高等学校教材

高等数学学习指导

于 力 李广民

AO DENG SHU XUE
XUE XI ZHI DAO

西安电子科技大学出版社

高等数学学习指导

于 力　　李广民

西安电子科技大学出版社
1 9 9 3

（陕）新登字 010 号

高等数学学习指导

力　李广民

责任编辑　梁家新

西安电子科技大学出版社出版发行

西安电子科技大学印刷厂印刷

新华书店经销

开本 787×1092 1/32　印张 11 12/32　字数 241 千字

1993 年 6 月第 1 版　1993 年 8 月第 2 次印刷　印数 5 101－15 100

ISBN 7－5606－0244－4/O・0013（课）　　定价：5.90 元

前　言

这本学习指导及《高等数学基本训练》是与《高等数学》教材配套使用的。全书共分十一章，各章由以下几部分组成：

一、内容提要

按《高等数学》（上、下册）教材的顺序，以表格的形式总结每章中的主要概念、定义、性质、定理、公式等基本内容。便于查阅使用。

二、基本要求

根据教学大纲要求，指出每章各部分应掌握的程度。

三、题型分析

通过对一些典型例题的分析、解答和评注，帮助学生弄清基本概念，掌握解题思路，总结解题方法。

四、习题选解

我们对部分习题作了解答，供学生在独立完成该章各节的基本练习后，核对及参考用。

五、自我检查题

这是供学生检查自己的学习情况而设置的习题，在附录

Ⅰ中给出了自我检查题的全部答案。

附录Ⅱ是《高等数学基本训练》的答案。

本书由周荣星、王公宇教授审阅。在编写过程中，祝向荣、周荣星教授等人给予了许多指导和帮助。在此，对他们一并表示感谢。

由于我们水平有限，时间仓促，书中难免有错误，恳请读者批评指正。

编者

1992．11

目　　录

第一章　函数、极限与连续

一、内 容 提 要

1. 函数的定义

	定　　义	记　　号
函　数	对于任意的 $x\in D$，依照一定的规律，总有唯一确定的值 y 与之对应，则称 y 是 x 的函数	$y=f(x)$，$x\in D$ D：定义域 $f(\ )$：对应规律
基　本 初等函数	幂函数：$y=x^{a}$，$x\in(0,+\infty)$，a 为实数 指数函数：$y=a^{x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$(a>0,\ a\neq1)$ 对数函数：$y=\log_a x$，$x\in(0,+\infty)$，$(a>0,\ a\neq1)$ 三角函数： $y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$ $y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$ $y=\operatorname{tg} x$，$x\neq\dfrac{(2k+1)\pi}{2}$，$k=0,\pm1,\pm2\cdots$ $y=\operatorname{ctg} x$，$x\neq k\pi$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 反三角函数： $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$ $y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$	

续表

	定　　义	记　　号
	$y=\operatorname{arctg} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$ $y=\operatorname{arcctg} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$	
初等函数	由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而得到由一个式子来表达的函数	例 $y=\sin^2 x$ $y=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$ $y=e^{2x}+\sqrt{1+x^2}$
非初等函数	不是初等函数的函数	例 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$

2. 函数的性质

$f(x)$	定义域	定　　义	例
单调增（减）	(a,b)	$\forall\ x_1,x_2\in(a,b)$，有 $f(x_1)<f(x_2)$ （$f(x_1)>f(x_2)$）	$y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$ $y=\frac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

续表

$f(x)$	定义域	定　义	例
有界性	(a, b)	$\exists M>0$，对 $\forall x\in(a, b)$，有 $\lvert f(x)\rvert<M$	$y=\frac{1}{1+x^2}$，$x\in(-\infty, +\infty)$ $y=\sin x$，$x\in(-\infty, +\infty)$
奇(偶)性	$(-l, l)$	$\forall x\in(-l, l)$，有 $f(-x)=-f(x)$ $(f(-x)=f(x))$	$y=\mathrm{arctg}\, x+x^3$ $y=\cos x+x^2$
周期性	$(-\infty, +\infty)$	$\exists T>0$，有 $f(x+T)=f(x)$	$y=\cos x$，$T=2\pi$

对于函数的性质要从函数图形的特点来把握.

3. 函数极限的定义

函　数	自变量的变化过程	自变量变到一定阶段	因变量与 A 任意接近	记　号
数列 $x_n=f(n)$	$n\to\infty$	$n>N$	$\lvert x_n-A\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$
$y=f(x)$	$x\to x_0$	$0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$
	单侧 $x\to x_0-0$	$0<x_0-x<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$
	单侧 $x\to x_0+0$	$0<x-x_0<\delta$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$
	$x\to\infty$	$\lvert x\rvert>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$
	单侧 $x\to+\infty$	$x>X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$
	单侧 $x\to-\infty$	$x<-X$	$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

续表

函　数	自变量的变化过程	自变量变到一定阶段	因变量与A任意接近	记　号
无穷小	当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，$\alpha(x)$以零为极限			$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$
无穷大	当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，$f(x)$的绝对值无限增大			$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty$

4. 极限的存在准则及两个重要极限

准　则	内　　容	重要极限
夹逼准则	若 $y_n\le x_n\le z_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=A$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
单调有界准　则	单调有界数列必有极限	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

5. 函数连续性的定义

类　型	定　　义	注
在 $x=x_0$ 处连续	$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Longleftrightarrow\begin{cases}1^\circ\ f(x_0)\text{存在}\\2^\circ\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\\3^\circ\ f(x_0)=A\end{cases}$ $\Leftrightarrow\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，其中 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$	若 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则称 $f(x)$ 在 x_0 处间断
在 (a,b) 内连续	$\forall x_0\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$	初等函数在定义区间内是连续的
在 $[a,b]$ 上连续	$\forall x_0\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$ 及 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$	

6. 函数间断点的分类

第一类		第二类	
可去型	跳跃型	无穷型	振荡型
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ $=A\neq f(x_0)$； $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 但 $f(x_0)$ 不存在	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\neq$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在， 且当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 无一定趋向，而永远振荡

7. 闭区间上连续函数的性质

最大、最小值性质	闭区间上的连续函数必在该区间上取得最大值与最小值，即 $\exists\ x_1,\ x_2\in[a,\ b]$，对 $\forall\ x\in[a,\ b]$ 有 $f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$
介值性质	若 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，c 是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任何一个数，则存在 $\xi\in(a,\ b)$，使得 $f(\xi)=c$

二、基 本 要 求

(1) 掌握函数的概念．在函数概念中应特别注意定义域、函数关系、值域这三个环节．

(2) 熟练掌握基本初等函数的定义及其图像、定义域及简单性质．

(3) 搞清楚复合函数、初等函数概念．会求初等函数的

定义域.

(4) 正确理解数列极限及函数极限的概念.

(5) 会用极限的有理运算和其它方法，以及应用两个重要极限去熟练地计算极限.

(6) 理解无穷小量及其比较.

(7) 掌握函数连续性的概念及其运算法则，明确基本初等函数和初等函数的连续性，会求函数的间断点并判定其类型.

三、题 型 分 析

例 1 求函数 $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域.

解 这个函数是两个函数 $y_1=\lg(x-1)$，$y_2=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$的和. 由对数的定义，应有 $x-1>0$；要使$\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$有意义，应有 $x+1>0$，即

$$\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases},\qquad \text{或}\qquad \begin{cases}x>1\\x>-1\end{cases}$$

从而，$y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域为 $D=\{x|x>1\}\cap\{x|x>-1\}$，即 $D=\{x|x>1\}$.

例 2 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x^2(x-4)}{(x^2-1)(9-x^2)}}$ 的定义域.

解 由于在实数范围内，负数不能开平方，所以

$$\frac{x^2(x-4)}{(x^2-1)(9-x^2)}\geqslant 0$$

因此，需要解以下的不等式组：

$$(\text{i})\begin{cases}x^2(x-4)\geqslant 0\\(x^2-1)(9-x^2)>0;\end{cases}\quad(\text{ii})\begin{cases}x^2(x-4)\leqslant 0\\(x^2-1)(9-x^2)<0.\end{cases}$$

由(i)，要求 $x\geqslant 4$ 及 $x^2>1$，且 $x^2<9$ 同时成立，故无解；由(ii)，不等式组可简化为：

$$\begin{cases}x\leqslant 4\\x^2>1\text{ 且 }x^2>9,\end{cases}\qquad\begin{cases}x\leqslant 4\\x^2<1\text{ 且 }x^2<9.\end{cases}$$

解之得函数的定义域为 $(-\infty,-3)\cup(-1,1)\cup(3,4]$.

例 3　设 $y=\begin{cases}x^2+1, & -1<x<2\\x^3-3, & 2<x\leqslant 4,\end{cases}$ 求定义域.

解　这是一个用两个式子来表示的一个函数(注意这是一个函数，而不是两个函数). 它的定义域 $D=(-1,2)\cup(2,4]$.

[**小结**] (1) 在微积分中，我们都是在实数范围内进行讨论. 求函数的定义域，就是在实数范围内求出能使函数有对应值的实数的全体.

(2) 在对数函数中，其定义域是真数部分大于零的那些 x 的全体.

(3) 在分式函数中，其定义域是使分母不为零的 x 的集合.

(4) 在无理函数中遇到偶次方根时，定义域是被开方式为非负数的实数集合.

(5) 如果函数不是用一个式子来表示，而是用几个式子来表示的分段函数，则其定义域为各分段函数的定义区间的并(例 3).

(6) 如果给定的函数是由基本初等函数经过四则运算而

得到的，则定义域是各个基本初等函数的定义域的交集（如例 1）.

例 4　设 $\varphi(t)=t^3+1$，求 $\varphi(t^2)$，$[\varphi(t)]^2$，$\varphi[\varphi(t)]$，$\varphi\left[\frac{1}{\varphi(t)}\right]$.

解　分析：因为 $\varphi(t)=t^3+1$，即给定 t 的一个值，通过对应关系 $(\ \ )^3+1$ 确定 $\varphi(t)$ 的一个值，所以，要求 $\varphi(t^2)$，$\varphi[\varphi(t)]$，$\varphi\left[\frac{1}{\varphi(t)}\right]$ 的值，只要把 $\varphi(t)$ 中的 t 分别换成 t^2，$\varphi(t)$，$\frac{1}{\varphi(t)}$ 就可以了．因此

$$\varphi(t^2)=(t^2)^3+1=t^6+1;$$

$$[\varphi(t)]^2=(t^3+1)^2=t^6+2t^3+1;$$

$$\begin{aligned}\varphi[\varphi(t)]&=(\varphi(t))^3+1=(t^3+1)^3+1\\&=t^9+3t^6+3t^3+2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi\left[\frac{1}{\varphi(t)}\right]&=\left[\frac{1}{\varphi(t)}\right]^3+1=\left[\frac{1}{t^3+1}\right]^3+1\\&=1+\frac{1}{t^9+3t^6+3t^3+1}.\end{aligned}$$

例 5　把一块半径为 R 的圆形铁片从中心处剪去中心角为 a 的扇形，形成一个圆锥形容器，试将此容器的容积表为 a 的函数.

解　设容器的高为 h，底面半径为 r，则

$$2\pi r=(2\pi-a)R,$$

$$\therefore\quad r=\frac{(2\pi-a)R}{2\pi}.$$

$$\because\quad h=\sqrt{R^2-r^2},$$

$$\therefore h=\sqrt{R^2-\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2R^2}=R\sqrt{1-\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2}.$$

∴圆锥形容器的容积为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2R^2\cdot R\sqrt{1-\left(\frac{2\pi-\alpha}{2\pi}\right)^2}.$$

∴所求的函数关系为

$$V=\frac{R^3}{24\pi^2}(2\pi-\alpha)^2\sqrt{4\pi\alpha-\alpha^2},\quad (0<\alpha<2\pi).$$

［**注**］必须指出函数的定义域．本题为 $\alpha\in(0,2\pi)$，因为对于 $(0,2\pi)$之外的 α 值，这个问题是没有意义的．

有关极限的题目，类型繁多，举不胜举．这里略加归纳分类，希望读者继续增补与充实．

1．用极限的定义来验证某常数是否为已知函数的极限

例 6　根据极限的定义证明：

$$\text{(i)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1+3n}=\frac{2}{3};\quad \text{(ii)}\ \lim_{x\to1}(2x-1)=1.$$

证　(i) 对任给 $\varepsilon>0$，解不等式

$$\left|\frac{2n}{1+3n}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{-2}{3(1+3n)}\right|=\frac{2}{3(1+3n)}<\varepsilon$$

得 $n>\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3\varepsilon}-1\right)$．取 $N=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3\varepsilon}-1\right)\right]$，于是，对任给的 $\varepsilon>0$，总有自然数 $N=\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3\varepsilon}-1\right)\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{2n}{1+3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{1+3n}=\frac{2}{3}.$$

(ii) 对于任给的 $\varepsilon>0$，解不等式

$$|2x-1-1|=2|x-1|<\varepsilon,$$

即

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\frac{1}{2}\varepsilon$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有

$$|2x-1-1|<\varepsilon,$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1}(2x-1)=1.$$

[注] (1) 在题(i)中，在解不等式时，可以应用"放大"法. 下面用放大法来简化解不等式，由

$$\frac{2}{3(1+3n)}<\frac{2}{3\cdot 3n}=\frac{2}{9n}<\varepsilon$$

得 $n>\frac{2}{9\varepsilon}$. 显然，满足不等式 $\frac{2}{9n}<\varepsilon$ 的 n 也必然满足不等式 $\frac{2}{3(1+3n)}<\varepsilon$. 于是，当 $n>N=\left[\frac{2}{9\varepsilon}\right]$ 时，必有 $\left|\frac{2}{1+3n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$.

(2) 在验证 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 时应注意：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，从解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 着手，要以 $|x-x_0|$ 为未知数，解得如下形式的不等式

$$|x-x_0|<\varphi(\varepsilon)$$

$\left(\text{如在例 6 题(ii)中解得 } |x-1|<\frac{1}{2}\varepsilon\right)$ 取 $\delta=\varphi(\varepsilon)$，这样就找到了要求的 δ.

2. 在初等函数的定义区间内求极限应采用代入法.

设 D 为初等函数 $f(x)$ 的定义域，$x_0\in D$，则有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

即极限值等于函数值.

例 7 $\quad \lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+e^{-x}-\sin\frac{x}{2}+\ln(1+x)\right)=2.$

3. 求分式的极限

例 8　求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$.

解　$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6.$

例 9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+4}+2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{4}{2}=2.$$

[小结] 若在分式的分子和分母中有公因子 $\alpha(x)$，当 $x\to x_0$ 时，$\alpha(x)\to 0$ ($\alpha(x)\neq 0$)，则称 $\alpha(x)$ 为零因子. 在求分式的极限时，应先消去零因子 $\alpha(x)$，然后再求极限. 在例 8 中，通过分解因式，分子和分母中出现零因子 $(x-3)$. 消去这个零因子后，就可以把 $x=3$ 直接代入，得到所求的极限值. 在例 9 中，通过分子、分母的有理化，出现了零因子 x^2，消去零因子 x^2 后，把 $x=0$ 代入，就得到所求的极限值 2. 以上例 8，例 9 所采用的可称为消零因子法.

4. 单调数列法

例 10　证明数列 $x_n=\dfrac{a^n}{n!}$ ($n=1,2,3,\cdots$) 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，其中 a 为任何正的常数.