J I A O X U E Y U C E S H I

高三 数学

教学与测试

- 教师用书
- 选修

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

苏州大学出版社

高三

数学

教学与测试

高三数学教学与测试

（试验修订本　选修）

（教师用书）

苏州大学《中学数学月刊》编辑部主编

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高三数学教学与测试. 教师用书/苏州大学《中学数学月刊》编辑部主编. —苏州：苏州大学出版社，2001.12(2005.5 重印)
选修
ISBN 7-81037-912-7

Ⅰ. 高… Ⅱ. 苏… Ⅲ. 数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 097550 号

敬告读者

为了便于读者识别盗版书，我社 2005 年印制的"中学教学与测试系列丛书"，封面贴有"非常数码产品身份码标贴"，正版图书刮开标贴，即可查证。为保护同学们的视力，本社采用淡黄色环保内芯纸。

如有读者发现有盗印或销售盗版书的线索，请及时向当地新闻出版和工商行政管理部门举报，或向本社反映！

本社联系电话：0512-67258835　67258810

高三数学教学与测试(选修)

教师用书

苏州大学《中学数学月刊》编辑部主编

责任编辑　管兆宁

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市干将东路 200 号　邮编：215021)
海门市文教印刷厂印装
(地址：海门市万年镇中心小学校内　邮编：226136)

开本 787mm×1 092mm　1/16　印张 8.75　字数 214 千
2001 年 12 月第 1 版　2005 年 5 月第 7 次印刷
ISBN 7-81037-912-7/G·391　定价：10.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512—67258835

《高三数学教学与测试》编委会名单

（试验修订本　选修）

前　　言

教育部组织专家对新高中数学教学大纲及新编高中数学教材作了进一步修订，并已在全国推广使用. 由于高三学年采用选修Ⅰ、Ⅱ的方式，选修Ⅱ新增了概率与统计、导数及其应用等内容；选修Ⅰ增加了统计一章以及导数部分内容，而这些内容恰恰是中学教师比较生疏的. 如何把握教学目标和教学要求，体会教材编者的思想，正确处理这些内容的教学，正是当务之急. 为了向广大数学教师和高三学生提供一套与新教材配套的高质量的教辅用书，我们针对新教材的高考试卷进行了深入研究，仔细分析经修订的《中学数学教学大纲》和中学《数学》教材，对已编写的与新教材配套的《高三数学教学与测试》(选修)再次进行修订. 它既可作为教师的教学参考用书，也可作为高三学生的自学和练习用书.

本书分为学生用书与教师用书. 全书分 4 章，共 32 节. 原则上每节与新教材 2 课时同步. 学生用书内容以试验用的高三数学选修本为主线，紧密配合课堂教学进行同步训练和测试. 所选题材严格按照教学大纲要求，同时注意新高考命题改革的趋势. 每节新课按[学习指导]、[例题]、[练习题]及[思考题]四个部分编排；习题课按[基础训练题]、[例题]、[练习题]三个部分编排；复习课按[选择题]、[填空题]、[解答题]三个部分编排；每章末提供一个与本章学习内容有关的[阅读材料]. 力求做到：① 根据各节内容的不同特点，简明扼要地说明该节的知识要点、重点与难点、思想方法及注意点. ② 精选例题，具有典型性、层次性. 注意控制难度并有一定的梯度. ③ 在注意练习题新颖的同时，在难度、梯度、广度和解答容量上把好关. 一方面注意练习题与例题的联系，便于学生练习；另一方面注意练习题的层次性. 适当编排了应用题，注意联系实际，既有新颖性又有科学性. ④ 每节给出的一个思考题均是本节有关内容的拓广或深化，以培养学生的探索能力和创新能力. ⑤ 阅读材料与对应章节内容紧密相关，具有知识性、趣味性. 教师用书包括了学生用书的全部例题、习题及解答，每节还包括了一定数量的备用题及解答，供教师选用. 打 * 号的节可作为选修Ⅰ教学内容选用.

多年来，全国各地中学数学教师、学生、家长和社会各界对我们编写的中学数学方面的书籍，给予了热情的关怀和支持，在此一并表示衷心的感谢. 我们真诚地希望使用本书的教师、学生和家长将使用的情况和意见反馈我们，以便我们今后进一步修改完善.

苏州大学《中学数学月刊》编辑部

2005 年 5 月 8 日

Contents 目录

第一章 概率与统计

1. 离散型随机变量的分布列 …………（1）
*2. 离散型随机变量的期望和方差 …（6）
*3. 习题课 ……………………………（10）
*4. 抽样方法 …………………………（14）
*5. 总体分布的估计 …………………（18）
6. 正态分布 …………………………（23）
7. 线性回归 …………………………（27）
*8. 复习题 ……………………………（31）
阅读材料 Excel 在概率与统计计算中的应用 ………………（37）

第二章 极 限

9. 数学归纳法（1）……………………（39）
10. 数学归纳法（2）…………………（43）
11. 数列的极限（1）…………………（47）
12. 数列的极限（2）…………………（51）
13. 习题课（1） ………………………（55）
14. 函数的极限（1）…………………（58）
15. 函数的极限（2）…………………（62）
16. 函数的连续性……………………（66）
17. 习题课（2） ………………………（70）
18. 复习题 ……………………………（73）
阅读材料 介值定理 ………………（77）

第三章 导数及其应用

*19. 导数的概念和常见函数的导数 ………………………………（79）
*20. 函数的和、差、积、商的导数 ……（83）
21. 复合函数的导数…………………（86）
22. 指数、对数函数的导数公式 ……（89）
*23. 习题课（1） ………………………（91）
*24. 函数的单调性 ……………………（94）
*25. 函数的极值 ………………………（98）
*26. 函数的最大值与最小值 ………（102）
*27. 习题课（2） ……………………（107）
*28. 复习题 …………………………（111）
阅读材料 微积分的创立 …………（116）

第四章 复 数

29. 复数的概念 ……………………（118）
30. 复数的加减法 …………………（121）
31. 复数的乘除法 …………………（124）
32. 数学的扩充 ……………………（126）
阅读材料 复数史话 ……………（131）

第一章　概率与统计

1. 离散型随机变量的分布列

学习指导

随机变量是概率与统计中的基本概念，由于随机变量的引入，我们可以用变量来刻划随机试验的结果(即样本点)以及随机事件(即样本点的集合)，以便更好地利用数学工具对随机现象进行研究.

1. 了解随机变量的概念与意义，随机变量的可能取值与随机试验的结果之间的关系，会根据实际问题用随机变量正确表示某些随机试验的结果与随机事件.

2. 理解离散型随机变量及其分布列的概念，掌握分布列的两个基本性质，会求一些简单的离散型随机变量的分布列.

3. 了解二项分布的实际背景，会用二项分布计算有关随机事件的概率.

4. 会根据离散型随机变量 ξ 的分布列求出 $\eta=a\xi+b$(a,b 为常数)的分布列.

一、例　题

1. 袋中有 1 个白球，2 个红球，4 个黑球. 现从中任取一球观察其颜色，确定这个随机试验中的随机变量，并指出在这个随机试验中随机变量可能取的值及分布列.

解　设集合 $M=\{x_1,x_2,x_3\}$，其中 x_1 为“取到的球为白球”，x_2 为“取到的球为红球”，x_3 为“取到的球为黑球”. 在本题中可规定：$\xi(x_i)=i(i=1,2,3)$，即当试验结果 $x=x_i$ 时，随机变量 $\xi(x)=i$，这样，我们确定 $\xi(x)$ 是一个随机变量，它的自变量 x 的取值是集合 M 中的一个元素，即 $x\in M$，而随机变量 ξ 本身的取值则为 1，2，3. ξ 分别取 1，2，3 三个值的概率为 $P(\xi=1)=\frac{1}{7}$，$P(\xi=2)=\frac{2}{7}$，$P(\xi=3)=\frac{4}{7}$.

ξ 的分布列为

ξ	1	2	3
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$

说明　分布列的表示形式有以下几种：① 如教材所述的表格形式；② 一组等式(ξ 的所有取值的概率)；③ 有时可将②压缩为一个带“i”的等式.

2. 设随机变量 ξ 的分布列为 $P(\xi=k)=\frac{a}{k(k+1)}$，$k=1,2,3$. 求常数 a 及概率 $P(0.5<\xi<2.5)$.

解 $1=\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}\right)a=\frac{3}{4}a$，故 $a=\frac{4}{3}$，

所以，$P(0.5<\xi<2.5)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$.

说明 应熟悉分布列的基本性质：若随机变量 ξ 的取值为 $x_1,x_1,\cdots,x_i,\cdots$，取这些值的概率为 $P(\xi=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots$，则① $p_i\geqslant0,i=1,2,\cdots$；② $p_1+p_2+\cdots=1$.

3. 一袋中装有 5 只球，编号为 1,2,3,4,5，在袋中同时取 3 只，以 ξ 表示取出的三只球中的最小号码，写出随机变量 ξ 的分布列.

解 随机变量 ξ 的可能取值为 1,2,3.

当 $\xi=1$ 时，即取出的三只球中最小号码为 1，则其他两只球只能在编号为 2,3,4,5 的四只球中任取两只，故有 $P(\xi=1)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$；

当 $\xi=2$ 时，即取出的三只球中最小号码为 2，则其他两只球只能在编号为 3,4,5 的三只球中任取两只，故有 $P(\xi=2)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$；

当 $\xi=3$ 时，即取出的三只球中最小号码为 3，则其他两只球只能在编号为 4,5 的两只球中任取两只，故有 $P(\xi=3)=\frac{C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}$.

因此，ξ 的分布列如表所示：

ξ	1	2	3
P	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

二、练习题

1. 袋中有 2 个黑球 6 个红球，从中任取两个，可以作为随机变量的是 (B)

(A) 取到的球的个数　(B) 取到红球的个数

(C) 至少取到一个红球　(D) 至少取到一个红球的概率

提示 (A) 的取值不具有随机性，(C) 是一个事件而非随机变量，(D) 是概率值而非随机变量，而(B)满足要求.

2. 抛掷两颗骰子，所得点数之和记为 ξ，那么 $\xi=4$ 表示的随机试验结果是 (D)

(A) 一颗是 3 点，一颗是 1 点　(B) 两颗都是 2 点

(C) 两颗都是 4 点　(D) 一颗是 3 点，一颗是 1 点或两颗都是 2 点

提示 对(A)、(B)中表示的随机试验的结果，随机变量均取值 4，而(D)是 $\xi=4$ 代表的所有试验结果. 掌握随机变量的取值与它刻划的随机试验的结果的对应关系是理解随机变量概念的关键.

3. 下列表中能成为随机变量 ξ 的分布列的是　(C)

(A)

ξ	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.4

(B)

ξ	1	2	3
P	0.4	0.7	-0.1

(C)

ξ	-1	0	1
P	0.3	0.4	0.3

(D)

ξ	1	2	3
P	0.3	0.4	0.4

提示　(A)、(D) 不满足分布列的基本性质②，(B) 不满足分布列的基本性质①，正确选择是(C).

4. 在三次独立重复试验中，若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为 $\underline{\frac{1}{3}}$.

提示　$\frac{19}{27}=1-(1-p)^3 \Rightarrow P(A)=p=\frac{1}{3}$.

5. 若离散型随机变量 ξ 的分布列为：

ξ	0	1
P	$3-5a$	$6a^2-2a$

则常数 $a=\underline{\frac{1}{2}}$.

提示　由离散型随机变量分布列的基本性质，知 $\begin{cases}3-5a+6a^2-2a=1,\\ 0\leqslant 3-5a\leqslant 1,\\ 0\leqslant 6a^2-2a\leqslant 1,\end{cases}$

解得常数 $a=\frac{1}{2}$.

6. 设随机变量 $\xi\sim B(2,p)$，$\eta\sim B(4,p)$，若 $P(\xi\geqslant 1)=\frac{5}{9}$，则 $P(\eta\geqslant 1)=\underline{\frac{65}{81}}$.

提示　$\frac{5}{9}=P(\xi\geqslant 1)=1-P(\xi=0)=1-(1-p)^2$，即 $(1-p)^2=\frac{4}{9}$，$p=\frac{1}{3}$.

故 $P(\eta\geqslant 1)=1-P(\eta=0)=1-(1-p)^4=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{65}{81}$.

7. 一名学生每天骑自行车上学，从家到学校的途中有 5 个交通岗，假设他在各交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{1}{3}$. (1) 求这名学生在途中遇到红灯的次数 ξ 的分布列；(2) 求这名学生在首次遇到红灯或到达目的地停车前经过的路口数 η 的分布列；(3) 这名学生在途中至少遇到一次红灯的概率.

解　(1) $\xi\sim B\left(5,\frac{1}{3}\right)$，$\xi$ 的分布列为 $P(\xi=k)=C_5^k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}$，$k=0,1,\cdots,5$.

(2) η的分布列为$P(\eta=k)=P$(前k个绿灯,第$k+1$个是红灯)$=\left(\frac{2}{3}\right)^k\times\frac{1}{3}$,$k=0,1,\cdots,4$;$P(\eta=5)=P$(5个均为绿灯)$=\left(\frac{2}{3}\right)^5$.

(3) 所求概率$=P(\xi\geqslant1)=1-P(\xi=0)=1-\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{211}{243}\approx0.8683$.

8. 设随机变量ξ只能取1,2,3,4,5这5个值,且ξ取各个值的概率与相应的取值成正比,求(1) ξ的分布列;(2) $P(\xi\leqslant2)$;(3) $P(4<\xi<10)$.

解 (1) 由题意,ξ的分布列为$P(\xi=k)=ak$,$k=1,2,3,4,5$.

因为$P(\xi=1)+P(\xi=2)+\cdots+P(\xi=5)=1$,即$a(1+2+\cdots+5)=1$.

$\therefore a=\frac{1}{15}$,$\xi$的分布列为

ξ	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

(2) $P(\xi\leqslant2)=P(\xi=1)+P(\xi=2)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$;

(3) $P(4<\xi<10)=P(\xi=5)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

三、思考题

设随机变量ξ的概率分布如表所示:

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

求:(1) $P(\xi<1)$,$P(\xi\leqslant1)$,$P(\xi<2)$,$P(\xi\leqslant2)$;
(2) $F(x)=P(\xi\leqslant x)$,$x\in\mathbf{R}$.

解 (1) $P(\xi<1)=P(\xi=0)=\frac{1}{2}$,$P(\xi\leqslant1)=P(\xi=0)+P(\xi=1)=\frac{5}{6}$,

$P(\xi<2)=P(\xi\leqslant1)=\frac{5}{6}$,$P(\xi\leqslant2)=1$;

(2) $F(x)=P(\xi\leqslant x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{5}{6}, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant2.\end{cases}$

四、备用题

1. 将一颗均匀骰子掷两次,不能作为随机变量的是 **(A)**

(A) 两次掷得的点数　　(B) 两次掷得的点数之和
(C) 两次掷得的最大点数　　(D) 第一次掷得的点数减去第二次掷得的点数差

提示 (A) 两次掷得的点数的取值是一个数对，不是一个数. 以后若学习了多维随机变量的知识就知道，它是一个二维随机变量.

2. 现有一大批种籽，其中优质良种占 30%，从中任取 5 粒，记 ξ 为 5 粒中的优质良种粒数，则 ξ 的分布列是 $\underline{P(\xi=k)=C_5^k 0.3^k 0.7^{5-k}, k=0,1,\cdots,5}$.

提示 $\xi \sim B(5,0.3)$，ξ 的分布列是 $P(\xi=k)=C_5^k 0.3^k 0.7^{5-k}, k=0,1,\cdots,5$ 或

ξ	0	1	2	3	4	5
P	0.16807	0.36015	0.3087	0.1323	0.02835	0.00243

3. 已知随机变量 ξ 的分布列如右表所示，分别求出随机变量 $\eta_1=2\xi-1$，$\eta_2=\xi^2$ 的分布列.

ξ	-2	-1	0	1	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

解 由于 $\eta_1=2\xi-1$ 对于不同的 ξ 有不同的取值 $y=2x-1$，即

$y_1=2x_1-1=-5$，$y_2=2x_2-1=-3$，

$y_3=2x_3-1=-1$，$y_4=2x_4-1=1$，

$y_5=2x_5-1=5$，故 η_1 的分布列如右表.

η_1	-5	-3	-1	1	5
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$\eta_2=\xi^2$ 对于 ξ 的不同的取值 -1 与 1，取相同的值 1，故

$$P(\eta_2=1)=P(\xi=-1)+P(\xi=1)=\frac{5}{10}.$$

η_2 的分布列如右表所示.

η_2	0	1	4	9
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

说明 在得到的随机变量的分布列中，取值行中应无重复数；概率行中各项必须非负，且各项之和为 1.

4. 将一颗骰子掷 2 次，求下列随机变量的概率分布.
(1) 两次掷出的最大点数 ξ_1；
(2) 两次掷出的最小点数 ξ_2；
(3) 第一次掷出的点数减去第二次掷出的点数之差 ξ_3.

解 (1) $\xi_1=k$ 包含两种情况，两次均为 k 点，或一个 k 点，另一个小于 k 点.

故 $P(\xi_1=k)=\dfrac{1+(k-1)\times 2}{6\times 6}=\dfrac{2k-1}{36}, k=1,2,\cdots,6.$

(2) $\xi_2=k$ 包含两种情况，两次均为 k 点，或一个 k 点，另一个大于 k 点.

故 $P(\xi_2=k)=\dfrac{1+(6-k)\times 2}{36}=\dfrac{13-2k}{36}, k=1,2,\cdots,6.$

(3) ξ_3 的取值范围是 $-5,-4,\cdots,4,5$，$\xi_3=-5$，即第 1 次是 1 点，第 2 次是 6 点；$\xi_3=-4$，即第 1 次是 1 或 2 点，第 2 次对应是 5 或 6 点……$\xi_3=0$，即第 1 次是 1 至 6 点，第 2 次对应是 1 至 6 点……$\xi_3=5$，即第 1 次是 6 点，第 2 次 1 点. ξ_3 的分布列是：

ξ_3	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

*2. 离散型随机变量的期望和方差

学习指导

离散型随机变量的期望和方差都是随机变量的重要特征数，期望反映了随机变量的平均取值，方差反映了随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度.

1. 了解离散型随机变量的期望和方差的概念与意义，了解随机变量的标准差的定义.

2. 掌握离散型随机变量的期望和方差的计算公式与运算性质：

$$E\xi=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i,\qquad D\xi=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E\xi)^2p_i=E\xi^2-(E\xi)^2,$$

$$E(a\xi+b)=aE\xi+b,\qquad D(a\xi+b)=a^2D\xi.$$

能根据离散型随机变量的分布列求出期望与方差.

3. 掌握二项分布的期望与方差：若 $\xi\sim B(n,p)$，则 $E\xi=np,D\xi=np(1-p)$.

4. 能用离散型随机变量的期望和方差解决一些实际问题.

一、例题

1. 袋中有 4 只红球，3 只黑球，今从袋中随机取出 4 只球. 设取到一只红球得 2 分，取到一只黑球得 1 分，试求得分 ξ 的概率分布和数学期望.

解 直接考虑得分的话，情况较复杂，可以考虑取出的 4 只球颜色的分布情况：4 红得 8 分，3 红 1 黑得 7 分，2 红 2 黑得 6 分，1 红 3 黑得 5 分，故

$P(\xi=5)=\frac{C_4^1C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}$，$P(\xi=6)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}$，$P(\xi=7)=\frac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}$，$P(\xi=8)=\frac{C_4^4C_3^0}{C_7^4}=\frac{1}{35}$；

$E\xi=5\times\frac{4}{35}+6\times\frac{18}{35}+7\times\frac{12}{35}+8\times\frac{1}{35}=\frac{220}{35}=\frac{44}{7}$.

2. 每人在一轮投篮练习中最多可投篮 4 次，现规定一旦命中即停止该轮练习，否则一直试投到 4 次为止. 已知一选手的投篮命中率为 0.7，求一轮练习中该选手的实际投篮次数 ξ 的分布列，并求出 ξ 的期望 $E\xi$ 与方差 $D\xi$（保留 3 位有效数字）.

解 ξ 的取值为 1，2，3，4.

$\xi=1$，表示第一次即投中，故 $P(\xi=1)=0.7$；

$\xi=2$，表示第一次未投中，第二次投中，故 $P(\xi=2)=(1-0.7)\times0.7=0.21$；

$\xi=3$，表示第一、二次未投中，第三次投中，故 $P(\xi=3)=(1-0.7)^2\times0.7=0.063$；

$\xi=4$，表示前三次均未投中，故 $P(\xi=4)=(1-0.7)^3=0.027$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	1	2	3	4
P	0.7	0.21	0.063	0.027

$E\xi=1\times0.7+2\times0.21+3\times0.063+4\times0.027=1.417$.

$D\xi=(1-1.417)^2\times0.7+(2-1.417)^2\times0.21+(3-1.417)^2\times0.063+(4-1.417)^2\times 0.027=0.531$.

说明　计算 $D\xi$ 时可利用 $D\xi=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i^2p_i-(E\xi)^2$ 简化运算.

3. 将一枚硬币抛掷 n 次，求正面次数与反面次数之差 ξ 的概率分布，并求出 ξ 的期望 $E\xi$ 与方差 $D\xi$.

解　设正面的次数是 η，则 η 服从二项分布 $B(n,0.5)$，概率分布为 $P(\eta=k)=C_n^k0.5^n$，$k=0,1,\cdots,n$，且 $E\eta=0.5n$，$D\eta=0.25n$. 而反面次数为 $n-\eta$，$\xi=\eta-(n-\eta)=2\eta-n$.

于是，ξ 的概率分布为　$P(\xi=2k-n)=P(\eta=k)=C_n^k0.5^n$，$k=0,1,\cdots,n$；

或 $P(\xi=k)=P\left(\eta=\dfrac{n+k}{2}\right)=C_n^{\frac{n+k}{2}}0.5^n$，$k=-n,-n+2,-n+4,\cdots,n$.

故　$E\xi=E(2\eta-n)=2E\eta-n=2\times0.5n-n=0$，

$D\xi=D(2\eta-n)=2^2D\eta=4\times0.25n=n$.

二、练习题

1. 已知 ξ 的分布列为

ξ	-1	0	1
P	0.3	0.5	0.2

，$\eta=3\xi-1$，则 $E\eta$ 等于　(D)

(A) 1　(B) 0.2　(C) -1　(D) -1.3

提示　先用定义直接计算 $E\xi=-0.1$，再根据公式得 $E\eta=3E\xi-1=-1.3$.

2. 已知 ξ 的分布列为

ξ	-1	0	1
P	0.3	0.5	0.2

，则 $D\xi$ 等于　(B)

(A) 0.5　(B) 0.49　(C) 0.51　(D) -0.1

提示　直接用定义或性质计算.

3. 若 ξ 的分布列为

ξ	0	1
P	p	q

，其中 $p\in(0,1)$，则　(D)

(A) $E\xi=p$，$D\xi=pq$　(B) $E\xi=p$，$D\xi=p^2$

(C) $E\xi=q$，$D\xi=q^2$　(D) $E\xi=1-p$，$D\xi=p-p^2$

提示　$\xi\sim B(1,q)$，$p+q=1$.

4. 抛掷一颗骰子，设所得点数为 ξ，则 $E\xi=$ __3.5__，$D\xi=$ __$\dfrac{35}{12}$__.

提示　ξ 的概率分布为 $P(\xi=k)=\dfrac{1}{6}$，$k=1,2,\cdots,6$，按定义计算得 $E\xi=3.5$，$D\xi=\dfrac{35}{12}$.

5. 有两台自动包装机甲与乙，包装重量分别为随机变量 ξ_1，ξ_2，已知 $E\xi_1=E\xi_2$，$D\xi_1>D\xi_2$，则自动包装机__乙__的质量较好.

6. 设一次试验成功的概率为 p，进行 100 次独立重复试验，当 $p=$ __$\frac{1}{2}$__ 时，成功次数的标准差的值最大，其最大值为__5__.

解 $D\xi=npq\leqslant n\left(\frac{p+q}{2}\right)^2=\frac{n}{4}$，等号在 $p=q=\frac{1}{2}$ 时成立，此时，$D\xi=25$，$\sigma\xi=5$.

7. 设一袋中有 5 只球，其中 3 只标有 1，2 只标有 10. 某人从袋中随机无放回地取出 3 只球. 若他所获得的奖金额为所取到的 3 只球上所标数字的总和，求他所获奖金额的数学期望与方差.（**若改为 10 只球中 6 只标 1，4 只标 10，所获奖金额的数学期望与方差是否有变化？如何变化？说明了什么？）

解 设随机变量 ξ 表示此人所获奖金额，则 ξ 的分布列为

ξ	3	12	21
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$

$E\xi=\frac{69}{5}=13.8$，$D\xi=\frac{729}{25}=29.16$，

此人平均可获奖金 13.8，所获奖金额的方差为 29.16.

（**若改为 10 只球中 6 只标 1，4 只标 10.）

设随机变量 η 表示此人所获奖金额，则 η 的分布列为

η	3	12	21	30
P	$\frac{5}{30}$	$\frac{15}{30}$	$\frac{9}{30}$	$\frac{1}{30}$

$E\eta=\frac{69}{5}=13.8$，$D\eta=\frac{1134}{25}=45.36$，

此时，平均可获奖金额不变，仍为 13.8，但方差增大为 45.36，说明此时所获奖金额的波动变大了.）

8. 人寿保险中（某一年龄段），在一年的保险期内，每个被保险人需交纳保费 a 元，被保险人意外死亡则保险公司赔付 3 万元，出现非意外死亡则赔付 1 万元. 经统计，此年龄段一年内意外死亡的概率是 p_1，非意外死亡的概率为 p_2，则 a 需满足什么条件，保险公司才可能盈利.

解 设 ξ 为盈利数，其概率分布为：

ξ	a	$a-30000$	$a-10000$
P	$1-p_1-p_2$	p_1	p_2

且 $E\xi=a(1-p_1-p_2)+(a-30000)p_1+(a-10000)p_2=a-30000p_1-10000p_2$.

要想盈利，至少需使 ξ 的数学期望大于零，故 $a>30000p_1+10000p_2$.

三、思考题

在某一项有奖销售中，每 10 万张奖券中有 1 个头奖，奖金 10000 元；2 个二等奖，奖金各 5000 元；500 个三等奖，奖金各 100 元，10000 个四等奖，奖金各 5 元. 试求每张奖券奖金的期望值. 如果每张奖券 2 元，销售一张平均获利多少？（假设所有奖券全部售完）

解　每张奖券可获得的奖金数 ξ 的分布列为

ξ	10000	5000	100	5	0
P	$\frac{1}{100000}$	$\frac{2}{100000}$	$\frac{500}{100000}$	$\frac{10000}{100000}$	$\frac{89497}{100000}$

$E\xi=10000\times\frac{1}{100000}+5000\times\frac{2}{100000}+100\times\frac{500}{100000}+5\times\frac{10000}{100000}=1.2$（元）.

如果每张奖券 2 元，销售一张平均获利 0.8 元.

四、备用题

1. 设服从二项分布 $B(n,p)$ 的随机变量 ξ 的期望和方差分别是 2.4 与 1.44，则二项分布的参数 n,p 的值为　(B)

(A) $n=4,p=0.6$　　(B) $n=6,p=0.4$

(C) $n=8,p=0.3$　　(D) $n=24,p=0.1$

解　由 $E\xi=2.4=np,D\xi=1.44=np(1-p)$，可得

$1-p=\frac{1.44}{2.4}=0.6,p=0.4,n=\frac{2.4}{0.4}=6$. 应选(B).

2. 设每次试验中事件 A 发生的概率为 0.2，为了使事件 A 在独立试验序列中至少发生一次的概率不小于 0.99，至少需要进行__21__次试验.

提示　设 n 表示所需进行的试验次数，ξ 表示 n 次试验中 A 事件发生的次数，则

$\xi\sim B(n,0.2),P(\xi\geqslant1)\geqslant0.99,1-P(\xi=0)\geqslant0.99,1-(1-0.2)^n\geqslant0.99$,

$0.8^n\leqslant0.01,n\geqslant\frac{\lg0.01}{\lg0.8}=20.64$，$n$ 至少为 21.

3. 一次单元测试由 50 个选择题构成，每个选择题有 4 个选项，其中恰有一个是正确答案. 每题选择正确得 2 分，不选或选错得 0 分，满分是 100 分. 学生甲选对任一题的概率为 0.8，求他在这次测试中成绩的期望和标准差.

解　设学生甲答对题数为 ξ，成绩为 η，则 $\xi\sim B(50,0.8),\eta=2\xi$，故成绩的期望为 $E\eta=E(2\xi)=2E\xi=2\times50\times0.8=80$（分）.

成绩的标准差为 $\sigma\eta=\sqrt{D\eta}=\sqrt{D(2\xi)}=\sqrt{4D\xi}=2\sqrt{50\times0.8\times0.2}=4\sqrt{2}\approx5.7$（分）.

4. 大批产品中次品率为 p，从中取出 n 个，设 ξ 是抽取到的次品个数. 又设

$\eta=\begin{cases}0,\xi\text{为偶数},\\1,\xi\text{为奇数},\end{cases}$ 求 $E\eta$.

解 $E\eta=0\times P(\eta=0)+1\times P(\eta=1)=P(\xi$为奇数). 因为 $\xi\sim B(n,p)$，故 $P(\xi=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,\cdots,n$. 由二项式定理，得

$1=[(1-p)+p]^n=P(\xi$为偶数$)+P(\xi$为奇数),

$[(1-p)-p]^n=P(\xi$为偶数$)-P(\xi$为奇数),

由此得 $P(\xi$为奇数$)=\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$，所以，$E\eta=\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$.

*3. 习 题 课

一、基础训练题

1. 下列随机变量中，不是离散型随机变量的是 (C)

(A) 从10只编号的球(0号到9号)中任取一只，被取出的球的号码 ξ

(B) 抛掷两个骰子，所得的最大点数 ξ

(C) $[0,10]$区间内任一实数与它四舍五入取整后的整数的差值 ξ

(D) 一电信局在未来某日内接到的电话呼叫次数 ξ

提示 (C)的取值在区间$[-0.5,0.5)$，不能按一定次序一一列出，不是离散型随机变量.

2. 一盒中同一种产品24个，其中一级产品21个，特级产品3个，从中任取2个. 设 ξ 表示取到的产品中特级品的个数，则下式中等于 $\frac{C_{21}^1C_3^1+2C_3^2}{C_{24}^2}$ 的是 (B)

(A) $D\xi$ (B) $E\xi$ (C) $P(0<\xi\leqslant 2)$ (D) $P(1<\xi\leqslant 2)$

提示 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2
P	$\frac{C_{21}^2C_3^0}{C_{24}^2}$	$\frac{C_{21}^1C_3^1}{C_{24}^2}$	$\frac{C_{21}^0C_3^2}{C_{24}^2}$

$\therefore E\xi=0\times\frac{C_{21}^2}{C_{24}^2}+1\times\frac{C_{21}^1C_3^1}{C_{24}^2}+2\times\frac{C_3^2}{C_{24}^2}=\frac{C_{21}^1C_3^1+2C_3^2}{C_{24}^2}=0.25.$

3. 一个袋子中装有大小相同的3个红球和2个黄球，从中同时取出2个，则其中含红球个数的数学期望是 <u>1.2</u>.

提示 数学期望$=0\times\frac{C_3^0C_2^2}{C_5^2}+1\times\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}+2\times\frac{C_3^2C_2^2}{C_5^2}=1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{3}{10}=1.2.$

4. 某批数量较大的产品次品率为10%，从中随机地连续取出4件，则其中恰恰有3件次品的概率是 <u>0.0036</u>.

提示 次品数服从二项分布.