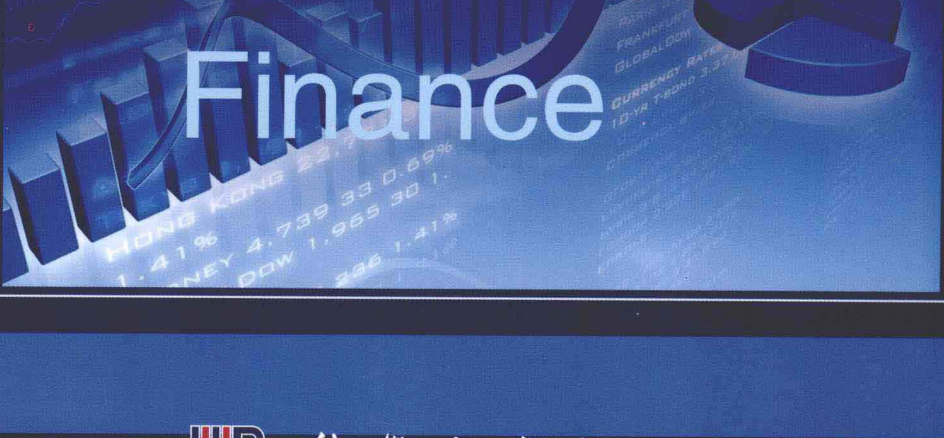
【美】Gerard Cornuejols 【美】Reha Tütüncü 著
梁治安 林 莹 主译
马婧文 校

金融学中的优化方法

Optimization Methods in Finance



科 学 出 版 社

金融学中的优化方法

Optimization Methods in Finance

〔美〕 Gerard Cornuejols
〔美〕 Reha Tütüncü 著
梁治安 林 莹 主译
马婧文 校

科 学 出 版 社

图字:01-2013-2622

内 容 简 介

本书主要介绍在确定性优化问题中的常用的优化模型,如线性规划、非线性规划、二次规划、锥优化、整数规划和动态规划,在不确定性优化问题中的随机规划和鲁棒优化,以及金融数学中的投资组合选择与资产配置、期权的定价与套期保值、风险管理、资产/负债管理问题。对于以上提到的金融数学相关问题,在介绍规划理论、模型和方法以后,建立相应的优化模型,并且用优化软件给出问题的解答。最后在附录中简单介绍凸性、锥、概率基础及改进单纯形方法。

本书可供财经类学校的博士、硕士、本科生,以及金融单位的金融衍生产品研究者和风险管理者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

金融学中的优化方法/(美)考努江斯(Cornuejols,G.)等著;梁治安等译.—北京:科学出版社,2013

书名原文:Optimization methods in finance

ISBN 978-7-03-037631-2

Ⅰ.①金… Ⅱ.①考… ②梁… Ⅲ.①金融学-优化模型 Ⅳ.①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第116851号

责任编辑:谭宏宇 / 责任校对:张怡君

责任印制:刘 学 / 封面设计:殷 靓

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

江苏省句容市排印厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年6月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2013年6月第一次印刷 印张:19 1/4

字数:348 000

定价:85.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

译 者 前 言

2008 年，上海财经大学金融学院博士生陈旭光同学给我推荐了 Gerard Cornuejols 和 Reha Tütüncü 教授写的 *Optimization Methods in Finance*，即本书的英文原书。他对优化方法的浓厚兴趣来自于他先前在台湾的一些金融单位工作的经验和在美国大学深造金融学时的认识，在他于上海财经大学读博士期间，我们经常在一起讨论优化金融的问题和方法，双方受益匪浅。优化模型在金融决策中的作用显得越来越重要和普遍，从资产配置到风险管理，从期权定价到模型校准，都显示了优化方法的有效性。该书每一章都简要地介绍常用的优化方法和在金融学中涉及的相应的数学模型，对于专门从事金融学研究的工作者来说易读性很强，比较实用。所以，产生了翻译该书的想法。鉴于上海财经大学应用数学系的硕士生毕业后的就业单位多是银行、证券公司等金融单位，为了让他们毕业后能更好更快地进入工作状态，作出好的成绩，我让研究生们参与了该书的学习和翻译。另外想达到两个目的：第一，让他们了解数学的优化理论与方法；第二，在翻译过程中，更多地了解金融学中的相应名词。在最后统稿时，我很受感动，我发现他们翻译得很认真、很仔细、很流畅。参与该书翻译的有：我的博士生毛志娟，10 级硕士生郭强、沈钱莉、樊啸、戴利红、朱超，11 级硕士生林莹、刘婷婷、陈唯玮、刘一文、张正之。他们为此付出了很多的时间，在此对他们表示衷心的感谢。同时，翻译工作得到了教育部高等学校科技创新重大项目培育资金项目（708040）、上海财经大学基础学科建设专项资金项目及上海市金融信息技术研究重点实验室的资助。在此对上级主管部门的支持表示感谢！

由于译者能力所限，翻译中若有不妥之处，敬请读者见谅，同时欢迎读者批评指正。

梁治安
上海财经大学应用数学系
2012 年 10 月

前　　言

优化模型在金融决策中扮演着一个越来越重要的角色。从资产配置到风险管理，从期权定价到模型校准，许多金融计算问题能够用现代优化方法得到有效解决。这本教材讨论在金融模型中遇到的几类优化问题(包括线性规划、二次规划、整数规划、动态规划、随机规划、锥优化和鲁棒优化)。针对每类问题，在介绍相关理论(最优性条件，对偶性等)和有效解法后，讨论可以用这些方法建模的几类数理金融问题。除了古典的和著名的模型(如 Markowitz 的均方差优化模型)外，我们给出一些金融问题中的较新的优化模型。

致　谢

这本书出自我们在卡内基梅隆大学 Tepper 商学院（Gerard Cornuejols），日本东京工业大学，以及葡萄牙的科英布拉大学（Reha Tütüncü）的计算金融项目及 MBA 项目的原始课程。我们感谢这些课程的参与者，他们提供了反馈和许多启发性的讨论。我们也感谢同事，他们给了我们做这个项目的原始动力，特别是 Michael Trich，John Hooker，Sanjay Srivastava，Rick Green，Yanjun Li，Luis Vicent 和 Masakazu Kojima。这本书的各版初稿都经过班里 Javier Pena，Francois Margot，Miroslav Karamanov 和 Kathie Cameron 的审查，我们感谢他们给出意见。

目　　录

第1章 绪 论

优化是应用数学的一个分支，其重要性体现在广泛应用和有效算法的可实现性方面。从数学上讲，它是对满足函数约束的几个变量的目标函数求最小值或最大值。一个典型的优化问题是可选择地分配稀缺资源以达到最大化，如总利润的目标函数。

决策变量、目标函数和约束是任何优化问题的三个基本元素。没有约束的优化问题称为无约束优化问题，而其他情形称为约束优化问题。没有目标函数的问题称为可行性问题，有的问题可以有多个目标函数，这样的问题常常被处理成单目标优化问题，或对这样的一系列问题进行讨论。

如果在优化问题中决策变量被限制为整数或可能的离散集合，那么就有整数或离散优化问题。如果对变量没有这样的限制，则是连续优化问题。当然，一些问题可能既有离散变量也有连续变量，我们将在本书中列出遇到的一些类型的问题。

1.1 优化问题

从优化问题的一个常见描述开始。给定一个函数 $f(x):R^n\to R$ 和一个集合 $S\subset R^n$，求 $x^*\in R^n$ 满足

$$\begin{aligned}&\min_x f(x)\\&\text{s.t.}\quad x\in S\end{aligned}\tag{1.1}$$

被称为一个优化问题。其中，f 是目标函数，S 是可行域。如果 S 是空的，那么问题是不可行的；如果能够找到点列 $x^k\in S$ 使得当 $k\to+\infty$，$f(x^k)\to-\infty$，那么问题是无界问题；如果问题既不是不可行的也不是无界的，那么常常可以找到 $x^*\in S$ 满足

$$f(x^*)\leqslant f(x),\quad \forall x\in S$$

这样的 x^* 称为问题(1.1)的全局最小点。如果

$$f(x^*)<f(x),\quad \forall x\in S,\quad x\neq x^*$$

则称 x^* 为问题(1.1)的严格全局最小点。在其他情形下可能只找到对某一个 $\varepsilon>0$，$x^*\in S$ 满足

$$f(x^*) \leqslant f(x), \quad \forall x \in S \cap B_{x^*}(\varepsilon)$$

其中,$B_{x^*}(\varepsilon)$是以 x^* 为圆心,ε 为半径的开球,即

$$B_{x^*}(\varepsilon) = \{x: \| x - x^* \| < \varepsilon\}$$

这样的 x^* 称为问题(1.1)的局部最小点。类似地,可以定义严格局部最小点。在大多数情形下,可行集 S 是用函数约束(等式和不等式)显示的。例如,S 可能如下给出:

$$S := \{x: g_i(x) = 0, i \in E, g_i(x) \geqslant 0, i \in I\}$$

其中,E 和 I 是等式约束和不等式约束的指标集。通常的优化问题取下面的形式:

$$\begin{aligned} &\min_x f(x) \\ &\text{s. t.} \quad g_i(x) = 0, \quad i \in E \\ &\qquad\quad g_i(x) \geqslant 0, \quad i \in I \end{aligned} \tag{1.2}$$

有很多因素影响优化问题是否可以有效求解。例如,决策变量的个数 n、约束总数 $|E|+|I|$ 通常是判断一个优化问题求解的困难程度的好的预示条件。其他因素与定义问题的函数 f 和 g_i 有关。具有线性目标函数和线性约束的问题比较容易求解;具有凸的目标函数和凸的可行集的问题同样容易求解。由于这个原因,研究人员对具有特殊特征的问题研发了不同的算法。我们列出将遇到的主要形式的优化问题。

1.1.1 线性与非线性规划

一个最常见和最容易的优化问题是线性优化或线性规划(linear programming,LP),它是在线性等式和不等式约束下优化一个线性目标函数的问题,对应的情形是问题(1.2)中的 f 和 g_i 都是线性函数。如果 f 或 g_i 有一个是非线性的,则问题就称为非线性规划(nonlinear programming,NLP)问题。

线性规划问题的标准形式如下:

$$\begin{aligned} &\min_x c^{\mathrm{T}} x \\ &\text{s. t.} \quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

其中,$A \in R^{m \times n}$,$b \in R^m$,$c \in R^n$ 是给定的,$x \in R^n$ 是待定的变向量。在本书中,一个 k 维向量也看成一个 $k \times 1$ 矩阵。对于一个 $m \times n$ 矩阵 M,符号 M^{T} 表示该矩阵的转置,即 $n \times m$ 矩阵具有元素 $M_{ij}^{\mathrm{T}} = M_{ji}$。在问题(1.3)中,$c^{\mathrm{T}}$ 是一个 $n \times 1$ 矩阵,$c^{\mathrm{T}} x$ 是一个 1×1 矩阵,元素是 $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$。问题(1.3) 的目标是最小化线性函数 $\sum_{j=1}^{n}$

$c_j x_j$。

与问题(1.2)一样,如果它的约束是相容的,问题(1.3)是可行的,如果存在一列可行向量$\{x^k\}$使得$c^{\mathrm{T}}x^k \to -\infty$,则问题(1.3)是无界的。如果问题(1.3)是可行的并且不是无界的,则它有最优解,即一个向量x满足约束,并且在所有的可行向量中最小化目标值。类似的定义同样用在非线性规划问题。线性规划最著名和最成功的求解方法是单纯形方法和内点法。非线性规划可以用梯度搜索方法及基于牛顿方法的方法,如内点法和序列二次规划方法。

1.1.2 二次规划

一个更一般化的优化问题是二次优化或二次规划(quadratic programming, QP)问题,其中目标函数是变量的二次函数。标准形式的QP定义如下:

$$\begin{aligned} \min_x \ & \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Qx + c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中,$A \in R^{m\times n}$,$b \in R^m$,$c \in R^n$,$Q \in R^{n\times n}$是给定的,且$x \in R^n$。因为$x^{\mathrm{T}}Qx = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(Q+Q^{\mathrm{T}})x$,为了不失一般性,假设$Q$是对称矩阵,即$Q_{ij}=Q_{ji}$。当$Q$是正半定矩阵时,问题(1.4)的目标函数是$x$的凸函数,即对于任意的$y\in R^n$,$y^{\mathrm{T}}Qy\geqslant 0$(参考附录中对凸函数的讨论),这个条件等价于$Q$具有非负的特征值。当这个条件满足时,QP问题是一个凸优化问题,并且可以用内点法在多项式时间求解。用一个测量计算复杂性的古典术语:多项式时间算法是有效的是指至多在输入大小的多项式函数时间保证求解。

1.1.3 锥优化

问题(1.3)的另一个推广是,在非负性条件$x\geqslant 0$被锥包含约束替换后得到的优化问题,称为锥优化(conic optimization, CO)问题。为此,我们考虑有限维向量空间X的一个闭凸锥C(参考附录关于锥的简要讨论)和下面的锥优化问题:

$$\begin{aligned} \min_x \ & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \in C \end{aligned} \tag{1.5}$$

当$X=R^n$,$C=R^n_+$时,这个问题是标准形LP。然而,更一般的非线性优化问题也可以如此构造。更进一步,对线性优化问题开发的最有效和稳健的算法可以被修正用来解这些一般的优化问题。两类重要的锥优化问题是二阶锥优化和半定优

化。当 C 是二阶锥时，这些对应着下面的情形：

$$C_q := \{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n : x_1^2 \geqslant x_2^2+\cdots+x_n^2, x_1\geqslant 0\}$$

和对称正半定矩阵锥

$$C_s := \left\{X=\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}\in R^{n\times n} : X=X^{\mathrm{T}}, X\text{ 是正半定的}\right\}$$

当处理正半定矩阵锥时，问题(1.5)中标准内积 $c^{\mathrm{T}}x$ 的 Ax 用 n 维方阵空间的相应内积来替换。

1.1.4 整数规划

整数规划是要求部分或全部变量取整数的优化问题，这个对变量的限制常使问题很难求解。所以，本书主要考虑具有线性目标函数和线性约束的整数规划。一个纯整数线性规划(integer linear program，ILP)如下给出：

$$\begin{aligned} &\min_x c^{\mathrm{T}}x \\ &\text{s. t.}\quad Ax\geqslant b \\ &\qquad\quad x\geqslant 0 \text{ 并且是整数} \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中，$A\in R^{m\times n}$，$b\in R^m$，$c\in R^n$ 是给定的，并且 $x\in N^n$ 是待定变向量。

当 x_j 表示二元决策变量，即 $x\in\{0,1\}^n$ 时，会产生一个重要情形，这个问题称为 0-1 线性规划。当既有连续变量又有整数约束变量时，问题称为混合整数线性规划(mixed integer linear program，MILP)问题，如

$$\begin{aligned} &\min_x c^{\mathrm{T}}x \\ &\text{s. t.}\quad Ax\geqslant b \\ &\qquad\quad x\geqslant 0 \\ &\qquad\quad x_j\in N,\quad j=1,\cdots,p \end{aligned} \tag{1.7}$$

其中，A、b、c 是给定的数据，整数 $p(1\leqslant p<n)$ 也是输入的一部分。

1.1.5 动态规划

动态规划是涉及递推关系的计算方法。这个方法是由 Richard Bellman 在 20 世纪 50 年代早期开发的。它产生于研究随时间变化的重要的规划问题，因此称为动态规划。然而，当时间不是相关因素时，也可以用这种方法。这种想法是把问题分成阶段以便进行递推优化，可能将随机元素结合在递推中。

1.2 具有数据不确定性的优化

到目前为止，本书在讨论的问题中（除了动态规划）作了暗示的假设：问题的数据（参数），如 QP 中的 Q,A,b,c，都是已知的。但事情不可能总是这样。通常，问题的参数对应于只有将来才会实现的数量，或者在构建和解决问题时不能准确知道，这些情形普遍出现在涉及金融数量（如投资回报、风险等）的模型中。我们讨论解决具有不确定数据的优化问题的两种不同的基本方法。随机规划是一种方法，这时数据不确定性是随机的，并且可以通过某个概率分布来解释。当寻求一个表现好于其他不确定数据可能实现的情形解时，用鲁棒优化方法。这两种方法不同于前面的模型（如 LP，QP 等），但是它们是提出数据不确定性的建模方法。

1.2.1 随机规划

随机规划是一种其部分数据随机的优化问题，问题可能是线性规划、整数规划或者非线性规划，一个重要的情形是随机线性规划。

在一些决策（递推行动）可以于一些或全部随机事件发生结果后取值的情况下，会产生具有递推的随机规划。例如，双阶段的具有递推的随机线性规划可以如下给出：

$$\begin{aligned} &\max\nolimits_x a^{\mathrm{T}}x + E[\max\nolimits_{y(\omega)} c(\omega)^{\mathrm{T}} y(\omega)] \\ &\text{s. t.} \quad Ax = b \\ &\qquad\ \ B(\omega)x + C(\omega)y(\omega) = d(\omega) \\ &\qquad\ \ x \geqslant 0, \quad y(\omega) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

其中，第一阶段决策用向量 x 表示，第二阶段决策用 $y(\omega)$ 表示，它依赖于随机事件 ω 的实现。A,b 定义第一阶段决策 x 的确定约束，而 $B(\omega)$，$C(\omega)$ 和 $d(\omega)$ 定义联系追索决策 $y(\omega)$ 和第一阶段决策的随机线性约束。目标函数包含一个确定项 $a^{\mathrm{T}}x$ 及一个随机事件 ω 所有实现的目标函数 $c(\omega)^{\mathrm{T}}y(\omega)$ 的期望。

注意，一旦第一阶段决策确定了，随机事件实现了，就能够通过下面的线性规划计算最优的第二阶段决策：

$$\begin{aligned} &f(x,\omega) = \max c(\omega)^{\mathrm{T}} y(\omega) \\ &C(\omega)y(\omega) = d(\omega) - B(\omega)x \\ &y(\omega) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

设 $f(x)=E[f(x,\omega)]$ 表示这个问题的最优值的期望值，那么，双阶段随机线性规划就变成