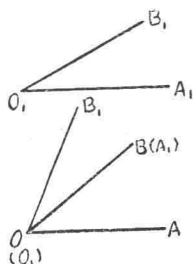


图1—10

至于求两角的差，图1—8 (I) 告诉我们， $\angle BO_1B_1$ 就是 $\angle A_1O_1B_1$ 与 $\angle AOB$ 之差，写成 $\angle A_1O_1B_1 - \angle AOB = \angle BO_1B_1$ 。

如图1—11中，射线 OA 绕 O 点逆时针旋转时，它经过 OB_1 、 OB_2 、 OB_3 、 OB_4 等位置，转动一圈而回到原始位置 OA' ，那么 $\angle AOB_1 < \angle AOB_2 < \angle AOB_3 < \angle AOB_4 < \angle AOA'$ 。

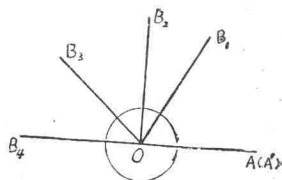


图1—11

图中 OB_4 与 OA 成一直线， OA' 与 OA 重合。于是得到下面的定义：

始边旋转到与终边成一直线时所形成的角叫做平角，如 $\angle AOB_4$ 。始边旋转到与终边重合时所形成的角叫做周角，如 $\angle AOA'$ 。

实际上，一个平角可以平分为两个相等的角。我们把平角的一半叫做直角。为了区分其他各角，我们又以直角、平角、周角为标准，把小于一直角的角叫做锐角，如 $\angle AOB_1$ ；大于一直角而小于一平角的角叫钝角，如 $\angle AOB_3$ ；大于一平角而小于一周角的角叫做优角。

问 1、凡平角都相等吗，为什么？

问 2、凡直角都相等吗，为什么？

我们看到，图 1—11 中射线 OA 绕 O 点旋转逐渐增大时，角的变化过程是由锐角经直角、钝角而平角，再由平角经优角不断增大而成周角的。

如果把两根木条如图用螺丝钉活动地连接起来，做一个角的模型。先把两木条合拢，然后旋转一条，顺次可组成锐角、直角、钝角、平角和周角。这就是生产中常用的活络角尺。

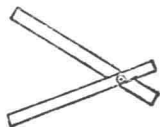
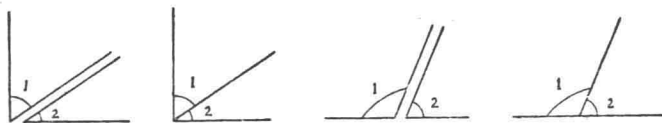


图 1—12

下面再来讨论两角的相互关系。



甲

图 1—13

乙

如果两个角的和等于一个直角。那么这两个角叫做互为余角（如图1—13甲），或者说其中一个角是另一个角的余角；如果两个角的和等于一个平角，那么这两个角叫做互为补角，（如图1—13乙），或者说其中一个角是另一个角的补角。

问 锐角的余角是怎样的角？又锐角、直角、钝角的补角各是怎样的角？

三、角的度量

为了便于从数值上研究角的大小，我们把一个周角分成360等份，每一份叫做一度。把一度分成60等份，每一份叫做一分。把一分成60等份，每一份叫做一秒。以度、分、秒为单位，如果量得一角是53度46分37秒，就记为 $53^{\circ}46'37''$ ，这种量角的制度叫做角度制或六十分制。通常用的量角器就是度量角的工具，但它只能精确到 1° 。有了角的度量，我们就可以用它来比较角的大小，求它们的和、差等。与线段一样，这样就由形的比较转化为数的比较了。

这里，我们应记住：

1 周角 $=360^{\circ}$ ，1 平角 $=180^{\circ}$ ，1 直角 $=90^{\circ}$ ，

锐角比 90° 小，钝角比 90° 大但比 180° 小。

问1、说出下列各角的余角各是多少度？

30° 、 45° 、 72° 、 $81^{\circ}5'$ 、 n°

问2、说出下列各角的补角各是多少度？

$70^{\circ}25'$ 、 $135^{\circ}45'$ 、 90° 、 m°

问3、“ $\angle A$ 是一个补角”。这句话对不对。