



柯瓦列夫斯卡娅



庞加莱



希尔伯特



哥德尔



怀尔斯



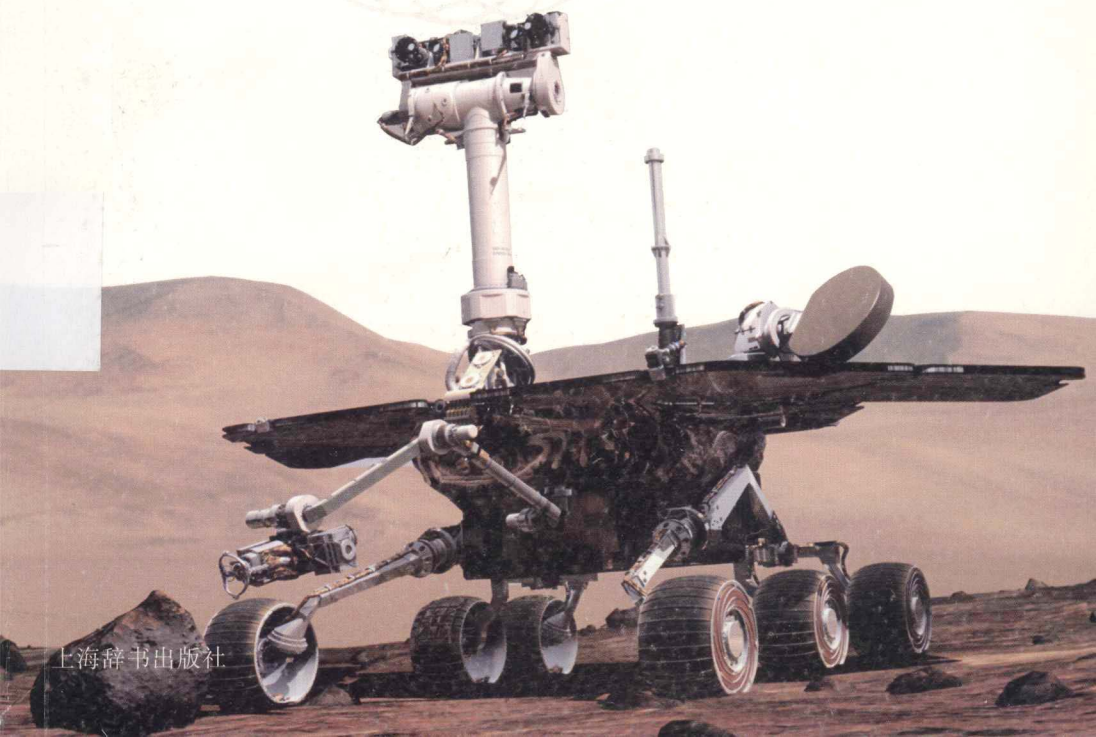
佩雷尔曼

# TAMING THE INFINITE

## 数学的故事

# THE STORY OF MATHEMATICS

[英] 伊恩·斯图尔特 著  
熊斌 汪晓勤 译 汪晓勤 校



TAMING THE  
INFINITE

# 数学的故事

THE STORY OF  
MATHEMATICS

[英] 伊恩·斯图尔特 著

熊斌 汪晓勤 译 汪晓勤 校

参与翻译（按姓氏音序排列）

郝莉莉 黄友初 蒲淑萍 汪晓勤

吴骏 熊斌 袁有琴 赵莹婷



上海辞书出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学的故事/(英)斯图尔特著;熊斌,汪晓勤译.  
—上海:上海辞书出版社,2013.8  
ISBN 978-7-5326-3859-8

I. ①数… II. ①斯… ②熊… ③汪… III. ①数学史-  
普及读物 IV. ①011-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 035209 号

责任编辑 彭江杰  
编 辑 静晓英 陆晓红  
封面设计 杨钟玮

## 数学的故事

[英]伊恩·斯图尔特 著  
熊 斌 汪晓勤 译  
汪晓勤 校

上海世纪出版股份有限公司 出版、发行  
上海辞书出版社  
(上海市陕西北路 457 号 邮政编码 200040)  
电话:021-62472088

www.ewen.cc www.cishu.com.cn

上海师范大学印刷厂印刷

开本 720 毫米×1000 毫米 1/16 印张 24 字数 282 000

2013 年 8 月第 1 版 2013 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5326-3859-8/O·69

定价:48.00 元

如发生印刷、装订质量问题,读者可向工厂调换  
联系电话:021-64322465

TAMING THE INFINITE;

The Story of Mathematics

by

Ian Stewart

Copyright © Joat Enterprises 2008

This edition published by agreement with Quercus Publishing Plc  
through the Chinese Connection Agency, a division of The Yao Enterprises, LLC.

Simplified Chinese edition copyright © 2013

by Shanghai Lexicographical Publishing House

ALL RIGHTS RESERVED

# 前 言

数学并非完全成型后而突然出现的。它是通过许多不同文化背景、使用各种语言的人们的共同努力而逐步发展起来的。现今仍在使用的数学思想可以追溯到四千多年以前。

人类的许多发现就像过眼云烟——战车车轮的设计在新王国时期的埃及至关重要，但如今却远非什么尖端技术。相比之下，数学却往往是永恒的。一旦有人作出了数学上的发现，谁都可以使用它，从而就拥有了它自己的生命。好的数学思想很少会过时，虽则运用方式会发生极大的变化。古巴比伦先哲所发现的解方程的方法一直沿用至今。虽然我们不再使用他们的记数法，但历史传承却是无可否认的。事实上，学校所教的大部分数学内容都至少有二百年的历史了。20世纪60年代“现代”数学课程的出现，将这门学科带入19世纪。但是，与表面情况相反，数学并未裹足不前。今天，每周所创造的新数学知识甚至要比古巴比伦人在两千年中得到的所有发现还要多。

人类文明的出现和数学的发展息息相关。如果没有古希腊人、阿拉伯人和古印度人在三角学上的那些发明，那么穿越外洋的航行将会比那些杰出的航海家开拓全部六大洲更加艰难。从中国至欧洲，或从印度尼西亚至美洲的各条贸易航线，都是通过一条无形的数学主线连在一起的。

没有数学，今天的社会根本无法运作。事实上，所有我们现在视作理所当然的每一样东西，从电视机到移动电话，从宽体喷气式客机到车载卫星导航系统，从列车时刻表到医用扫描仪，靠的都是数学思想和方法。有时，其中所应用的数学已有上千年历史；有时，它在上周才刚刚发现的。我们大多数人从未曾意识到它的存在——它在幕后造就现代科技的这些奇迹。

这是令人遗憾的。这使我们误认为技术是靠某种魔力起作用的，并翘首企盼着每天都会有新的奇迹产生。而另一方面，我们希望能尽可能简单地、不用动脑子地去使用这些奇迹，这也是人之常情。使用者没必要去了解那些奇迹背后的技巧。如果每一位乘客在登机前都得通过一次三角学考试，那么我们很少有人能上天。尽管这样也许能减少碳迹，促进减排，但也会让我们这个世界变得又小又狭隘。

想要写一部真正综合的数学史几乎是不可能的。数学这门学科如今已经太广博、太复杂、也太专业化了，即使是一个专家也会感到这样一本书是无法读懂的，更不要说有谁能写出这本书了。莫里斯·克莱因(Morris Kline)撰写了一部史诗般的著作《古今数学思想》，接近了这一目标。这本书用小号字体印刷，厚达1200多页，但它几乎只字未提最近100年间的任何数学工作。

本书则要简短得多，这就意味着我必须对内容有所取舍，尤其是

涉及 20 世纪和 21 世纪的数学时。我非常清楚所有那些不得不略去的重要内容。这本书中没有代数几何，没有上同调论，没有有限元分析，没有小波理论……。删去的内容比收入的内容要多得多。我选择的是背景知识为一般读者所掌握的内容，以及那些能简明地加以阐释的新思想。

每章之中，历史大致按照时间顺序，而各章则是按主题来组织的。为使叙述连贯些，这样做是有必要的。如果什么都按时间排序，那么我们的讨论就会从一个主题随意跳到另一个主题，毫无方向感。这也许更接近真实的历史，但是全书将变得难以阅读。所以在每章伊始，我们都会先追溯历史，然后提及在该主题发展过程中所历经的一些历史里程碑。前面几章的叙述停留在遥远的过去，而后面几章有时直通今天。

现代数学方面，通过选取读者可能已有所耳闻的专题，并将其与整体的历史趋势相联系，我试图展现现代数学的特点。这里，现代数学指的是最近一百年左右人们所取得的任何数学成果。一个主题没有收入本书并不意味着它不重要，只是我认为花几页篇幅来讲述大多数读者都听说过的怀尔斯(Andrew Wiles)对费马大定理的证明，要比仅讲述背景知识就得写好几章的非交换几何更有意义。

简言之，本书是一部历史，但又不是历史。说它是历史，因为它讲的是过去的故事。它不是为专业历史学家而撰写的，书中没有对历史上各种数学思想的细微差别进行详细分析——而历史学家认为这是很有必要的——而且常常以今天的观点去介绍过去的思想。这最后一点对历史学家来说，是一个大错误，因为它使人感到古人好像是在用我们今天的思维方式。但我认为，如果主要目标是要从我们当前知晓的那些数学思想开始，而去问这些思想是从何而来的，那么

这种处理方法就既正当又有必要。古希腊人并不是为了使开普勒的行星轨道理论成为可能而去研究椭圆，而开普勒提出行星运动三大定律也不是为了让牛顿将其变成万有引力定律。然而牛顿定律的形成过程却极大地依赖于古希腊人对椭圆的研究以及开普勒对观察数据的分析。

数学在实际生活中的应用是本书的第二主题。在本书中，我所提供的应用范例是兼收并蓄的，既有古代的，也有现代的。同样，任何没有提到的应用并不表示它们不重要。

数学拥有一部漫长、光荣却有些受忽视的历史，但这门学科对人类文明发展却一直有着巨大的影响。如果本书能呈现出这部历史的小小一部分，那我就得偿所愿了。

2007年5月于英国考文垂



## 目录

### 1 前言

---

1	1、记号、刻痕与泥版——数的诞生
16	2 形状的逻辑——几何学的初步发展
42	3 符号与数——我们的数字来自何处
59	4 未知数的魅力——用 $x$ 表示未知量
80	5 不朽的三角形——三角学与对数
97	6 曲线与坐标——几何即代数,代数即几何
110	7 数中模式——数论的起源
130	8 世界体系——微积分的创立
154	9 自然中的法则——物理定律的公式化表述
172	10 不可能的量——负数有平方根吗?
187	11 稳固的基础——微积分大显身手
201	12 不可能的三角形——欧氏几何是唯一的几何吗?
219	13 对称的出现——可以不解方程吗?
236	14 代数时期——数让位于结构

253	15	橡皮几何学——定性战胜定量
274	16	第四维——非凡的几何
293	17	逻辑的形成——为数学奠定坚实的基础
317	18	可能性有多大——确定机会的理性方法
330	19	数字捣弄——计算机与计算数学
342	20	混沌和复杂性——不规则也有模式

---

361	推荐读物
364	索引
375	致谢

# 1 记号、刻痕与泥版 ——数的诞生

数学始于数，尽管数学在今天已不再局限于数字计算，但数仍然是最基本的。通过在数的基础上建立起更为复杂的概念，数学已发展成广泛而多样的人类思维领域，其内容已远远超出典型学校教学大纲所规定的内容。今日数学更关注的是结构、模式和形式，而不是数。其方法具有高度一般性，且往往很抽象。数学的应用涵盖了科学、工业、商业——甚至艺术。大哉数学，无处不在。

## 数学始于数

在过去数千年里，来自许多不同文化背景的数学家已在数的基础上建立了一个巨大的上层建筑：几何学、微积分、动力学、概率论、拓扑学、混沌、复杂性理论，等等。跟踪数学领域每一份新出版物的《数学评论》杂志将数学分成了近百个专业领域，这些专业领域又

细分为几千个专业。全世界从事研究的数学家超过 50 000 名，他们每年发表的数学领域的新成果超过一百万页。真正创新的数学并非只是对已有结果做些小改动。

数看似简单明了，但外表具有欺骗性。

数学家还研究他们这门学科的逻辑基础，发现了甚至比数更基本的概念——数理逻辑和集合论。但激发兴趣的主要动因——这是一切研究的出发点——却还是数的概念。

数看似简单明了，但外表具有欺骗性。用数来计算可能很艰辛，得到正确的数可能很难。但即便如此，使用数也要比具体说明它们的本质容易得多。数可以数物，但它的本身并不是物，因为你可以拿起两只杯子，却无法拿起数字“2”。数用符号来记，但对于同一个数，不同的文化使用了不同的符号。数是抽象的，但我们的社会却以数为基础，没有数，社会就无法运行。数乃某种心理建构，但我们相信，即使人类被一场全球性灾难毁灭，没有留下什么人去思考它们，但数仍是有意义的。

## 数的书写

数学的历史始于记数符号的发明。我们熟悉的数制 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 可以用来表示所有可以想象的数，不管有多大。这个数制乃是比较晚的发明，大约出现于距今一千五百年前。可以将数表达得更精确的小数的出现，距今才不过四百五十年。将数学计算深深地根植于我们的文化中，以致我们对其熟视无睹的计算器，也不过只有五十年的历史；而功能强大、运行快捷、用于家庭和办公室的计算机则直到二十年前才开始盛行。

没有数，我们今天所熟悉的文明就不会存在。数无处不在，仿佛隐藏的仆人在幕后奔忙——传递信息、校正我们打字时的拼写错误、为我们安排去加勒比海度假的航班、记录我们的货物、确保我们的医药安全有效。另一方面，数使核武器成为可能，将炸弹和导弹引向目标。并非数学的每一种应用都改善了人类的境遇。

这一巨大的数字工业究竟是如何产生的呢？它起源于一万年前近东地区小小的黏土记号。

即使在那个时代，会计也在记录谁拥有什么，拥有多少——尽管那时候文字还没有出现，也没有记数符号。古代会计用小小的黏土记号来代替记数符号，有些记号为锥形，有些为球形，有些则为卵形。也有圆柱、圆盘和正四棱锥等形状的。考古学家施曼特-贝塞拉(Denise Schmandt-Besserat)推断，这些符号表示当时的生活必需品。球形代表几斗粮食，圆柱形代表几只牲畜，卵形代表几罐油。最早的记号可上溯到公元前8000年，普遍使用了五千年之久。

随着时间的推移，这些记号变得更加复杂、更加专业化。有纹饰的圆锥形代表几片面包，钻石形的方块代表几杯啤酒。施曼特-贝塞拉意识到，这些记号远远不止是会计的工具，它们是通往记数符号、算术和数学之路的关键性的第一步。但是，这第一步十分奇怪，它的发生似乎纯属偶然。

这第一步之所以发生，是因为人们用这些记号来做记录，或许是为了税收或财务目的，或许是作为拥有财物的法律证据。记号的优点是，会计可以很快地将它们排列成一定模式，然后算出某人拥有多少牲畜或粮食，或欠了多少牲畜或粮食。缺点是，记号可以伪造。因此，为了保证账目不受干扰，会计们把这些记号裹在黏土封套里——这实际上就是一种印章。拆开封套，他们很快就能看出封

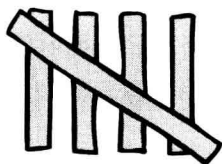
套里有多少记号，属于什么类型。如果需要把拆开的记录继续储存下去，他们总是可以制作一个新的封套。

然而，反复拆开封套，制作新封套，效率太低。古代美索不达米亚的官吏们想出了更好的办法。他们直接把符号刻在封套上，把它所含的记号一并列出。如果封套里有七个球形记号，会计就在湿的黏土封套上画七个球形。

某个时候，美索不达米亚官吏意识到，一旦他们把符号画在封套上，他们实际上就不再需要其中的内容了，这样，他们就不需要拆开封套，看里面包含什么记号了。这一显而易见却又十分关键的一步有效地创造出了一套记数符号，用不同的形状来表示不同类型的物品。所有其他的记数符号，包括我们今天所用的符号，都是由这一古代官方工具衍生出来的。实际上，用符号代替记号，也可能导致了书写文字的诞生。

## 刻痕

黏土记号根本不是最早的记数例子，但所有更早的例子都只不过是刻痕而已，即用一串划杠来记数——如，|||||表示13。人们所知道的最古老的这类记数法——一根狒狒腿骨上所刻的29个槽——大约已有三万七千年之久。这根腿骨是在勒邦博(Lebombo)山的一个洞穴中发现的，勒邦博山坐落于斯威士兰和南非的边境，故该洞穴被称为边境洞，这根腿骨被称为勒邦博骨。



刻痕记号有一个优点，就是可以在长时间内通过每次刻一个来累加计数，而无需改变或删除前面的记号。这种记号今天还在使用，通常五个一组，第五画斜角穿过前四画



在现代数字中仍能看到刻痕记号的影子。我们的符号 1、2、3 分别源于一画、用倾斜线连接的两画和用斜线连接的三画

由于没有能让人回到过去的时间机器，我们无法确定这些记号代表什么，但可以做出合理的猜测。一个朔望月包含 28 天，所以刻痕可能与月相有关。

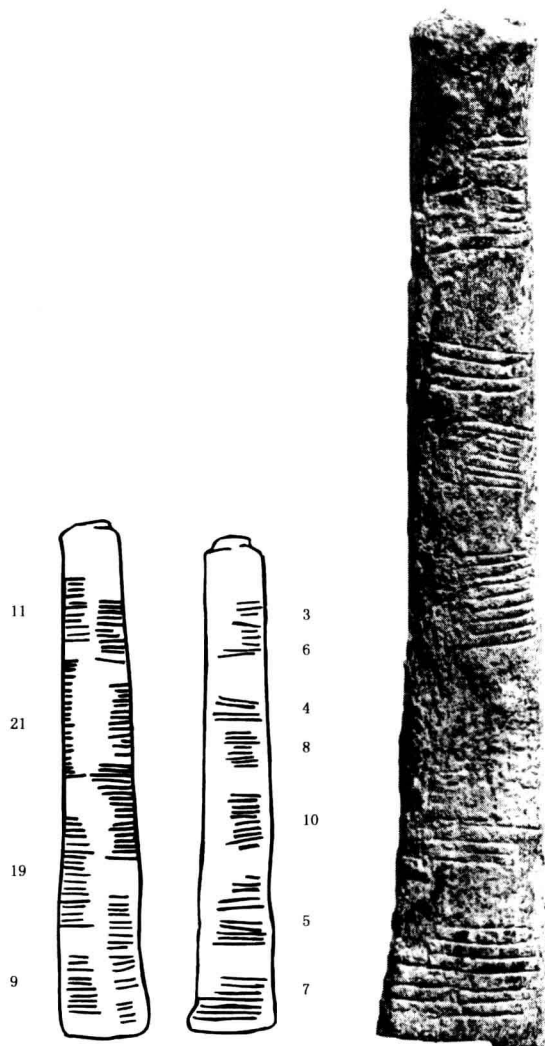
古代欧洲也有类似的文物。在前捷克斯洛伐克地区发现的一根狼骨上有 57 道刻痕，5 道一组，共 11 组，余 2 道，该狼骨大约有三万年的历史。28 的两倍是 56，所以刻痕可能为两个月长的月相纪录。这个假设似乎也无法验证。但刻痕看上去乃精心之作，一定是为了某种目的而刻。

另一处古老的数学刻痕是从扎伊尔发掘的伊桑戈(Ishango)骨，距今大约已有二万五千年(以前估计为六千至九千年，1995 年作了修正)的历史。乍看起来，骨边刻痕似乎很随意，但可能暗藏规律。其中一行包含了 10 到 20 之间的素数，即 11，13，17 和 19，它们的和等于 60。另一行包含了 9，11，19 和 21，它们的和也等于 60。第三行类似于有时通过反复加倍或折半将两数相乘的方法。然而，表面的规律可能只是巧合，也有人提出，伊桑戈骨表示的是一种阴历。

## 最早的数码

从会计的记号到现代数码字的发展道路漫长而曲折。几千年过去了，美索不达米亚人发展了农业，结束了游牧生活方式，开始在一系列城邦定居下来——巴比伦、厄里都(Eridu)、拉加希(Lagash)、苏

美尔(Sumer)、乌尔(Ur)。早期刻在湿泥版上的符号演变成了象形文字——一些简化的图形符号，用来表示文字意义。然后，将这些楔形记号中的一小部分汇集起来，对象形文字作进一步简化。这些楔形记号是用晒干的芦苇秆扁平锋利的一端刻在黏土上的。到公元前3000年，苏美尔人已发明出了一套复杂的文字形式，今称楔形文字。



伊桑戈骨上显示了记号的模式以及它们所代表的数



这一时期的历史很复杂，不同城邦在不同时期占有主导地位。巴比伦城脱颖而出，约有 100 万块巴比伦泥版从美索不达米亚沙漠中被挖掘出来。其中有几百块泥版上载有数学和天文学内容，这些泥版说明，巴比伦人对这两门学科拥有广博的知识。巴比伦人是很有造诣的天文学家，他们开发了一套复杂的记数符号系统，能将天文数据表示到很高的精度。

巴比伦的记数符号远远超出了一个简单的刻痕系统，这是我们所知道的最早的这类符号。这个符号系统使用了两种不同的楔形：纵向的细楔形表示 1，横向的粗楔形表示 10。将这些楔形分组排列起来，就可以表示 2~9 和 20~50。然而，这种表达形式止于 59。在 59 之后，细楔形还被用来表示第二种意义，即 60。

1	∟	11	∟∟	21	∟∟∟	31	∟∟∟∟	41	∟∟∟∟∟	51	∟∟∟∟∟∟
2	∟∟	12	∟∟∟	22	∟∟∟∟	32	∟∟∟∟∟	42	∟∟∟∟∟∟	52	∟∟∟∟∟∟∟
3	∟∟∟	13	∟∟∟∟	23	∟∟∟∟∟	33	∟∟∟∟∟∟	43	∟∟∟∟∟∟∟	53	∟∟∟∟∟∟∟∟
4	∟∟∟∟	14	∟∟∟∟∟	24	∟∟∟∟∟∟	34	∟∟∟∟∟∟∟	44	∟∟∟∟∟∟∟∟	54	∟∟∟∟∟∟∟∟∟
5	∟∟∟∟∟	15	∟∟∟∟∟∟	25	∟∟∟∟∟∟∟	35	∟∟∟∟∟∟∟∟	45	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	55	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
6	∟∟∟∟∟∟	16	∟∟∟∟∟∟∟	26	∟∟∟∟∟∟∟∟	36	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	46	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	56	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
7	∟∟∟∟∟∟∟	17	∟∟∟∟∟∟∟∟	27	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	37	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	47	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	57	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
8	∟∟∟∟∟∟∟∟	18	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	28	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	38	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	48	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	58	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
9	∟∟∟∟∟∟∟∟∟	19	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	29	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	39	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	49	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟	59	∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟∟
10	∟∟	20	∟∟∟	30	∟∟∟∟	40	∟∟∟∟∟	50	∟∟∟∟∟∟		

巴比伦数码 1~59

因此，人们说巴比伦的记数制为六十进制。也就是说，同一个符号的值可以是某数，或某数的 60 倍，或某数 60 倍的 60 倍，取决