特级教师导学丛书 卢嘉锡题

孙维刚

初中数学

教育科学出版社

特级教师导学丛书

初中数学

孙维刚 编著

教育科学出版社

（京）新登字第111号

初 中 数 学

孙维刚 编著　　责任编辑 郑桂泉

教育科学出版社出版、发行 （北京·北太平庄·北三环中路46号）
各地新华书店经销　北京顺义燕华印刷厂印装
开本：787×1092毫米 1/32 印张：12.875 字数：258千
1993年9月第1版 1993年9月第1次印刷
印数：00,001—15,000册

ISBN 7-5041-1164-3/G·1121 定价：7.20元

前 言

努力提高全民族的思想道德和科学文化素质，是实现我国现代化的根本大计。因此，教育面临的基本任务是要面向现代化，面向世界，面向未来，为社会主义建设培养大批高素质的合格人才。要达到这个目的，在基础教育中，应充分发挥中小学特级教师的作用。自1978年邓小平同志在全国教育工作会议上提出“特别优秀的教师，可以定为特级教师”以来，全国共评出特级教师7000余人。

评出的特级教师忠于职守，甘于奉献，勤勤恳恳，起到了模范作用；勤于钻研，勇于创新，严谨治学，精益求精，起到了学术带头作用；通过讲示范课、观摩课、研究课等方式积极培养中青年教师，起到了指导示范作用；主动关心学校工作，为领导出谋划策，起到了参谋咨询作用，为我国的基础教育事业做出了贡献，赢得了人民的尊敬和爱戴，产生了很大的社会影响，对提高中小学教师地位起到了促进作用。人们赞扬特级教师是“师德的表率、育人的模范、教学的专家”。

特级教师教育教学的宝贵经验，对广大教师做好教育教学工作，促进学生生动活泼地发展，变被动的学习为生动活泼、积极主动的学习，都具有极其重要的作用。因此，我们在国家教委人事司、民族地区教育司的指导下，约请全国有影响的部分特级教师，从指导学生学习的角度，编写了《特级教师导学丛书》（共20册）。这套丛书既反映了特级教师导学艺术规律的共性，也体现了他们各自导学艺术的鲜明个

性，是每位作者长期教育教学经验的升华与结晶。

本套丛书的基本特点可以概括为以下三点：

1. 知识系统的全面性。丛书概括的中、小学各学科的主要内容，突出该学科的重点、难点、疑点与误区，把特级教师多年的教育教学经验和“绝招”落实到指导学科学习的关键环节上，举一反三，触类旁通，由浅入深，环环相扣。

2. 指导学习的实用性。丛书立足于学生升学与就业的实际需要，从知识点的分布、练习的配备，直到学习方法的指导，都有极强的针对性，渗透着作者教学的精华与经验的精髓。

3. 结构体系的科学性。丛书力求以最少的时间求得最高的学习效率，让学生把握学科知识的系统与内在联系，配以科学的训练，使丛书内容的科学性与训练步骤的科学性达到完美的统一。

本丛书以促进学生掌握基本知识、基础理论和基本技能，培养学生分析问题和解决问题的能力为目的，融特级教师的教学经验和教学内容为一体，将以它鲜明的特色成为学生提高学习效率，教师提高教学水平不可多得的必备书。

这套丛书，与国家教委有关部门组织编写的特级教师教学经验方面的丛书配套使用，将会在促进教师提高教育教学水平、调动广大学生的学习积极性、科学地掌握学习方法方面，起到不可替代的作用。

序

《特级教师导学丛书》，集特级教师宝贵的教学经验于一体，兼及各科，既深入教学实际，由点及面，广采博览，又深入浅出，囊括知识，由博返约，点拨疑难，指明思路，使学生从繁难的题海中解放出来，成为学习的主人。

教师的主要职责是使具有强烈求知欲，嗷嗷待哺的学生，从被动的学习转变为生动活泼积极主动的学习。这就需要开发学生的心智，激励学生学习的勇气，调动学生的智力因素和非智力因素，使个性不同的学生从不同的基础上、不同的知识点上、不同的悟性程度上奋勇进取，不断地发幽探微，豁然开朗。因而不仅要凭教师的宝贵经验，更需要教师的睿智眼光，从德、才、学、识的高度，适时地点燃学生学习思维活动的智慧火花。而特级教师所具有的导学"高招"和导学艺术往往是学生和青年教师所企盼的。

《特级教师导学丛书》正是一套体现特级教师导学艺术规律的共性，又显现每一位作者导学艺术鲜明个性的丛书。它面向全体学生，分为适宜小学、初中、高中学生使用的版本。它以国家教委教学大纲为依据，以培养学生学习能力，发展学生智力为宗旨，以高质量的习题为全书结构的中心，突出思维训练，讲知识，指思路，做练习，重点放在解题思路的分析上，使学生会学、会想，真正给学生解难释疑。在题目的设计、选择、安排上，贵新、贵精、贵巧，而不在多。总之，这是一套侧重平时学习的循序渐进，又兼及提高学习效率的导学丛书。它立足于使学生获得长期的学习效果，着眼于提高学生的人文科学和自然科学技术素质，培养动手实验能力，面对升学、就业都会

受益匪浅，永久难忘。

《特级教师导学丛书》给予学生求索知识的信心和勇气，教给学生科学的思维方法，更重要的是开启学生学习个性的心扉，培养学生优良的学习品质和严谨的科学的学风。让学生迈动欢快的脚步，在通向知识，通向理解，通向未来的道路上愉快地前进。只要他们成长为一个聪明的人，成长为对祖国和人民有用的人才，那就是教师的最大欣慰，也是特级教师把这套丛书作为礼物献给学生们的初衷。

韩作黎

1993年4月

目　录

作者的话

数学是一门很重要的基础课．如何学好数学，这是许多中学生共同关心的问题．为此，本书就初中代数和平面几何的学习，结合自己多年的教学经验和具体实例，对如何学、学什么的有关方法和要求作了论述．供同学们学习参考．

一、明确学习数学的目的

弄清目的，这是做好一件事情的前提．

学习数学的目的是什么呢？

人们常说，要把数学学好，因为它是学好许多功课的基础．但这个“基础”指什么？在理解上，差别就大了．

有人说，初中化学里计算化合物组成的百分比、利用化学反应方程式的计算，都要利用比例，这是数学里学的；高中化学里有关百分比浓度、摩尔浓度的计算，也要用数学；而物理中，只要把公式确定好了，余下的工作就是公式变形及代入数值进行计算，这些都是数学的问题．所以，数学学不好，物理、化学也完成不好，因此，数学是基础．

这种理解是片面和肤浅的，只把数学视为一种工具（尽管是非常重要的工具）是不利于把数学学好的．

恩格斯指出：数学，是研究现实世界的存在形式和数量关系的科学．

近年来，已经有人提出：数学，是研究人类的存在形式和思维方式的科学．它既不能完全包含于社会科学之内，也不能完全包含于自然科学之内．科学的分类，已经不能只分为自然科学和社会科学两大类，还应该有第三大类：数学．

许许多多优秀的学生，正是在学习数学的过程中，自觉或不自觉地优化了自己的思维方式，培养和提高了能力，发展和完善了自己的素质．说句通俗话，把不聪明的自己变得聪明了起来，让聪明的自己更加聪明，从而使他们成了各个领域内的佼佼者．

基于上述认识，就决定了下面的学好数学的具体做法．

二、深入本质，渗透思想，升华观点

学习中要“抓住本质”，这是许多人的经验．但什么是“本质”，怎样去抓住它．在认识上人们又有很大差距．

有人认为，对于定义、定理、公式，不仅要熟记它们的文字表述，还要准确无遗漏地掌握它的构成，这就是“抓住本质”了．例如，圆的定义“在平面中，到一个定点的距离等于定长的点的集合”中，有三个要素“平面”、“定点”、“定长”．

不能否认，这种认识并无错误，但它绝未达到理想的境界，一方面，这样学下去，随着新的概念、知识的不断进入，记忆上不堪重负，因而要经常复习，否则，常常学新忘旧，因为它们在脑子中各自为政，没有浑然一统嘛；进一步说，这个学习过程，对一名学生在思维建设上，是没有促进作用和价值的．

那么，在学习知识上，正确的做法是什么呢？

应当从系统的角度学习知识，置知识于系统中，着眼于知识之间的联系和规律，从而深入本质，因为联系和规律就是本质．着眼于数学思想的渗透．

举例做个说明．

平面几何第一册第58页有一条定理：如果一个角的两边分别平行于另一角的两边，那么这两个角相等或互补，如图0-1所示：

当$CD \parallel OB$、$EF \parallel OA$时，

$\angle 1$，$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$和$\angle AOB$相等或互补.

但何时相等，何时互补呢？没有明确.

这时，如果我们把图中5个角的边的射线方向都加以标注，则不难得到结论：当两组平行边的射线方向全相同或全相反时，这两个角相等；两组平行边的射线方向一同一反时，这两个角互补. 即

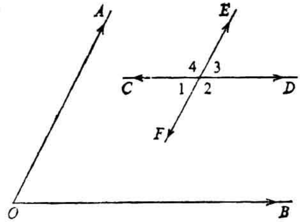

图 0-1

$$\angle AOB=\angle 3,\ \angle AOB+\angle 2=\angle AOB+\angle 4=180°,$$
$$\angle AOB=\angle 1.$$

这样，就发掘了知识之间的联系和规律，加深了理解.

进一步，如果再把两条射线方向相同的关系规定为“+”，方向相反的关系规定为“－”；把两个角相等的关系规定为“+”，互补的关系规定为“－”. 那么，初一代数中有理数乘法的符号法则：“+”、“+”得“+”，“+”、“－”得“－”，“－”、“+”得“－”，“－”、“－”得“+”. 不正描述了本定理确切的结论吗！

认识又加深了，大自然中的联系竟如此微妙！

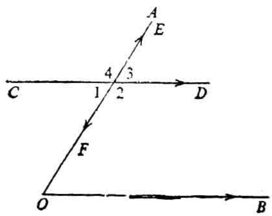

图 0-2

再进一步. 如果将直线EF平移，使它与OA所在直线重合，如图0-2所示，由前述，当然继续有$\angle AOB=\angle 3$，$\angle AOB+\angle 2=180°$，$\angle AOB=\angle 1$. 但这时，上述关系，不正分别是“两直线平行（$CD \parallel OB$），则同位角相等（$\angle AOB$

$=\angle 3$”)；“两直线平行($CD /\!/ OB$)，则同旁内角互补($\angle AOB+\angle 2=180^\circ$)”；和“两直线平行($CD /\!/ OB$)，则内错角相等($\angle AOB=\angle 1$)”吗！

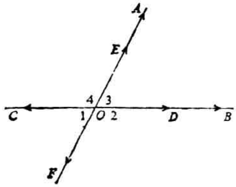

图　0-3

微妙的联系正向纵深发展！

在图 0-2 的基础上，把 CD 平移，使与OB所在直线重合. 那么，$\angle AOB$和$\angle 3$的相等，不也是“角相等定义”吗！$\angle AOB$分别和$\angle 2$及$\angle 4$的互补，不也是平角定义吗！而$\angle AOB$和$\angle 1$的相等，竟然可同时认为是对顶角相等！如图0-3所示。

知识间的联系，竟如此令人意想不到，却又如此合情合理.

分散在课本里从第20页到第58页的40多条定义、定理中的6条定义、定理（角相等定义，平角定义，对顶角相等，两直线平行则同位角相等、同旁内角互补、内错角相等），竟全包括在一条定理（如果一个角的两边分别平行于另一个角的两边，那么这两个角相等或互补）内. 事实是，这 1 条定理是那6 条定义、定理的联合推广；那 6 条定理则是这 1 条定理的特例. 因为，它们原本是一个系统. 这种学习方法，就是置知识于系统中，着眼于知识之间的联系.

它的优越在哪里呢？

首先，这个融汇贯通的过程，使我们透过繁杂的现象，抓住了本质，同时简化了记忆.

更重要的是，接触到了一种崭新的认识问题的思想方法：由寻找联系入手，运用规定（定义）平移变换等数学思想和从“特殊到一般，又从一般到特殊”的方法，把个别的、离散的现象构造成浑然一体的系统，这已经标志着能力的提高和素质

的发展了．以这种提高和发展，去学习、去解题，将与过去不可同日而语．因为解题的过程的本质，就是以敏锐的观察、分析，去发现和建立已知条件和结论之间的联系．

三、“头悬梁、锥刺股”，就是刻苦吗

老师们，多曾向学生介绍过古人苏秦“头悬梁、锥刺股”的故事，勉励学生像他那样发愤学习．不少同学也常常以“头悬梁、锥刺股”的精神自勉、自激，要求自己，上课时，瞪大了眼睛，张开自己脑中的“口袋”，把老师讲的每句话、写出的每个字，统统装进自己的“口袋”中；课后认真完成作业，按时交作业，发下来有错必改，做完老师留的作业，还要自己再找题做，熟能生巧嘛！做完作业，还要主动复习，经常复习，“顽强”地和疲劳、瞌睡作“斗争”，直到把笔记或书上划出的重点啃得滚瓜烂熟．

这算不算刻苦学习了呢？

笔者以为，精神诚可贵，效果未必好．因为，学习本身也是科学．在课堂听讲、做作业、复习这三个环节上，都要科学地有成效地刻苦学习，这应表现为如下的努力．

（一）超前思维，向老师挑战

课堂上，努力争取想在教师讲授的前面．定理、公式，争取自己推导出来；例题，争取自己先分析、解答；进而，当命题的条件刚刚写出，自己就去猜想它的结论；一个新的概念出现时，自己就试着去定义它；甚至，随着课程的进行、知识的发展，自己设想，又该提出什么命题了，又该定义什么名词了……

当然，高水平的教师在讲课时，应该给学生的超前思维留有时间上的余地，甚至创造条件，鼓励和启发学生超前思维，

而听课学生的超前思维，又应该和老师密切配合，不能因为自己还没想出来，而充耳不听老师的讲解，另搞一套.

课堂听讲的这种方式的优点在于，例题既然是自己解出来的，定理公式既然是自己证出来的，当然理解深刻、印象深刻，记忆久远，不易遗忘，即使忘了也不怕，因为本来就是自己推出来的，就再推嘛！省却了许多临考前还要复习背诵的时间.

更重要的是，在这个过程中，培养了能力. 而且，45分钟的课堂上，每当有个短短的一两分钟甚至几秒钟的间隙，都要拼命去往前想，这种高强度的要求，才是真正的刻苦呢！必将锻炼了思维.

“向老师挑战”是什么意思？

上面谈到，课堂上的超前思维的过程中，常常还没来得及想出来，老师已经开始讲解了，或者，自己虽想出了结论，但与随即而来的老师结论或方法不同，这时，不应立即“缴械投降”，还要做些“挣扎”，首先是要问“为什么”，甚至力图否定老师的结论或方法. 这样做的结果，如果没有成功，则证明老师是对的，这时再接受老师的结论或方法. 那么，由于从反面尝试了“打不倒它”的滋味，自然对这个结论或方法，有了深刻的体会，从而实现了高质量地理解和消化老师的讲授；如果否定的努力成功了，它的意义就不在于一两个具体结论或方法的改进上，许多日后出类拔萃学生的成功，是在这里埋下了飞跃的种子.

讲三个真实的故事.

1988年3月的一次数学课上，我把一道从课外读物上选来的题目，抄在黑板上.

a、b、c、x都是实数，并且$a<b<c$，试求$|x-a|+|x-b|+|x-c|$的最小值.

一部分同学经过思考，提出了如下相同的解法（后来我请一些教师解此题并在北京市数学奥林匹克学校写出此题，大家也都是这个解法，当然，也有不少人不会解此题）：

首先，运用实数绝对值定义，分情况打开绝对值号，得

$$
原式=\begin{cases} -(x-a)-(x-b)-(x-c), & (x\leqslant a) \\ x-a-(x-b)-(x-c), & (a<x\leqslant b) \\ x-a+x-b-(x-c), & (b<x\leqslant c) \\ x-a+x-b+x-c, & (x>c) \end{cases}
$$

整理得

$$
{}^{*}原式=\begin{cases} a+b+c-3x, & (x\leqslant a) \\ -a+b+c-x, & (a<x\leqslant b) \\ -a-b+c+x, & (b<x\leqslant c) \\ 3x-(a+b+c), & (x>c) \end{cases}
$$

在每一段上进行分析.

Ⅰ．当$x\leqslant a$时，由于$a+b+c$是定值，则当x取得最大值a时，得到这一段上原式的最小值为 $a+b+c-3a=b+c-2a$；

Ⅱ．当$a<x\leqslant b$时，由于$-a+b+c$是定值，也当x取最大值b时，得到在这一段上原式的最小值为 $-a+b+c-b=c-a$；

Ⅲ．当 $b<x\leqslant c$时，由于$-a-b+c$是定值，则当x 取最小值时，原式得到在这一段上的最小值，但x在这一段上无最小值，$x>b$，故原式在这一段上的最小值大于$-a-b+c+b=c-a$；

Ⅳ．当$x>c$时，由于$-a-b-c$是定值，则当x取最小值时，原式得到在这一段上的最小值，但x在这一段上无最小值，$x>c$，故原式在这一段上的最小值大于$3c-(a+b+c)=2c-a-b$.

比较Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ的结果，由于$a<b<c$，则$c-a<c-a+(b-a)=b+c-2a$，同时，$c-a<c-a+(c-b)=2c-a-b$，

故所求原式的最小值，在第Ⅱ段上取得，为$c-a$，此时，$x=b$.

我为了显示数形结合思考的优越性，在黑板上，写出了我的函数解法（由于我在教学上从系统出发，着眼于联系、规律、着意于能力、素质，课程进度自然加快，初二结束，学完初三功课，高一结束时，学完高三功课，所以，此时已学到二次函数了）

从上面*处开始，改写*式为

$$原式=\begin{cases}-3x+a+b+c,&(x\leqslant a)\\-x-a+b+c,&(a<x\leqslant b)\\-x-a-b+c,&(b<x\leqslant c)\\3x-(a+b+c).&(x>c)\end{cases}$$

则函数 $f(x)=|x-a|+|x-b|+|x-c|$的图象可示意如下(图0-4)，

显然，$f(x)$的图象在$x=b$时为最低点，即，$x=b$时，$f(x)$得到最小值，为

$$f(b)=|b-a|+|b-b|+|b-c|=c-a.$$

这个解法的前半部分与解法一相同，有个繁琐的打开绝对值号的过程，但后半部分直观性强，简捷. 如图0-4所示.

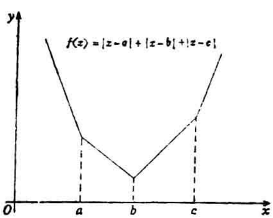

图 0-4

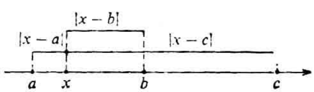

图 0-5

这时，李毅同学举手了，“孙老师，我的解法比您的还简单”.