高中代数

上册 · 必修

中学数学 重点 难点 基点

6
7

重庆师院图书馆

高中一年级

李申榜 主编

513272

G634.6

样 027

中学数学

重点 难点 基点

高中代数上册

主　　编　李申榜
分册主编　贺家勇
　　　　　周华斌
编　　者　朱绪鹏
　　　　　李申榜
　　　　　周华斌

CS261793

湖南师范大学出版社

4

390

〔湘〕新登字 011 号

中学数学重点难点基点

高中代数上册

主　　编：李申榜
本册主编：贺家勇
　　　　　周华斌
编　　者：朱绪鹏
　　　　　李申榜
　　　　　周华斌
责任编辑：阙永中

湖南师范大学出版社出版发行
（长沙市岳麓山）
湖南省新华书店经销　湖南省总工会机关印刷厂印刷

787×1092　32 开　6.25 印张　146 千字
1993 年 7 月第 1 版　1995 年 12 月第 6 次印刷
印数：61550—74650
ISBN7—81031—299—5/G・128
定价：5.00 元

513272

前　言

本套丛书作为中学生课程辅导读物，旨在配合中学数学教师帮助他的学生更好地理解、消化教材的重点内容，掌握教材中渗透的最基本的数学思想方法，起到落实“双基”，培养能力的作用。

我们根据多年从事教学、教研实践所积累的经验，依照教材的章节顺序，从教学重点、自学难点、训练基点三个方面进行了深入的挖掘。训练基点中 根据数学教学大纲精神表列了知识点和应达到的认知层次，图解了本单元的知识结构，并对要点进行了简要分析；自学难点中针对学生在学习过程中概念的模糊处、知识的难懂处、应用的易错处进行了深入浅出的辅导；训练基点中对单元知识的应用进行了归类，例举了题型，并提供了巩固本单元知识的若干训练题和形成性测试题。一章之后配有一套总结性测试题，用以反馈教与学的信息。训练题、测试题的答案附书后。

本书存在的缺点和错误，诚望师生批评指正。

主编者

1993 年 4 月

目录

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbo

第一章　幂函数、指数函数和对数函数

第一节　集合

【教学重点】

一、教学目标

节　次	知　识　要　点	认知层次			
		了解	理解	掌握	熟练运用
1.1 集合	集合的概念		✓		
	元素与集合的关系			✓	
	列举法、描述法			✓	
	常用集合的符号			✓	
1.2 子集、交集 并集、补集	子集、交集、并集、补集的概念		✓		
	包含与相等、空集与全集等概念	✓			
	简单的集合进行交、并、补运算			✓	

二、内容剖析

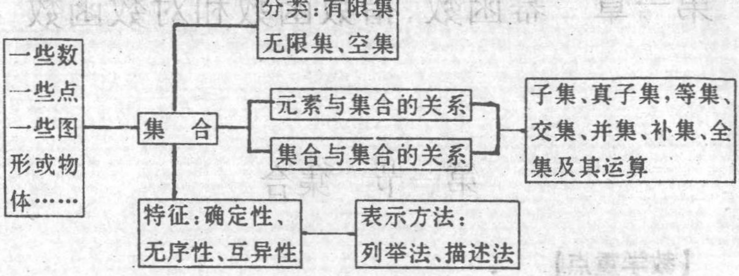
(一)知识结构图(见下页)

(二)要点分析

1.关于集合的概念

(1)集合是数学中最原始的概念之一。就象平面几何中直线

的概念一样，不能用比它更基本的概念来侧面下定义，只能采用



（知识结构图）

描述的方式来正面说明．即"一组对象的全体就形成一个集合"，这些对象可以是数，可以是式，也可以是物体或其他对象．

(2)对于给定的集合，其元素或无（空集）或有（非空集），若有，是哪些应是确定的．且其中任意两个元素都是不同的（互异性），同时元素之间是不讲究顺序的（无序性），如$\{2,1,3\}$与$\{3,2,1\}$是同一个集合．

(3)描述法是表示集合的主要方法，它有两种形式．一是用文字描述，只要将集合中元素的特征用文字表达放在"{}"内即可，例如{某校高一男生}．二是用数学语言（术语和符号）描述，即在"{}"内从左至右先写出该集合中元素代表的符号或字母，接着用竖线"|"隔开，然后在竖线后面用数学语言描述元素特征．在多层次描述时常用关联词"且"、"或"联结，当描述部分出现元素代表符号之外的字母时，必须对新出现的字母说明其意义或指出其范围，如$\{x|x>0$ 且 $x\neq 1\}$，$\{x|x=2n\quad n\in N\}$．

(4)任意确定的元素 a 对于给定的集合 A．要么 $a\in A$，要么 $a\notin A$，二者必居其一．

2．关于子集、交集、并集、补集

(1)要正确使用两类符号,“$\in$、$\notin$”与“$\subseteq$,$\subset$,$\nsubseteq$,$\not\subset$”,前者用于表示元素与集合的关系,后者用于表示集合与集合的关系.

(2)$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$,$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$二者只有“且”、“或”的一字之差.“且”通常理解为“既是又是”,“或”的意思则有三种可能,一是 $x\in A$ 但 $x\notin B$,二是 $x\in B$ 但 $x\notin A$,三是 $x\in A$ 且 $x\in B$,这与通常理解为“非此即彼”有区别.

(3)关于两个集合相等,可理解为两个集合的所有元素公有,但从理论上应是相互包含.

(4)若 $A\subset I$,对于 I 中的任意元素 a,若 $a\notin A$,则 $a\in\overline{A}$;若 $a\notin\overline{A}$ 则 $a\in A$.

【自学难点】

一、模糊处

1.为什么要学习集合?前面已说到“集合”是数学的原始概念之一,紧接着我们要研究的“映射”“函数”等概念都要用“集合”去定义,因此,简单地说,这是探索新知识、研究新问题的需要.

2.$A\nsubseteq B$ 是什么含义?这是“A 不是 B 的子集”的数学语言表达.深刻一点,还可知 A 不是空集(若 $A=\Phi$.由于空集是任何集合的子集,则有 $A\subseteq B$);A 中至少有一个元素不属于 B,如$\{1,2,3\}\nsubseteq\{1,3,4,5\}$;同时注意 $A\nsubseteq B$ 并不能排除 B 是 A 的子集的可能.如$\{a,b,c,d\}\nsubseteq\{a,b,c\}$,$\{a,b,c\}$却是$\{a,b,c,d\}$的子集.

二、难懂处

1.B 的子集为什么不能理解为由 B 的部分元素所组成的集合?因为 B 也是 B 的子集,而这个子集是由 B 的全体元素组成的.再说空集也是 B 的子集,而空集中并不含 B 的元素.

2. 为什么 $\Phi\neq\{\Phi\}\neq\{0\}$？先看它们各自的意义. Φ 是集合，其中没有任何元素，$\{\Phi\}$也是集合，且是以 Φ 作为唯一元素的集合，它是非空的，所以 $\Phi\neq\{\Phi\}$，同理 $\Phi\neq\{0\}$，$\{\Phi\}$和$\{0\}$虽然都是单元集，但其元素不同，故$\{0\}\neq\{\Phi\}$. 值得大家注意的是，这里应有 $\Phi\in\{\Phi\}$，$\Phi\subset\{\Phi\}$. $\{\Phi\}\subseteq\{\Phi\}$，$\Phi\subseteq\{\Phi\}$，$\Phi\subset\{0\}$，$\Phi\subseteq\{0\}$都是正确的.

三、易错处

1. 用数学语言描述集合时，常把竖线前面的元素代表符号的字母写漏，导致不能准确表达意思. 如方程 $2x+3y-1=0$ 的解的集合应为$\{(x,y)\mid 2x+3y-1=0\}$，若把有序数组(x,y)这个元素代表丢掉写成$\{2x+3y-1=0\}$就成了用列举法表示的其元素是一个方程的单元集了，而前者所表集合应是一个无限集.

2. 写出方程组$\begin{cases}x+y=5\\2x-4y=-8\end{cases}$的解的集合. 由解方程知 $x=2$，$y=3$，因而把方程组的解集写为$\{2,3\}$或$\{x=2,y=3\}$都是不对的. 因为方程组的解是一对有序实数，其解集应是$\{(2,3)\}$这个单元集，$\{2,3\}$的元素是两个数，$\{x=2,y=3\}$的元素是两个方程. 当然正确的表达方式还有$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x+y=5\\2x-4y=-8\end{cases}\right\}$或$\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\right\}$，但都不如$\{(2,3)\}$简单明了.

【训练基点】

一、题型例举

(一)集合的表示方法

例 1　下列各条所述对象能否组成集合，若能，试用适当方式表示.

(1)18 的正约数.

(2)方程 $x^2+5x+6=0$ 的根.

(3)不等式 $x^2+x+1<0$ 的解.

(4)某校高一年级所有高个子同学.

(5)平面内到两定点 M、N 距离和为常数 $2a(a>0)$的所有点.

(6)坐标平面内 x 轴上的点.

解:(1)$\{1,2,3,6,9,18\}$,

(2)$\{x|x^2+5x+6=0\}=\{-2,-3\}$,

(3)$\{x|x^2+x+1<0\}=\Phi$,

(4)不能表示为集合. 因为集合的元素具有确定性,而"高个子"没有确定的标准,

(5)$\{P||PM|+|PN|=2a,a>0,M$、N 为同一平面内两定点$\}$,

(6)$\{(x,y)|y=0,x\in R\}$.

说明 对于有限集,当元素个数不多,便于枚举时,可用列举法;无限集一般采用描述法.

例 2 用列举法表示下列集合

(1)$\{(x,y)|y-2x=0,x\in N,y\in N$ 且 $1\leqslant x<4\}$,

(2)$\{x|x=\frac{m}{n},m\in Z,|m|<2,n\in N,n\leqslant 3\}$.

解:(1)$\{(1,2),(2,4),(3,6)\}$,

(2)由 $m\in Z,|m|<2$ 知 $m=-1,0,1$,

由 $n\in N,n\leqslant 3$ 知 $n=1,2,3$

于是$\frac{m}{n}$可为$-1,0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}$,

$\therefore$用列举法表为$\{-1,0,1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\}$.

(二)元素与集合、集合与集合的关系

例 1 判断下列命题是否正确

(1)飞机∈{飞机场}，

(2){(0,1)}是方程 $x+y=1$ 解的集合，

(3)$\Phi=$ {空集}，

(4){3,2,1}不是{1,2,3}，

(5)$\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\begin{cases}x+y=7\\y+z=9\\x+z=8\end{cases}\right\}=\{(3,4,5)\}=\{(5,4,3)\}$

(6)正方形⊂{多边形}.

解：(1)错；(2)错；(3)错；(4)错.

(5)第一个等号成立；第二个等号不成立；(6)错.

例 2 判断下列各集合的关系

(1)$A=$ {等边三角形}，$B=$ {等腰三角形}，$C=$ {有一个角为 45°的直角三角形}.

(2)$A=\{n\mid 1<n<4\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$.

解：(1)∵等边三角形必为等腰三角形，而等腰三角形中至少有一个不是等边三角形. ∴$A\subset B$.

同理 $C\subset B$(∵$C=$ {等腰直角三角形}).

(2)∵A 的元素是大于 1 且小于 4 的无穷个数，B 的元素 2 和 3 都在这个范围内.

∴$A\supset B$.

(三)集合的运算

例 1 已知 $M=\{x\mid x^2-x-6<0\}$，$N=\{x\mid -1<x<4\}$求 $M\cup N$，$M\cap N$.

解：∵$M=\{x\mid x^2-x-6<0\}=\{x\mid -2<x<3\}$，

$$\therefore M\cup N=\{x\mid -2<x<3\}\cup\{x\mid -1<x<4\}$$
$$=\{x\mid -2<x<4\}，$$

试读结束：需要全本请在线购买：www.ertongbo

$$M\cap N=\{x|-2<x<3\}\cap\{x|-1<x<4\}$$
$$=\{x|-1<x<3\},$$

说明 求实数的子集、交集、并集、补集时，利用数轴是行之有效的办法."所有部分"是并集，"公共部分"是交集，"剩余部分"是补集如图 1－1－1.

图 1－1－1

例 2 设 $I=R, A=\{x|x^2+2x-3<0\}$，求 $\overline{A}$.

解：$A=\{x|-3<x<1\}$，

$\therefore \overline{A}=\{x|x\leqslant -3\}\cup\{x|x\geqslant 1\}$
$=\{x|x\leqslant -3$ 或 $x\geqslant 1\}$.

例 3 设 $A=\{x|x^2-Px+15=0\}, B=\{x|x^2-5x+q=0\}, A\cap B=3$，求 p、q 及 $A\cup B$.

解：$\because A\cap B=3$，$\therefore 3$ 是 A、B 的公共元素.

即 3 分别是方程 $x^2-px+15=0$ 和 $x^2-5x+q=0$ 的根，

由 $9-3P+15=0$ 知 $p=8$，

由 $9-15+q=0$ 知 $q=6$，

于是 $A=\{x|x^2-8x+15=0\}=\{3,5\}$，

$B=\{x|x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，

$\therefore A\cup B=\{2,3,5\}$.

二、双基训练

1 选择题

(1)下列哪一个集合不同于另外三个集合 ( )

(A) $\{x|x=1\}$；(B) $\{y|(y-1)^2=0\}$；

(C) $\{x=1\}$；(D) $\{1\}$.

(2)下面三个命题

①若 $A\cap B=\Phi$,则 $\overline{A}\cup\overline{B}=I$;

②若 $A\cup B=I$,则 $\overline{A}\cap\overline{B}=\Phi$;

③若 $A\cup B=\Phi$,则 $A=B=\Phi$.

其中假命题的个数是 ( )

(A)0; (B)1; (C)2; (D)3.

(3)下面哪一种说法是正确的 ( )

(A)任何一个集合 A 必有两个不同的子集;

(B)任何集合 A 必有一个真子集;

(C)若 $A\cap B=\Phi$,则 A、B 中至少有一个空集;

(D)若 $A\cap B=I$,则 A、B 都是全集.

(4)下列错误的表示式是 ( )

(A)$\Phi\subset A$;(A 为非空集合);(B)$\Phi\in\{\Phi\}$;

(C)$\Phi\subset\{0\}$;(D)$\Phi\in\{0\}$.

(5)设 I,A,B 为非空集,且 $A\subset B\subset I$,则下列集合中的空集是 ( )

(A)$A\cap B$; (B)$\overline{A}\cap B$;

(C)$A\cap\overline{B}$; (D)$\overline{A}\cap\overline{B}$.

(6)设 $M=\{x|x\leqslant\sqrt{6}\}$,$a=-\sqrt{2}$,则正确的是 ( )

(A)$a\subset M$; (B)$a\notin M$; (C)$\{a\}\in M$; (D)$\{a\}\subset M$.

2. 填空题

(1)0 ____ $\{0\}$. (2)0 ____ Φ.

(3)Φ ____ $\{x|x^2+1=0,x\in R\}$.

(4)$\{0\}$ ____ $\{x|x<3$ 且 $x>5\}$.

(5)$\{x|x<10\}$ ____ $\{x|x>6\}=\{x|6<x<10\}$.

(6)$\{x|x<1\}$ ____ $\{x|x>100\}=\{x|x<1$ 或 $x>100\}$.

(7)$\{x|x>6\}$ ____ $\{x|x<-2$ 或 $x>5\}$.

(8)$\{x|x>-3\}$ ____ $\{m||m|<0\}$.

3. 用适当的方法表示下列各集合并指明其类型.

(1)方程 $x^2-1=0$ 解集;

(2)适合 $|x|<5$ 的整数 x 的集合;

(3)大于 100 的自然数的集合;

(4)坐标平面内满足 $0\leqslant x<1$(x 为横坐标)的所有点的集合.

4. 已知 $A=\{x|x^2-16<0\}$,$B=\{x|x^2-4x+3\geqslant 0\}$　$I=R$,求

(1)$A\cap B$;　(2)$A\cup B$;　(3)$\overline{A\cap B}$;(4)$\overline{A}\cup\overline{B}$.

5. 求 $\{(x,y)|y=x^2\}\cap\{(x,y)|y=-x^2+2\}$.

三、形成性测试题

1. 选择题(本题满分 24 分,每小题 4 分)

(1)下式中正确的是　(　)

(A)若 $I=R$,则 $A\cup\overline{A}=\{R\}$;

(B)若 $A\cap B=A$,则 $A\subset B$;

(C)若 $A=\{1,\Phi,\{2,3\}\}$,则 $\{2,3\}\in A$;

(D)$M=\{(2,-1)\}$,$N=\{(-1,2)\}$,则 $M=N$.

(2)已知 $P=\{x|x\leqslant 3\sqrt{2}\}$,$a=\sqrt{17}$,下式中正确的是　(　)

(A)$a\subset P$;　(B)$a\notin P$;

(C)$\{a\}\in P$;　(D)$\{a\}\subset P$.

(3)设 $M=\{x|x\geqslant 2,x\in R\}$,$P=\{x|x^2-x-2=0,x\in N\}$则 $M\cap P$ 是　(　)

(A)Φ;　(B)$M\cup\{-1\}$;　(C)M;　(D)P.

(4)设集合 $M=\{x|f(x)=0\}$,$N=\{x|g(x)=0\}$,则方程 $f(x)\cdot g(x)=0$ 的解集是　(　)

(A)$M\cap N$;　(B)$M\cup N$;　(C)N;　(D)M.

(5)集合 $P=\{a,b,c\}$,P 的子集的个数是　(　)

(A)6;　(B)7;　(C)8;　(D)9.

(6)满足 $\{1,2\}\subseteq x\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ 的集合 x 的个数是　(　)

(A)4；　　(B)6；　　(C)7；　　(D)8.

2. 填空题(本题满分 20 分，每小题 5 分)

(1)已知 $A=\{矩形\}$，$B=\{菱形\}$，则 $A\cap B=$ ______.

(2)集合 $\{(x,y)\mid 2x+y-7=0, x\in N, y\in N\}$，用列举法表示为______.

(3)$A=\{(x,y)\mid x+y=3\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x-3y+1=0\}$，$A\cap B=$ ______.

(4)设 $A=\{x\mid x^2+\frac{1}{2}px+1=0\}$，$B=\{x\mid 2x^2+x+q=0\}$，$A\cap B=\{\frac{1}{2}\}$，则 $A\cup B=$ ______.

3. (本题满分 12 分)设 $I=\{2,3,a^2+2a-3\}$，$A=\{|a+1|,2\}$，$\overline{A}=\{5\}$，求实数 a.

4. (本题满分 12 分)已知 $A=\{(x^2-y^2)(2x+y)$所含的一次因式$\}$. $B=\{(4x^2-y^2)(x+y)$所含的一次因式$\}$，求 $A\cup B$ 和 $A\cap B$.

5. (本题满分 12 分)已知集合 $A=\{0,1\}$，集合 $B=\{x\mid x\subseteq A\}$，用列举法表示集合 B.

6. (本题满分 20 分)已知 $A=\{a^2,a+1,-3\}$，$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，若 $A\cap B=\{-3\}$，求 a 的值.

第二节　映射与函数

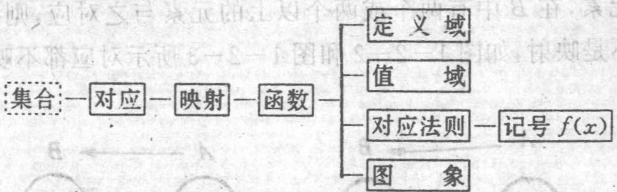
【教学重点】

一、教学目标

节　次	知　识　要　点	认知层次 了解	理解	掌握	熟练运用
1.3 映射	对应与对应法则	√			
	映射	√			
	象和原象	√			
1.4 函数	自变量与函数		√		
	函数的概念、函数的记号		√		
	定义域、值域、函数值、开闭区间等概念		√		
	函数定义域的求法			√	

二、内容剖析

(一)知识结构图



(虚线框表示前面已学的知识,下同)

(二)要点分析

1. 关于映射的概念

(1)"对应"这个概念在初中已学过,它也象前面的"集合"一样,是原始概念,但今天要有新的认识,"对应"包括两个集合及

从一个集合到另一个集合的对应法则.

(2)在各种各样的“对应”中，只有满足映射定义的对应才叫映射. 由于“映射”是特殊“对应”，故“映射”也包括两个集合和从一个集合到另一个集合的对应法则. 这两个集合可以是数集，也可以是其他集合. 这个对应法则常用字母 f,g,h 等表示.

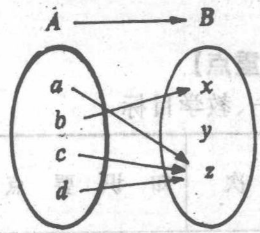


图 1—2—1

(3)从 A 到 B 的映射，定义中允许 A 中的“多”对 B 中的“一”，即允许 B 中的某元素在 A 中的原象多于一个，也允许 B 中的某元素在 A 中没有原象. 如图 1—2—1 是 A 到 B 的映射，Z 有三个原象，y 却没有原象.

(4)从 A 到 B 的对应中，若 A 中存在一个元素，按照给定的对应法则，无法在 B 中找到元素与之对应；或者 A 中存在一个元素，在 B 中有两个或两个以上的元素与之对应，则该对应都不是映射，如图 1—2—2 和图 1—2—3 所示对应都不映射.

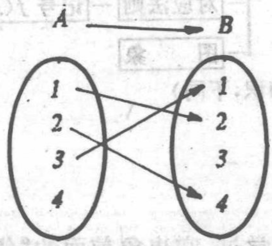


图 1—2—2

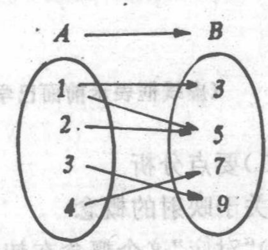


图 1—2—3

(5)映射定义中的两个集合可以是相同的集合，也可以是不

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbo