



普通高校“十二五”规划教材

现代控制理论基础

主 编 郭 亮 王 俐
副主编 杨 宵 吴 剑 余祖龙
主 审 代冀阳

XIANDAI KONGZHI LILUN JICHU



配有课件



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS

013066437

0231-43

47



普通高校“十二五”规划教材

现代控制理论基础

主 编 郭 亮 王 俐
副主编 杨 宵 吴 剑 余祖龙
主 审 代冀阳



北京航空航天大学出版社



北航

C1673279

0231-43
47

内 容 简 介

本教材的内容阐述循序渐进,富有启发性;论证与实例配合紧密,可读性好。全书以状态空间法为基础阐述了现代控制理论的基本原理及其分析和综合方法。全书分六章,内容包括控制系统的状态空间描述、线性系统的运动分析、控制系统的能控性和能观性、李雅普诺夫稳定性分析、线性系统的状态综合及倒立摆应用实例。同时,本教材还适当介绍了相关内容的 MATLAB 仿真求解方法,以加深对相关知识的理解。最后,还以经典控制模型倒立摆系统为例,介绍了现代控制理论在实际控制系统中的应用方法和过程。

本教材适用于自动化、电气工程、系统工程等本科专业,同时也可供控制领域工程师及相关专业技术人员参考。

本书配有课件,可发邮件至 goodtextbook@126.com 或拨打电话 010-82317037 申请索取。

图书在版编目(CIP)数据

现代控制理论基础 / 郭亮,王俐主编. —北京:
北京航空航天大学出版社,2013.6
ISBN 978-7-5124-1086-2

I. ①现… II. ①郭… ②王… III. ①现代控制理论
—高等学校—教材 IV. ①0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 046090 号

版权所有,侵权必究。

现代控制理论基础

主 编 郭 亮 王 俐
副主编 杨 宵 吴 剑 余祖龙
主 审 代冀阳
责任编辑 董 瑞

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱: goodtextbook@126.com 邮购电话:(010)82316936

涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:710×1 000 1/16 印张:12.25 字数:261 千字

2013 年 6 月第 1 版 2013 年 6 月第 1 次印刷 印数:3 000 册

ISBN 978-7-5124-1086-2 定价:25.00 元

若本书有倒页、脱页、缺页等印装质量问题,请与本社发行部联系调换。联系电话:(010)82317024

前言

现代控制理论(Modern Control Theory)是自动化等专业的一门重要的专业基础课,它以经典控制理论为基础,以现代数学为主要工具。20世纪50年代末,由于生产迅速向大型化、连续化的方向发展,过程日益复杂,原有的简单控制系统已经不能满足要求,自动控制理论和应用技术面临着工业生产实际要求的严峻挑战,现代控制理论应运而生。20世纪七八十年代,现代控制理论得到了快速发展,并在某些尖端技术领域取得惊人的成就。如今,现代控制理论思想和方法已经广泛地应用于工农业生产、国防、航空航天、交通运输、管理、生物等领域,在计算机技术高度发展的今天,现代控制理论及其应用越来越被人们所重视。

MATLAB是由美国MathWorks公司发布的主要面对科学计算、可视化以及交互式程序设计的高科技计算环境。控制理论、计算方法与计算机技术的结合是当代控制系统发展的重要内容。因此在MATLAB软件平台上,以现代控制理论为基础,对控制系统进行分析和设计是学生乃至控制工程师必须熟练掌握的重要知识和技能。

本书是编者总结教学、实验和科研工作,并借鉴国内外控制领域专家、学者研究成果的基础上编写而成的,在内容编排上具有如下特点:

1. 重点突出,循序渐进。现代控制理论以经典控制理论为基础,但研究对象和研究方法都有别于经典控制理论,本书先讨论了经典控制理论与现代控制理论的联系与区别,后着重从线性定常系统、离散系统、时变系统进行控制系统的分析和设计。

2. 内容与学生需求相结合。编者都是工作在教学一线的教师,具有多年控制理论教学和科研经验,懂得学生所需,避免了一味教授理论知识而没有把理论与工程实际结合,导致学生课程结束,还不知道现代控制理论的应用场合及如何应用的情况。本教材在第6章中给出了应用实例,以便学生学习理论知识的同时掌握如何应用现代控制理论去解决工程实际问题。

3. 理论与实践相结合。在学习现代控制理论知识的基础上,利用MATLAB软件对系统进行分析和设计,加深理解和掌握,达到学以致用目的。

4. 所有的例题、习题都经过精心选择。书中所有的用MATLAB描述的程序都经过严格的上机调试,保证所写程序的可用性。

5. 院校之间交流合作的成果。本教材由三个院校的教师交流合作编写而成,取长补短,分享心得,保证了该书的实用性和取材新颖性。

本书不仅适用于自动化、电气工程、系统工程等本科专业学习之用,同时也可供控制领域工程师及相关专业技术人员参考。

本书由南昌航空大学郭亮、南昌大学王俐、南昌工程学院杨宵编写。杨宵编写了第1章,王俐编写了第3章,郭亮编写了绪论及第2、4、5、6章,并做了最后统稿和修

订工作。吴剑和余祖龙做了一些辅助性工作,提供了一些资料和建议。南昌航空大学的代冀阳教授认真细致地审阅了该书,并提出了宝贵的、有建设性的意见。同时参考文献所列资料为本书的编写提供了大量素材,本书的出版还得到了北京航空航天大学出版社的大力支持,并获得了南昌大学教材出版的资助,谨此一并表示感谢。

由于作者水平有限,书中的错误和不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编者

2012年10月1日

目 录

第 0 章 绪 论	1
0.1 控制理论的发展	1
0.2 控制理论的应用	2
0.3 MATLAB 软件	3
第 1 章 控制系统状态空间描述	4
1.1 状态空间模型	4
1.1.1 状态空间的相关概念	4
1.1.2 状态空间一般表达式	5
1.1.3 状态空间表达式的模拟结构图	8
1.2 状态空间表达式的建立	8
1.2.1 由系统机理建立状态空间表达式	8
1.2.2 由动态结构图求取系统状态空间表达式	10
1.2.3 由微分方程求取状态空间表达式	13
1.2.4 由传递函数求取状态空间表达式	16
1.3 系统状态空间的线性变换	24
1.3.1 系统状态空间表达式的非唯一性	24
1.3.2 特征值不变性与系统的不变量	25
1.3.3 状态空间表达式变换为约旦标准型	26
1.4 系统传递函数阵	30
1.4.1 由状态空间表达式求传递函数(阵)	30
1.4.2 传递函数(阵)的不变性	32
1.5 离散系统状态空间描述	32
1.5.1 由差分方程建立状态空间表达式	33
1.5.2 由脉冲传递函数建立状态空间表达式	35
1.6 非线性和时变系统的状态空间描述	38
1.6.1 非线性系统	38
1.6.2 时变系统	40
1.7 MATLAB 进行状态空间模型的建立	40
习 题	43

第 2 章 线性系统状态空间表达式的解	45
2.1 线性定常系统齐次状态方程的解	45
2.1.1 矩阵指数法	45
2.1.2 反拉氏变换法	46
2.2 状态转移矩阵	46
2.2.1 状态转移矩阵的性质	47
2.2.2 几个特殊的矩阵指数函数	48
2.2.3 状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 或 e^{At} 的计算	49
2.3 线性定常系统非齐次方程的解	54
2.4 线性时变系统状态方程的解	56
2.4.1 线性时变系统齐次方程的解	56
2.4.2 状态转移矩阵的性质	59
2.4.3 线性时变系统非齐次方程的解	59
2.5 离散时间系统的状态空间分析	61
2.5.1 连续系统状态空间方程的离散化	61
2.5.2 离散时间系统状态方程的解	64
2.5.3 离散系统的状态转移矩阵 $\Phi(k)$ 的计算	65
2.6 利用 MATLAB 求解状态空间表达式	68
习 题	70
第 3 章 控制系统的能控性和能观性	72
3.1 系统的能控性及其判别	72
3.1.1 线性定常系统的能控性定义	73
3.1.2 线性定常连续系统的能控性判别	73
3.1.3 线性定常连续系统能控性的另一种判别方法	75
3.1.4 线性定常离散系统的能控性判别	79
3.1.5 线性定常连续系统的输出能控性	83
3.2 系统的能观性及其判别	84
3.2.1 线性定常连续系统的能观性	84
3.2.2 线性定常连续系统能观性的另一种判别方法	86
3.2.3 线性定常离散系统的能观性	89
3.3 系统能控标准型和能观标准型	90
3.3.1 单输入系统的能控标准型	90
3.3.2 单输出系统的能观标准型	95
3.4 系统能控性和能观性的对偶关系	96

3.4.1 对偶系统	96
3.4.2 对偶原理	97
3.5 线性系统的结构分解	98
3.5.1 化为约旦标准型的分解	98
3.5.2 按能控性和能观性分解	100
3.6 传递函数矩阵的状态空间实现	109
3.6.1 实现问题的基本概念和属性	109
3.6.2 能控标准型实现和能观标准型实现	110
3.6.3 最小实现	114
3.6.4 能控性和能观性与传递函数(阵)的关系	116
3.7 系统能控性和能观性的 MATLAB 分析	118
3.7.1 系统的能控性和能观性分析	118
3.7.2 系统能控性分解	119
3.7.3 系统能观性分解	121
习 题	122
第 4 章 李雅普诺夫稳定性分析	124
4.1 李雅普诺夫稳定性定义	124
4.1.1 系统的平衡状态	124
4.1.2 李雅普诺夫意义下的稳定	125
4.2 李雅普诺夫第一法	127
4.3 李雅普诺夫第二法	129
4.3.1 标量函数的符号特性	129
4.3.2 二次型标量函数	129
4.3.3 二次型标量函数的符号特性	130
4.3.4 稳定性判据	131
4.4 线性定常系统的稳定性分析	133
4.5 线性定常离散时间系统状态稳定性分析	135
4.6 线性时变连续系统的稳定性分析	137
4.7 非线性系统的李雅普诺夫稳定性分析	137
4.8 利用 MATLAB 进行控制系统的稳定性分析	139
4.8.1 李雅普诺夫第一法分析系统稳定性	139
4.8.2 李雅普诺夫第二法分析系统稳定性	140
习 题	141

第 5 章 线性定常系统的综合	144
5.1 反馈控制结构及其特性	144
5.1.1 状态反馈	144
5.1.2 输出反馈	145
5.1.3 闭环系统的能控性与能观性	146
5.2 极点配置	149
5.2.1 状态反馈极点配置方法	149
5.2.2 输出反馈极点配置方法	153
5.3 系统镇定问题	154
5.3.1 状态反馈镇定	154
5.3.2 输出反馈镇定	155
5.4 状态观测器	157
5.4.1 状态观测器的设计思路	157
5.4.2 状态观测器的定义	158
5.4.3 状态观测器的存在性条件	159
5.4.4 状态观测器的计算	160
5.4.5 降维观测器	164
5.5 带状态观测器的状态反馈系统	168
5.5.1 系统结构与状态空间表达式	168
5.5.2 闭环系统的基本特征	169
5.6 MATLAB 在控制系统综合中的应用	170
5.6.1 极点配置	170
5.6.2 状态观测器设计	172
习 题	173
第 6 章 现代控制理论应用实例	175
6.1 倒立摆控制系统	175
6.2 一阶倒立摆数学模型	176
6.3 系统的可控性分析	179
6.4 系统稳定性分析	180
6.5 极点配置法设计控制器	181
6.6 控制效果仿真	183
6.7 控制器应用	184
参考文献	186

第0章 绪论

0.1 控制理论的发展

控制理论的发展已经走过近百年的历程,如今在工业、国防军事、农业、社会、经济等领域都发挥着重要的作用。自动控制理论的发展过程可以归纳为三个阶段:经典控制理论、现代控制理论、智能控制理论。这种阶段性的发展过程是从简单到复杂、由量变到质变的辩证发展过程。并且,这三个阶段不是相互排斥的,而是相互补充、相辅相成的,各有其应用领域,各自还在不同程度地继续发展着。

经典控制理论在 20 世纪三四十年代初步形成,第二次世界大战中,由于战争的需要,雷达与火炮自动跟踪技术、火箭自动制导技术得到了空前的发展。二战后,一大批从事自动武器系统研究与设计的科学家和技术专家在实践的基础上建立与发展了自动控制理论,这就是以反馈理论为基础的经典控制理论。经典控制理论主要是以传递函数为基准,讨论单输入单输出控制系统的分析和设计问题。一般来说,经典控制理论的控制对象为单输入单输出系统(SISO),特别是线性定常系统。经典控制理论的分析方法有频率特性分析法、根轨迹分析法、描述函数法、相平面法等。控制策略仅局限于反馈控制、PID 控制等。

第二次世界大战之后,由于导弹制导、数控技术、核能技术、空间技术发展的需要和计算机技术的成熟,控制理论发展到了一个新的阶段,现代控制理论应运而生。战后,随着工业技术的进步及航空与宇航事业的发展,被控对象变得复杂了,被控变量增多了,对控制系统的性能要求提高了。对于复杂的多变量系统的分析与综合,经典控制理论越来越显得无能为力,需要新的理论的开发。另外,进入 20 世纪 50 年代之后,由于电子数字计算机的飞速发展,为科学计算与实际运用提供了一个极为良好的条件。由于这两方面的结合,使得在自动控制领域产生了一个新的突破,即现代控制理论于 20 世纪 60 年代初应运而生。

现代控制理论的产生当然首先归功于从事控制理论研究的一批数学家——贝尔曼、庞特里亚金和卡尔曼等。他们把自动控制课题作为纯数学课题来对待,用纯数学语言加以描述从而获得了大量的理论成果。现代控制理论主要是以状态空间表达式为基准,讨论多输入多输出系统(MIMO)的分析和设计问题。研究对象为线性系统、非线性系统、时变系统、多变量系统、连续和离散系统。

现代控制理论与经典控制理论虽然在方法和思路显著不同,但这两种理论均基于描述动态系统的数学模型,是有内在联系的。经典控制理论以拉普拉斯变换为

主要数学工具,采用传递函数这一描述动力学系统的外部模型,属于外部描述,称为不完全描述;现代控制理论以矩阵论为主要数学工具,采用状态空间表达式这一描述动力学系统运动的内部模型,属于内部描述,称为完全描述。描述动力学系统运动的微分方程则是联系传递函数和状态空间表达式的桥梁。

现代控制理论的发展并不是对经典控制理论的否定,两者之间并不矛盾也并不排斥,而是相辅相成、互为补充的。在进行控制系统的设计和实现时,根据具体的要求、目标和环境,可以选择不同的控制方法,也可以把经典控制理论和现代控制理论结合起来。经典控制理论对模型要求较低,更多的是依赖控制领域设计与应用的经验。而现代控制理论对数学模型的精度要求更高,需要更多的数学基础,更利于计算机实现。

智能控制理论的发展始于 20 世纪 60 年代末。随着时代的前进,人们所面临的问题越来越多,需要加以控制的对象和过程变得越来越复杂,对控制质量的要求也变得日益严格,要求对大型、复杂和具有强烈非线性和不确定性的系统能够实现有效而精确的控制。系统由于存在复杂性、非线性、时变性、不确定性和不完全性,一般无法获得精确的数学模型。无论是经典控制还是现代控制,在应用时都要求有对象的数学模型。在这种情况下,不仅经典控制理论无法解决问题,现代控制理论也显得软弱无力。智能控制以控制理论、计算机科学、人工智能、运筹学等学科为基础,扩展了相关的理论和技术,其中应用较多的有模糊逻辑、神经网络、专家系统、遗传算法等理论和自适应控制、自组织控制和自学习控制等技术。

0.2 控制理论的应用

1868 年至今短短一百多年中,控制理论无论在深度和广度上都得到了令人吃惊的发展,并在控制系统设计这一工程领域发挥着巨大的作用。可以说,控制理论与控制工程对现代社会的工业化进程、科学探索(如卫星等太空器升空、远洋船探索)、国防军备的现代化(如高精度导弹的精确制导)以及人们的生活(如便捷、高速的航空器)等产生了巨大的影响,成为 20 世纪发展最为亮丽的科学领域。

随着计算机技术的发展和运用,控制理论和技术在宇航、机器人控制、导弹制导及核动力等高新技术领域中的应用也愈来愈深入和广泛。不仅如此,控制技术的应用范围现在已扩展到生物、医学、环境、经济管理和其他许多社会生活领域中,成为现代社会生活中不可缺少的一部分。随着时代进步和人们生活水平的提高,在人类探知未来、认识和改造自然、建设高度文明和发达社会的活动中,自动控制理论和技术必将进一步发挥更加重要的作用。自动控制技术的应用不仅使生产过程实现了自动化,极大地提高了劳动生产率,而且减轻了人的劳动强度。自动控制使工作具有高度的准确性,例如大大提高了武器的命中率和战斗力,火炮自动跟踪系统必须采用计算机控制才能打下高速高空飞行的飞机。某些人们不能直接参与工作的场合就更离不

开自动控制技术了,例如原子能的生产、火炮或导弹的制导等。

0.3 MATLAB 软件

美国 MathWorks 公司推出的 MATLAB 语言一直是国际科学界应用和影响最广泛的计算机数学语言之一。在控制类科学中, MATLAB 以其使用方便、直观和强大的功能成为科学研究者首选的计算机语言。它是一种十分有效的工具,能轻松地解决系统仿真和控制系统计算机辅助设计领域教学和研究中遇到的问题;可以将使用者从繁琐的底层编程中解放出来。近十年来,随着 MATLAB 语言和 Simulink 仿真环境在系统仿真、自动控制领域中日益广泛的应用,许多学者都把自己擅长的 CAD 方法用 MATLAB 加以实现,出现了大量的 MATLAB 配套工具箱,如控制系统控制箱(Control System Toolbox)、系统辨识工具箱(System Identification Toolbox)、鲁棒工具箱(Robust Control Toolbox)、最优化工具箱(Optimization Control Toolbox)、信号处理工具箱(Signal Processing Toolbox)等。另外还特别开发了功能强大的控制系统仿真环境 Simulink,它用形象的图形环境为控制系统的分析设计提供了很好的实验工具。

MATLAB 的典型应用包括:数学符号运算与数值计算,算法开发,建模、仿真与原型创建,数据分析、发掘与可视化,科学与工程制图,应用开发及图形用户界面创建。

1.1

1.1.1

1.1.1.1

1.1.1.1.1

1.1.1.1.1.1

1.1.1.1.1.1.1

1.1.1.1.1.1.1.1

1.1.1.1.1.1.1.1.1

1.1.1.1.1.1.1.1.1.1

1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1

1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1

1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1

1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1

第 1 章 控制系统状态空间描述

经典控制理论主要以传递函数为数学工具进行单输入单输出线性定常系统的分析和设计,对于比较复杂的情况(如多输入多输出)和非线性系统则无法进行分析研究。因而经典控制方法分析研究的对象局限性较强、使用范围较窄。而且经典控制理论主要研究系统输入和输出响应之间关系,对于系统内部各变量的变化过程及其对系统的影响则未做分析。随着工业生产的发展,现代工业生产中的控制对象一般都是多输入多输出、多变量、变参数和非线性的复杂系统,需要寻求更适合的系统研究和分析方法,现代控制理论中的状态空间法正是在此需求上发展而来的。

现代控制理论主要以状态空间法为研究工具,研究系统的输入/输出外部特性,并且通过状态变量建立系统内部状态变量与外部输入变量和输出变量之间的关系,研究内部状态对系统的影响以及系统内部和外部状态变量之间的相互联系。状态空间方法不仅能更为全面地描述和研究系统,还有可能找出系统以前未被认识的许多重要特性。其研究对象可以是线性系统、非线性系统,可以是时变系统、定常系统,也可以是连续系统、离散系统,应用范围非常广泛。应用实例方面,以在航空、航天、航海等军事工业领域中系统控制和制导上的应用最为成功。

1.1 状态空间模型

状态空间法的引入促成了现代控制理论的建立和发展,它是现代控制理论研究中的重中之重。本节首先介绍一些状态空间法的基本概念。

1.1.1 状态空间的相关概念

1. 状态变量

能完全表征系统运动状态的最小个数的一组变量称为状态变量,数学描述为 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 。完全表征是指给定了这个变量组在初始时刻 $t=t_0$ 的值和时刻 $t \geq t_0$ 系统的输入函数,那么系统在时刻 $t \geq t_0$ 的行为就可以完全确定。

系统状态变量的选取是非唯一的,但个数是唯一的,通常选取相互独立的储能元件的输出物理量作为状态变量,因此系统的状态变量的个数就等于系统独立储能元件的个数,也等于系统微分方程的阶次。

2. 状态矢量

以状态变量为元组成的向量称为状态矢量。数学描述为

$$(1.1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}^T(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$$

3. 状态空间

状态空间是以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为坐标轴所构成的一个多维空间。由 n 个状态向量为坐标轴构成的 n 维空间即称为 n 维状态空间, 状态空间集合了状态向量的所有可能值。

4. 状态轨迹

在特定时刻 t , 状态向量可用状态空间的一个点来表示, 随着时间的推移, $x(t)$ 将在状态空间描绘出一条轨迹线, 该轨迹称为状态轨迹。

5. 状态方程

由系统的状态变量与输入变量之间的关系构成的一阶微分方程组称为系统的状态方程。

6. 输出方程

输出方程是在指定系统输出的情况下, 输出量与状态变量、输入量之间的函数关系式。

7. 状态空间表达式

状态方程和输出方程综合起来, 在状态空间中建立的对一个系统动态行为的完整描述(数学模型), 称为系统的状态空间表达式。

1.1.2 状态空间一般表达式

在现代控制理论中, 状态空间模型所能描述的系统可以是单输入单输出的, 也可以是多输入多输出的。状态空间表达式是一种采用状态描述系统动态行为(动态特性)的时域描述的数学模型, 它包含状态方程和输出方程。一般情况下, 本书所讨论的系统为具有记忆、能够存储信息的动力学系统, 其系统示意图如图 1.1 所示。

其中, $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ 为系统的 m 个外部输入变量, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ 为其 n 个外部输出变量, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t)$ 为系统内部的 r 个状态变量。

对于多输入多输出系统, 状态方程的一般表达形式为

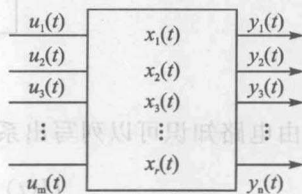


图 1.1 动力学系统示意图

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1[x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t] \\ \dot{x}_2(t) &= f_2[x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t] \\ &\vdots \\ \dot{x}_r(t) &= f_r[x_1(t), x_2(t), \dots, x_r(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t); t] \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

相应的向量方程式为 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t]$ 。其中, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_r(t)]^T$ 为 $r \times 1$ 维的状态向量, $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \dots \ u_m(t)]^T$ 为 $m \times 1$ 维的输入向量。

对于线性定常系统, 状态空间模型的表达式可简化为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

其中, $\mathbf{A}$ 为系统矩阵, 表示系统内部各状态变量之间的关联情况; $\mathbf{B}$ 为输入矩阵, 表示输入对各状态变量的影响情况; $\mathbf{C}$ 为输出矩阵, 表示输出与各状态变量的组成关系; $\mathbf{D}$ 为直通矩阵, 反映输入/输出之间的直接关系。

对于线性时变系统, 其系数矩阵不再是常数矩阵, 矩阵元素是随着时间变化而变化的, 其表达式为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

下面以最简单的 RLC 电路为例, 说明线性定常系统状态空间模型中各参数的对应情况, 其中 $U(t)$ 为输入变量, $U_C(t)$ 为输出变量。

例 1.1 RLC 电路的状态空间模型, 电路如图 1.2 所示。

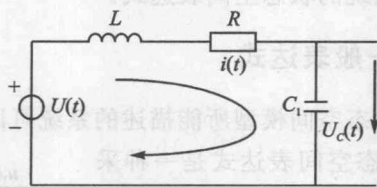


图 1.2 RLC 电路

由电路知识可以列出系统的数学方程式为

$$\left. \begin{aligned} U(t) &= L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + U_C(t) \\ i(t) &= C_1 \frac{dU_C(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

整理成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \frac{di(t)}{dt} \\ \frac{dU_C(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ U_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.5)$$

此时选取状态向量为 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(t) \\ U_C(t) \end{bmatrix}$, 则式(1.5)可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.6)$$

系统输出方程可表示为

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

式(1.6)为 RLC 网络的状态方程。式(1.6)和式(1.7)合起来称为 RLC 网络的状态空间模型,也称为系统的状态空间描述。

状态变量的选取是非唯一的,本例中也可选取状态向量 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} i(t) \\ \int i(t) dt \end{bmatrix}, \text{ 则式(1.4)可化为}$$

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{LC_1}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t) \quad (1.8)$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC_1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U(t) \quad (1.9)$$

输出方程为

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

此时

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{LC_1} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0$$

虽然状态空间法能揭示系统内部运动特征,但是由上述推导可知状态变量的选择并不是唯一的,变量不同所建立的数学模型也不相同。为了便于分析,工程上一般选取能够直接被测量到或被观察到的物理量为状态变量。

由状态方程的一般表达式和例 1.1 的具体表达式均可知,在某一时刻如果状态向量中所有状态变量的值都确定,则该系统的状态便被唯一确定。因此状态向量随时间的变化在状态空间中形成一条运动轨迹。当运用状态空间法来综合控制系统时,控制问题就变为选择一个合适的输入向量,从而使状态轨迹满足指定性能需要的问題。

1.1.3 状态空间表达式的模拟结构图

在状态空间分析中,模拟结构图是用来反映系统各状态变量之间的信息传递关系,对建立系统的状态空间表达式很有帮助。

模拟结构图的绘制步骤如下:积分器的数目应等于状态变量个数,将它们画在适当的位置,每个积分器的输出表示相应的某个状态变量,根据所给的状态方程和输出方程画出相应的加法器和比例器,最后用箭头将这些元件连接起来。

一阶微分方程组

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y = Cx(t) + Du(t)$$

的模拟结构图如图 1.3 所示。

再以三阶微分方程为例,即

$$\ddot{x} + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = bu$$

对上式进行整理,把最高阶导数留在左边,得到

$$\ddot{x} = -a_2\ddot{x} - a_1\dot{x} - a_0x + bu$$

其模拟结构图如图 1.4 所示。

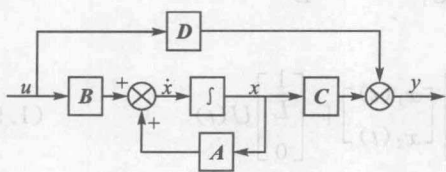


图 1.3 一阶微分方程组的模拟结构图

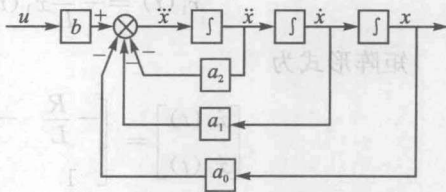


图 1.4 三阶微分方程的模拟结构图

1.2 状态空间表达式的建立

对于控制系统状态空间表达式的求取,一般情况下,需要根据系统的物理或化学原理来建立描述其动力学行为的数学模型,根据数学模型再转化为相应的状态空间表达式。常用的数学模型通常有微分方程、动态结构图和传递函数等形式。

1.2.1 由系统机理建立状态空间表达式

机理分析法是数学建模常用的方法之一。它通过对系统内部机理的分析研究从而找出系统的发展变化规律。常见的控制系统一般都属于物理系统,满足一定的物理定律,根据定律可以建立相应的状态方程。若指定输出也能快捷地列写出输出方程。例 1.1 中的电路分析即采用的这种方法。下面通过对机械和电气系统分析的例子来进一步说明采用该方法建立状态空间表达式的过程。